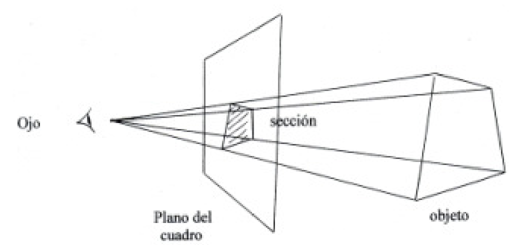
# GEOMETRÍA PROYECTIVAS.

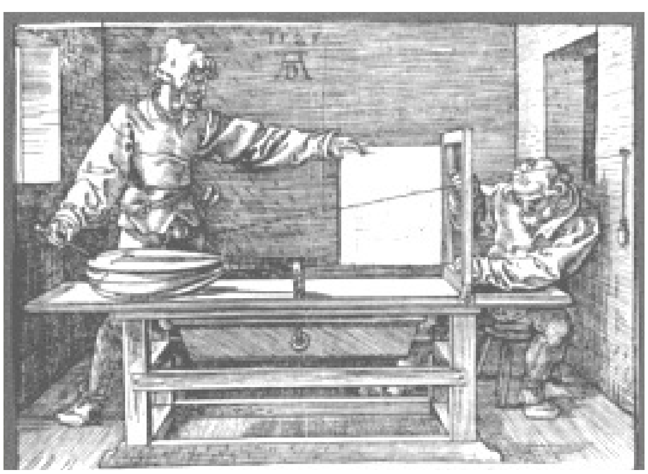
## ORIGEN DE LA GEOMETRIA PROYECTIVA.

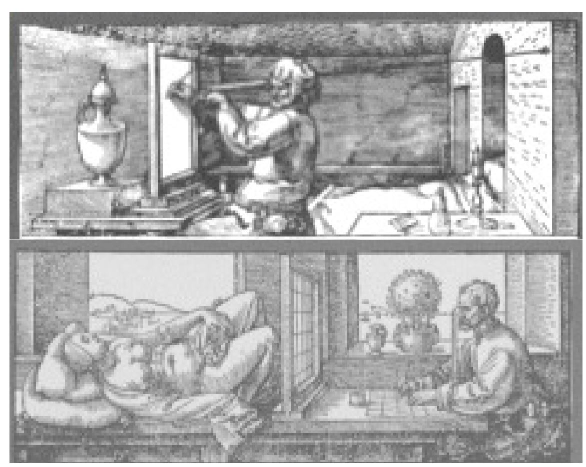
La Geometría Proyectiva surge en el Renacimiento.(S XV)
En aquella época existe una necesidad de parte de los artistas por representar el mundo de una manera más realista.
Durante el periodo medieval las pinturas eran principalmente de carácter religioso, donde los fondos de las obras solían ser dorados para sugerir lo celestial y las figuras eran más simbólicas que realistas.
Luego la necesidad de representar el espacio tridimensional real sobre el plano da lugar a la aparición de la perspectiva lo que se gesta en el Renacimiento. El problema es cómo plasmar el mundo tridimensional real en un lienzo bidimensional.
Si bien su invención es atribuible a los artistas y arquitectos Leon Battista Alberti (1404-14729) y Filippo Brunelleschi (1377-1446), la base geométrica fue descubierta por Alberti a través de un sencillo método que permitió crear espacios geométricos con profundidad en superficies de dos dimensione, con lo que logró transformar el arte occidental.
El planteamiento de Alberti consistía en el estudio de aquellas propiedades geométricas que tienen en común el objeto original y cualquiera de sus secciones.

El método de Alberti consistía en interpretar una propiedad fundamental de la visión monocular, para lo cual construyó una pirámide de rayos desde el ojo del pintor con los punto de la escena que deseaba plasmar sobre el cuadro. **La pirámide de rayos la llamo proyección.**
La pantalla entre la escena y el ojo, donde cada uno de los rayos determina un punto sobre el cristal forma una sección.

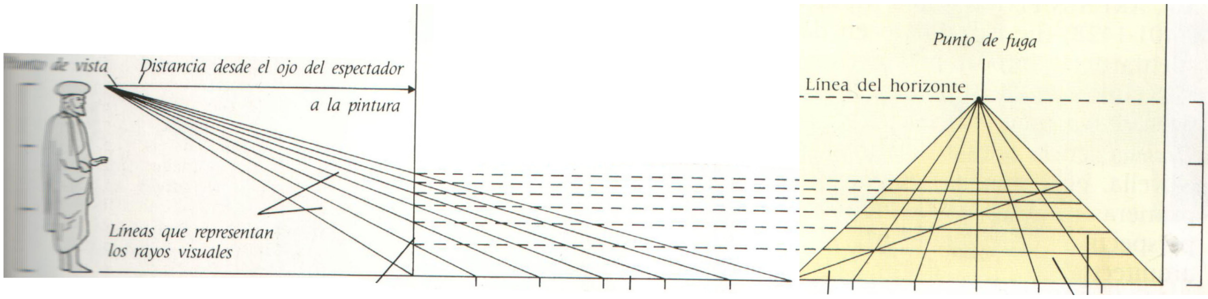



El Tratado de la pintura de Alberti de 1435 presenta el principio de proyección y sección ilustrado en algunos grabados del pintor Alemán Alberto Durero. (1471 – 1528).





Estableciendo en el tratado el "mejor método" para construir la perspectiva en la pintura, donde él imagina la superficie pictórica como el plano que cortaba una pirámide de rayos visuales.




La importancia del trabajo de Alberti radica en plantearse la pregunta inicial de la geometría proyectiva, que es:

¿Cuál es la relación matemática entre dos de estas secciones cualesquiera? O ¿Cuáles son las propiedades que tiene en común?

Preguntas que marcaron su origen y que sirvieron de base para el desarrollo de la Geometría proyectiva.
El primero en recorrer los senderos de la geometría proyectiva fue **GIRARD DESARGUES** (1591- 1661) considerado el padre de la geometría proyectiva. Su gran obra "*Tratado sobre las secciones cónicas*". Sin embargo en el campo de la Geometría Proyectiva también se destacan: **BLAISE PASCAL** (1623-1662) conocido en la geometría proyectiva por el llamado teorema de Pascal y **PHILIPPE DE LA HIRE** (1640-1718) por su obra, *"Secciones Conicae"* (1685) dedicada totalmente a los métodos proyectivos. Si bien todos estos conceptos fueron descubiertos en el siglo XVII, fueron valorados y retomados en el siglo XIX.

**Geometría Proyectiva.**
La preocupación de la geometría proyectiva son las propiedades de las figuras planas o del espacio que permanecen invariantes bajo un tipo especial de transformación.
Por ejemplo, dos figuras son equivalentes si son congruentes, es decir si una puede obtenerse de la otra mediante un movimiento rígido, en el cual sólo cambia la posición, pero no la magnitud. Surge entonces el concepto de magnitud y con el los de congruencia y semejanza y de ahí su importancia en geometría, sin embargo es factible que figuras geométricas puedan tener aún otras propiedades más profundas que subsistan después de transformaciones más drásticas que los movimientos rígidos.

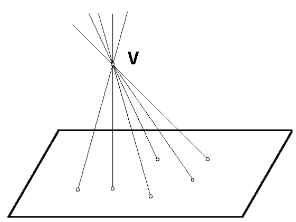
Es así como cuando vemos que la imagen trazada por un pintor puede considerarse como la proyección del original sobre la tela, con el centro de proyección en el ojo del pintor, en este proceso, las longitudes y los ángulos se alteran necesariamente en forma que depende de las posiciones relativas de los diversos objetos pintados. Sin embargo puede reconocerse sobre la tela, generalmente la estructura geométrica del original. Ello es posible por que existen propiedades geométricas "invariantes en la proyección", propiedades que aparecen sin alterar la imagen y que hacen posible su identificación. Deducir y analizar estas propiedades constituye el objeto de la geometría proyectiva.
De este modo, si una figura plana es proyectada desde un punto sobre otro plano cambian las distancias y los ángulos, además líneas paralelas pueden cambiar en líneas no

paralelas, quedando sin embargo a pesar de todo, ciertas propiedades esenciales intactas, ya que si fuera de otro modo no podríamos reconocer a lo proyectado como una verdadera imagen de la figura original.

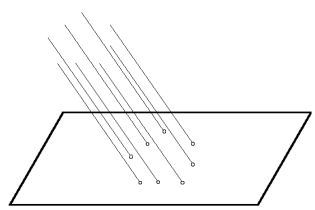
**Definiciones:**

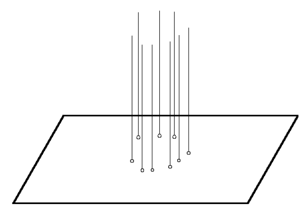
**Proyección:**
Proyectar equivale a trazar todas las rectas o **rayos proyectantes** que cumplen con una condición o ley.
La condición más normal exige que todos esos rayos pasen por un punto, al que se conoce como **centro de proyección**.

**Tipos de Proyección:**



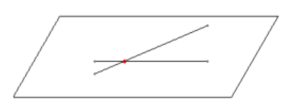
Proyección Central a Cónica


Proyección Paralela o Cilíndrica

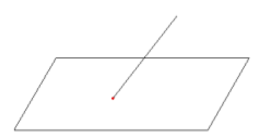

Proyección Ortogonal.

**Sección.**
Seccionar equivale a cortar, a obtener la intersección entre dos formas incidentes. (partes que tengan en común)
Existen tres tipos de secciones básicas a obtener.

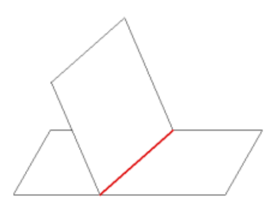
Sección de **dos rectas**, obteniendo un **punto**.



Sección de **una recta y un plano**, obteniendo un **punto**.



Sección de **dos planos**, obteniendo una **recta**.



**Definición I:**
Se llama plano Euclidiano al plano de la geometría Euclidiana, es decir al plano que utiliza Euclides y para el cual valen todos los postulados establecidos en sus Elementos. Es el plano ordinario de la Geometría elemental.

**Definición II:**
Convendremos en decir que toda recta del plano define un punto impropio el cual es el mismo para todas las rectas paralelas, y distinto para las rectas no paralelas.
Por consiguiente, dar un punto impropio equivale a dar una recta, o sea una dirección en el plano. Dos rectas paralelas determinan el mismo punto impropio (equivale a decir que tienen la misma dirección) con este ajuste el enunciado **"Dos rectas determinan un punto"** tiene validez general.

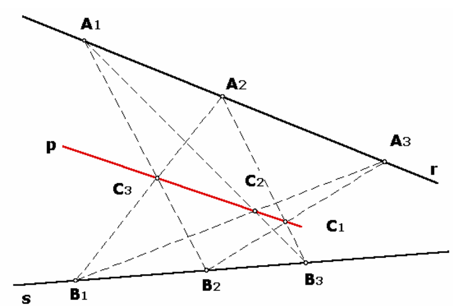
**Definición III:**
Se llama plano proyectivo al plano Euclidiano ampliado por los puntos impropios.

**Principio de Dualidad.**
Importante es el Principio de Dualidad, por el cual a cada proposición se le hace corresponder otra, al intercambiar ciertas palabras claves y otros cambios de notación y lenguaje que son necesarios para que tenga sentido la proposición, válida en la geometría proyectiva pero no en la euclidiana.
Proposición válida para el plano proyectivo.

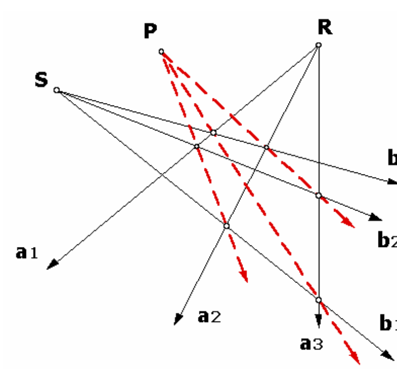
Todo par de **puntos** distintos determinan una y solo una **línea**.
Todo par de **líneas** distintas determinan uno y sólo un **punto**.

Una de estas proposiciones es obtenida de la otra por el simple cambio de las palabras "punto" y "línea".
Un ejemplo del principio de dualidad puede darse con el teorema típico de geometría proyectiva como el "Teorema de Pappus".

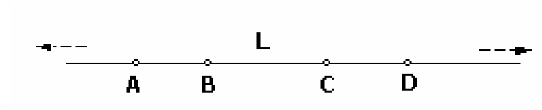
**Teorema de Pappus.**
En un plano proyectivo, sean $A_1$ $A_2$ $A_3$ puntos distintos sobre una línea r y $B_1$ $B_2$ $B_3$ puntos distintos sobre otra línea s; entonces los puntos:
$C_1 = (A_2 \cup B_3) \wedge (A_3 \cup B_2)$;
$C_2 = (A_1 \cup B_3) \wedge (A_3 \cup B_1)$;
$C_3 = (A_1 \cup B_2) \wedge (A_2 \cup B_1)$;
Son colineales.



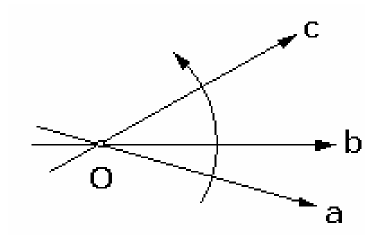

**El dual del teorema es:**
En un plano proyectivo sean $a_1$ $a_2$ a3 líneas distintas sobre un punto R y $b_1$ $b_2$ $b_3$ líneas distintas sobre otro punto S; entonces las líneas:
$c_1 = (a_2 \wedge b_3) \cup (a_3 \wedge b_2)$;
$c_2 = (a_1 \wedge b_3) \cup (a_3 \wedge b_1)$;
$c_3 = (a_1 \wedge b_2) \cup (a_2 \wedge b_1)$;
Son concurrentes, es decir, tienen un punto común de intersección.



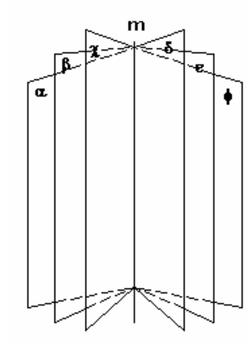
**Alineaciones.**
Alineación recta o simplemente alineación, es el conjunto de todos los infinitos puntos que podemos considerar sobre una recta indefinida. ( recta soporte de la alineación).
Las alineaciones pueden designarse por el nombre de alguno de sus puntos o por la recta soporte sobre la que están ubicados.




**Haces Planos de Rectas.**
Haz plano, haz de rectas o simplemente haz, como lo llamaremos generalmente, es el conjunto infinito de rectas o rayos que puedan pasar por un punto fijo que se llama vértice o centro del haz.
El haz puede designarse por el nombre de alguno de su rayos o por el de su vértice.
En cuanto a los rayos, siempre se consideran completos, o sea, en sus dos semirrectas o semirrayos en que los divide el vértice.

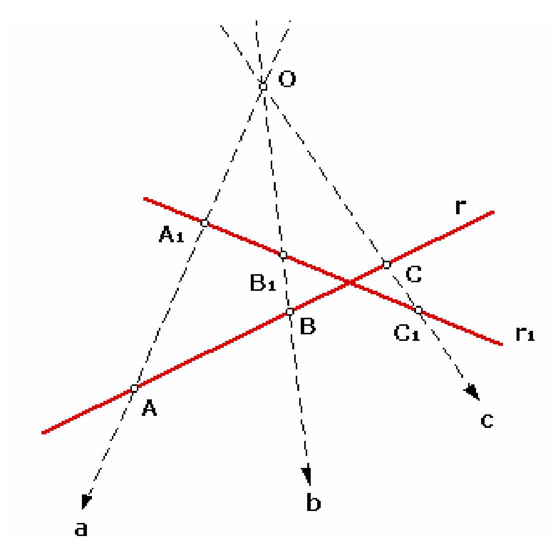



**Haces de Planos.**
Son los formados por los infinitos planos $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon, \theta$..... que puedan pasar por una recta m. (como las infinitas posiciones de una puerta rotatoria).



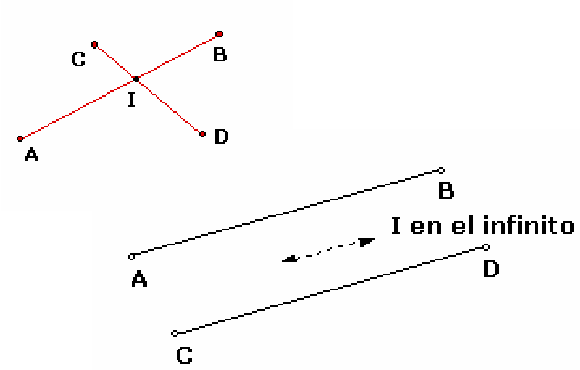

**Alineaciones y Haces Correspondientes.**
Sean en la alineación r, los puntos A, B, C, D.
Si desde un punto exterior, O, que tomamos como vértice, trazando las rectas a, b, c, d, .... que pasen por los puntos dados, habremos formado un haz plano de rectas, donde cada se corresponderá con un punto de la alineación.

Si esta vez cortamos esta haz por otra recta, $r_1$, obtendremos otra alineación cuyos puntos $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$, ...se corresponderán con los rayos del haz, y a través de este con los puntos homónimos de la primera alineación.
Cada par de puntos estarán siempre bajo el mismo rayo del haz pudiéndose o no encontrar en la misma semirrecta respecto del vértice del haz.

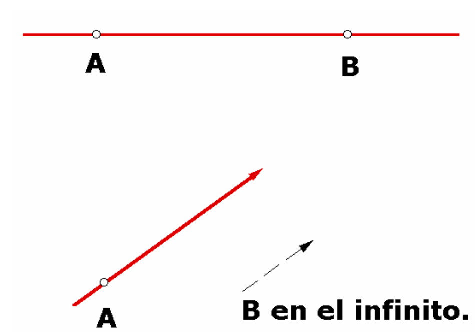


**Dualidad entre Alineaciones y Haces.**
De esta propiedad que no siempre usaremos daremos algunos ejemplos:

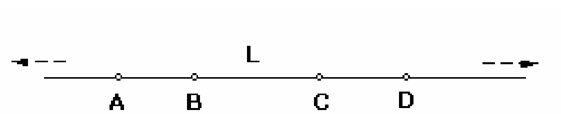
- Un **punto** queda determinado por la **intersección** de dos **rectas**.



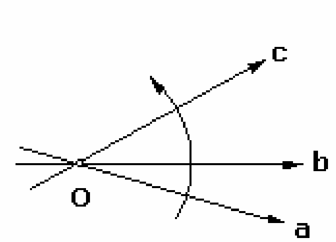

- Una **recta** queda determinada por la **unión** de dos **puntos**.



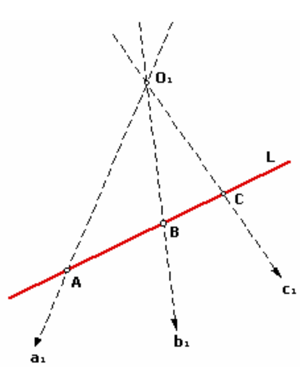

- Una serie de **puntos** sobre una **recta** constituyen una **alineación**.



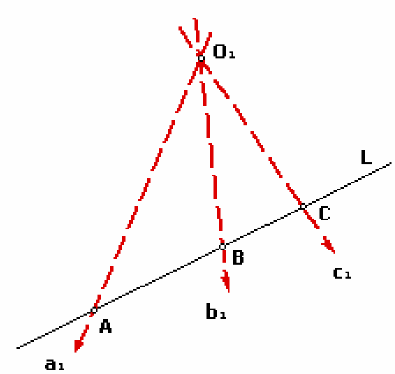

- Una serie de **rectas** que pasan por un punto constituyen un **haz**.



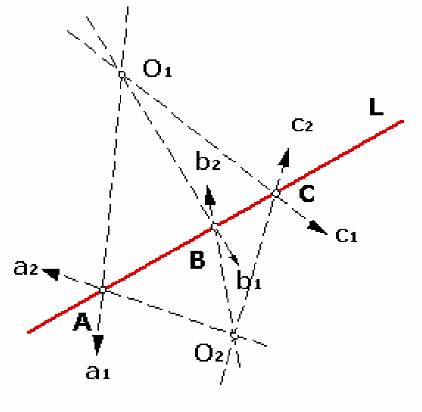

- Si **proyectamos** una **alineación** desde un **punto** exterior a su recta, obtendremos un **haz** proyectivo con ella.



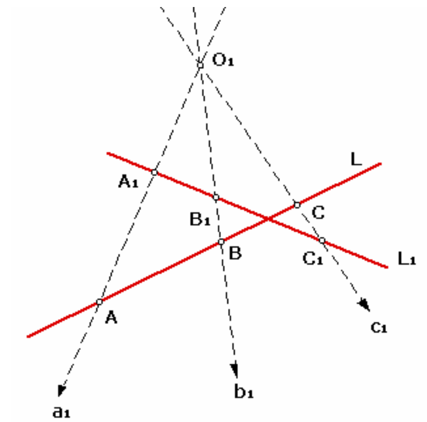

- Si **cortamos** un **haz** por una **recta** que no pase por su vértice obtendremos una **alineación** proyectiva con aquel.



- Una **alineación proyectada** de dos **puntos** exteriores a su **recta** soporte nos da dos **haces** correspondientes entre sí.

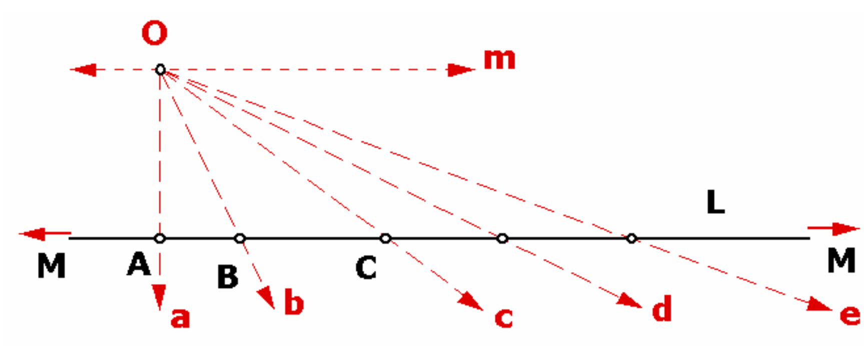



- Un haz cortado por dos **recta**s que no pasen por su vértice nos da dos **alineaciones** correspondientes entre sí.




**Puntos en el Infinito de una Alineación.**

Si desde un punto O exterior a una alineación r trazamos rayos correspondientes con la alineación, veremos que siguiendo el giro del rayo este llegará a la posición m, que es paralela a la alineación base.
Como sabemos que la correspondencia entre rayo y alineación esta dada por donde el rayo corte a la alineación, en este caso el rayo cortará a la alineación en el infinito, luego diremos que el punto del infinito es el correspondiente al rayo m.
Además en la geometría proyectiva existirá un solo punto ideal por recta lo que implica que la recta es una línea cerrada con un único punto en el infinito.




**Recta del Infinito.**
En un plano dado existe solo una recta del infinito definida por los puntos del infinito de los innumerables sistemas de rectas paralelas que puedan trazarse en el plano de referencia, y cada uno de sus puntos representará para nosotros una dirección.
Como en dos o más planos paralelos pueden trazarse infinitos sistemas de rectas paralelas, cuyos puntos del infinito serán comunes, podemos afirmar que todos los planos paralelos tienen común la recta del infinito.

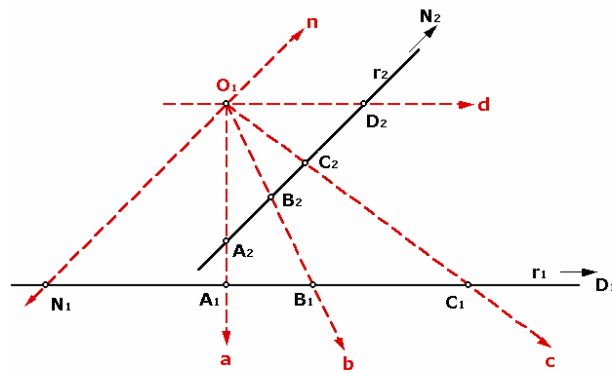
**Puntos Límites.**

Sea un haz que intersecta dos rectas, $r_1$ y $r_2$, en las que determina dos alineaciones correspondientes.

El rayo d paralelo a $r_1$, nos determinará sobre la recta $r_2$, el punto $D_2$ correspondiente de $D_1$ punto del infinito de la alineación $r_1$, mientras el rayo n, paralelo a $r_2$, nos determinará el punto $N_1$ correspondiente a $N_2$ punto del infinito de la alineación $r_2$.

Estos puntos se denominan puntos límites de la otra alineación porque establecen un límite entre los puntos de su alineación.

Como caso particular tenemos si proyectamos una alineación desde un punto situado en el infinito, o sea según una dirección determinada, obtendremos un sistema o un haz de rectas paralelas.

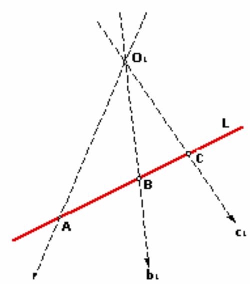



**Proyectividades y Perspectividades.**

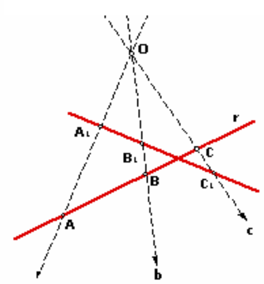
Las alineaciones y haces correspondientes pueden ser perspectivas o simplemente proyectivos.

Un haz de rectas y una alineación, dos alineaciones o dos haces de rectas, se llaman perspectivas cuando ocupan una determinada posición relativa entre ellos:

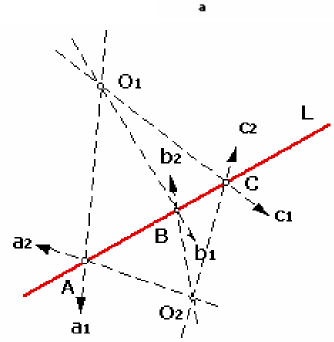
**Una alineación y un haz están en situación perspectiva** cuando los rayos del haz pasan por puntos de una alineación.



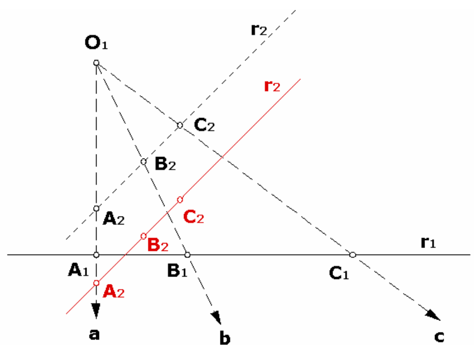

**Dos alineaciones están en situación perspectiva** cuando los puntos correspondientes de las dos alineaciones están bajo los rayos de un haz.

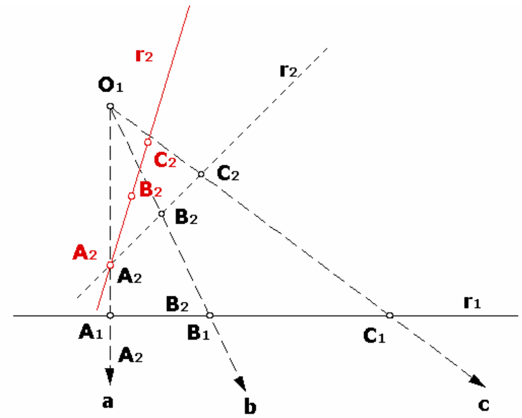



**Dos haces de rectas están en situación perspectiva** cuando los rayos correspondientes se cortan en puntos de una alineación.

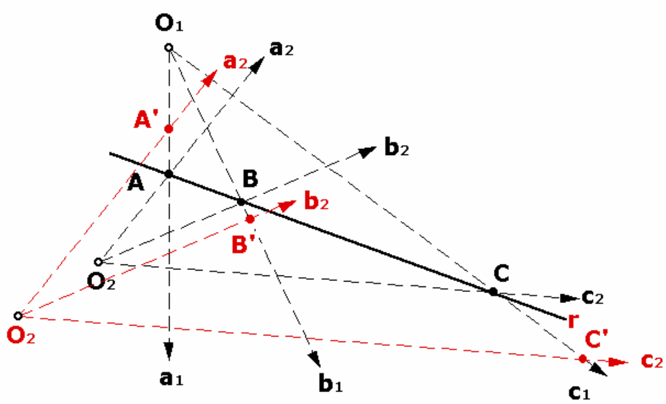


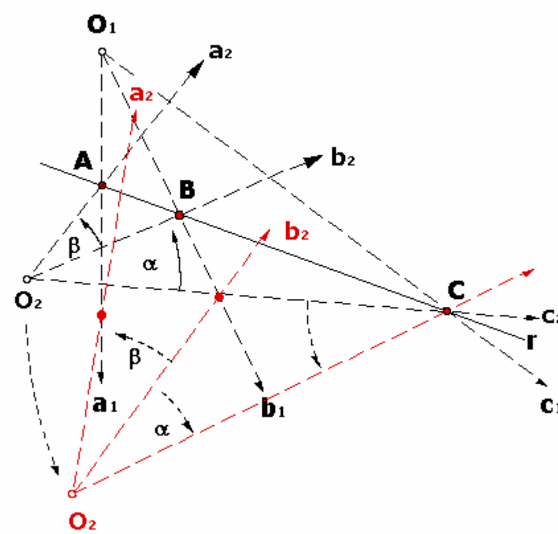
Si rompemos estas relaciones mutuas trasladando o girando una o más de las alineaciones o de los haces, sin variar la distancia entre los puntos de las alineaciones o los ángulos entre los rayos, seguirán los distintos elementos siendo correspondientes, pero en este caso perderán su cualidad de perspectivas y se llamaran simplemente proyectivos.



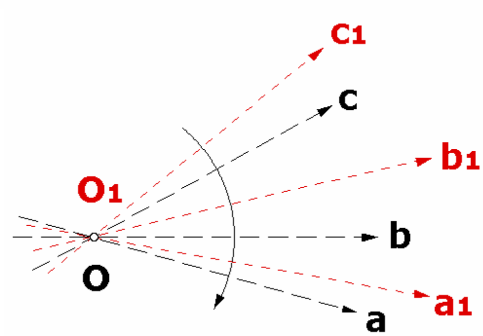

**Alineaciones y haces dobles.**



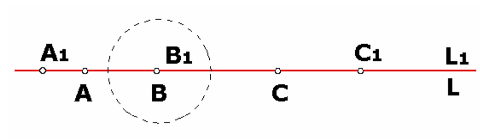




**Alineación Doble.**
Se llama alineación doble al conjunto de dos alineaciones proyectivas situadas sobre una misma recta.
A cada punto le corresponderán dos puntos distintos, según se les considere formando parte de una o de la otra alineación.

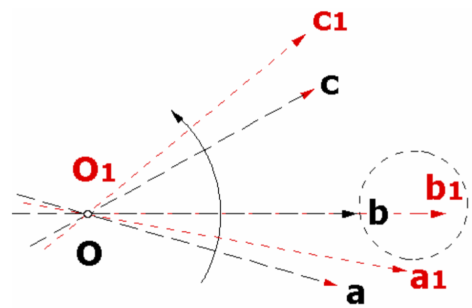

**Haz Doble.**
Se llama haz doble al conjunto de dos haces proyectivos cuyo vértice es común.
A cada rayo le corresponderán dos rayos distintos, según se les considere formando parte de uno u otro haz.



**Puntos dobles y Rayos Dobles.**



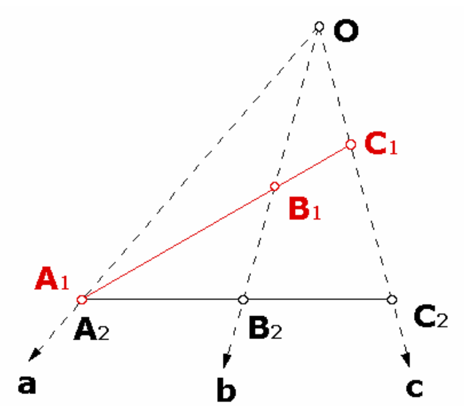

**Puntos Dobles.**
Cuando un punto se corresponde a sí mismo.

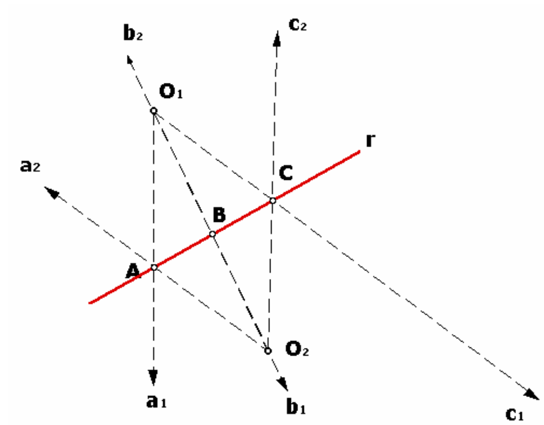



**Rayo Doble.**
Cuando un rayo se corresponde a sí mismo.

**Alineaciones y haces proyectivos que tengan tres elementos en situación perspectiva serán perspectivos en su totalidad.**

Dos alineaciones o dos haces proyectivos definidos por tres elementos con un elemento doble o común son perspectivos.



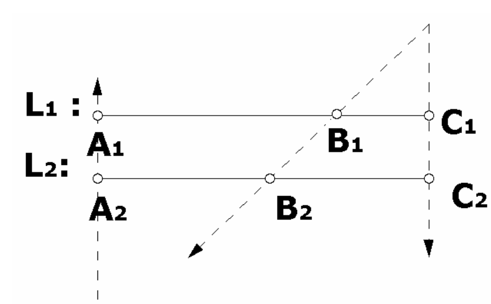




**Determinación gráfica de elementos correspondientes de dos alineaciones y de dos haces.**

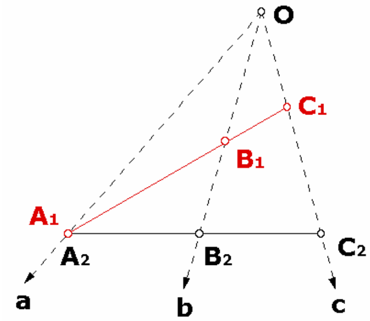
Métodos de determinación gráfica.
a.- Por el traslado de una de las formas.
b.- A través de una forma intermedia.

**Método, por el traslado de una de las formas.**

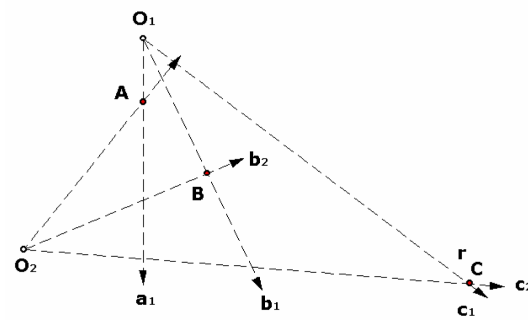
**a.- Caso dos alineaciones.**
Dadas dos series definidas por tres elementos en situación proyectiva.



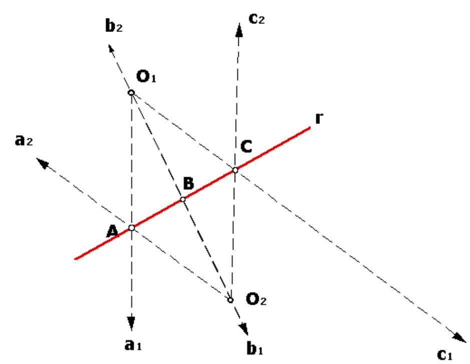
Por uno de los puntos A1 de la primera serie tracemos otra recta, sobre la cual colocaremos la segunda serie, haciendo coincidir el punto A1 con su homólogo A2.
Luego se une B1 con B2 y C1 con C2, el punto de intersección O de estas dos rectas será el centro de un haz perspectiva con ambas series, y las intersecciones de estos rayos de este haz con las alineaciones darán puntos correspondientes sobre las mismas.




**b.- Caso dos haces.**
Sean dos haces definidos por tres rayos en situación proyectiva.



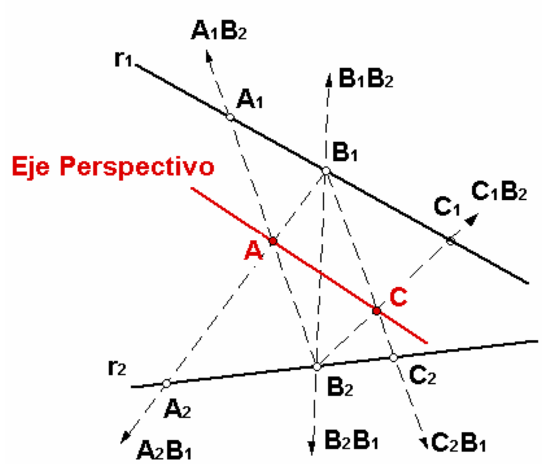

Si sobre uno de los rayos a1 del primer haz escogemos otro punto como vértice del segundo haz, haciendo coincidir el rayo a1 con su homólogo a2.
Luego se busca la intersección de b1 y c1 con b2 y c2, la recta r de unión de estos dos puntos será la recta base de una alineación perspectiva con ambos haces, y la unión de los puntos de esta alineación con los vértices de haces darán rayos homólogos.



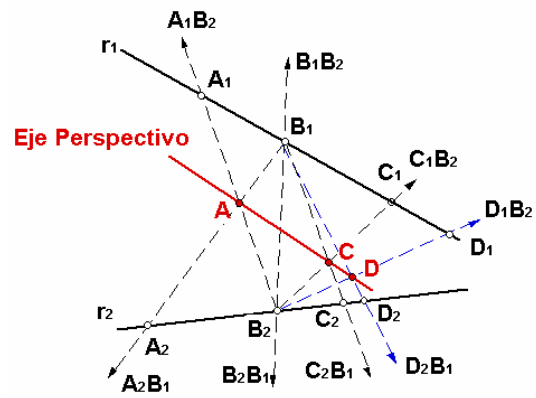

**Método, por una forma Intermedia.**

**a.- Caso dos alineaciones.**

Si desde dos puntos homólogos cualesquiera B1 y B2 proyectamos todos los puntos de la otra alineación tendremos dos haces proyectivos en situación perspectiva con dos series correspondientes.
Esto se debe a que los dos haces tienen un rayo homólogo doble o común, como B1B2 de la primera radiación se corresponde con B2B1 de la segunda, luego ambas radiaciones serán perspectivas, y todos los rayos homólogos se cortarán sobre una recta que llamaremos Eje Perspectiva y que podremos determinar de la intersección de B1A2 y B1C2 con B2A1 y B2C1, respectivamente.



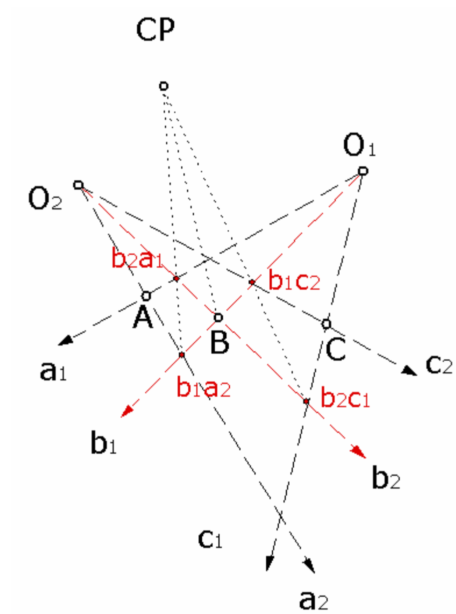
Operando a la inversa esta recta nos sirve para determinar nuevos puntos homólogos.



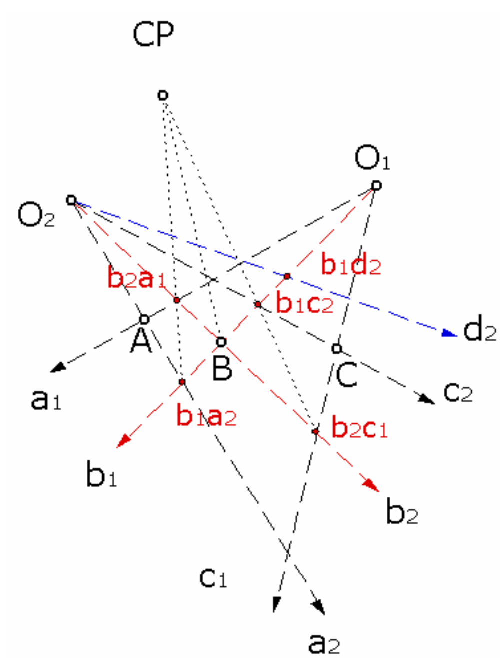

**b.- Caso dos Haces.**

Si dos rayos homólogos cualesquiera los cortamos por todos los rayos del otro haz, tendremos dos alineaciones proyectivas.

Ahora como las dos alineaciones tienen un punto homólogo común, intersección de b1 y b2 ambas alineaciones serán perspectivas y todas las rectas que unen puntos homólogos se cortarán en un punto que llamaremos centro perspectiva y que podemos determinar uniendo los puntos de intersección de b1a2 y b1c2 con b2a1, con b2c1 respectivamente.




Operando a la inversa este punto nos puede servir para encontrar nuevos rayos homólogos.

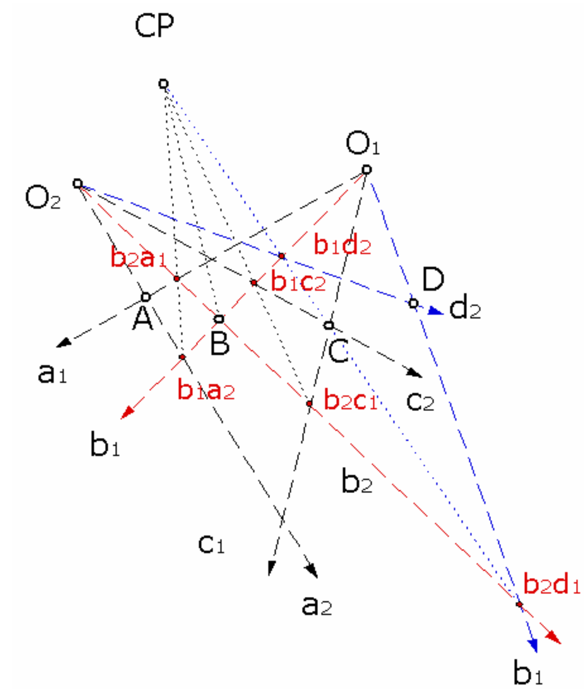



Procedimiento:

1.- Desde el vértice $O_2$ se traza un rayo en forma arbitraria, que como nace del vértice $O_2$ tendrá subíndice 2 y que llamaremos $d_2$ .

2.- El rayo $d_2$ va a intersectar al rayo $b_1$ en el punto $b_1d_2$ que forma parte de la alineación $b_1$.

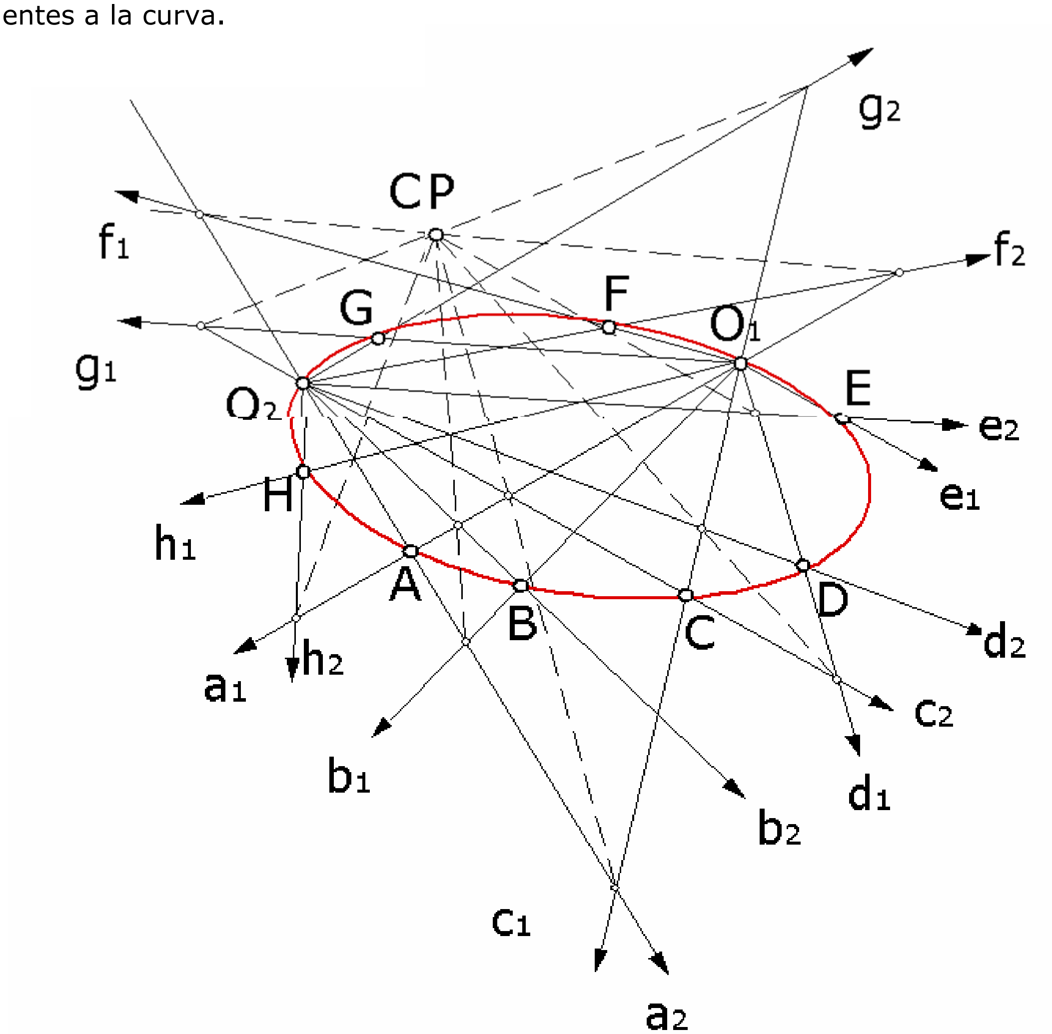
3.- Como la alineación $b_1$ está en situación perspectiva con la alineación $b_2$ con respecto al vértice de haz CP (centro perspectivo), entonces el punto correspondiente a $b_1d_2$ será $b_2d_1$ que estará contenido en la alineación $b_2$ y que determinaremos uniendo b1d2 con CP y donde la recta corte a $b_2$ estará el buscado $b_2d_1$.




4.- Luego para determinar el rayo d1 correspondiente a d2, y que tendrá una posición única se unirá vértice O1 con el punto b2d1.

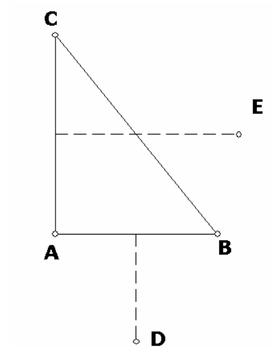
5.- Finalmente el rayo arbitrario $d_2$ que nace del vértice $O_2$, se cortará con el rayo $d_1$ que nace del vértice $O_1$ determinando un punto que llamaremos D.

6.- Si se continúa determinando puntos de esta manera obtendremos una cónica. En este caso la cónica será una elipse como se indica y la unión de CO con cada vértice de haz nos definirá rectas tangentes a la curva.



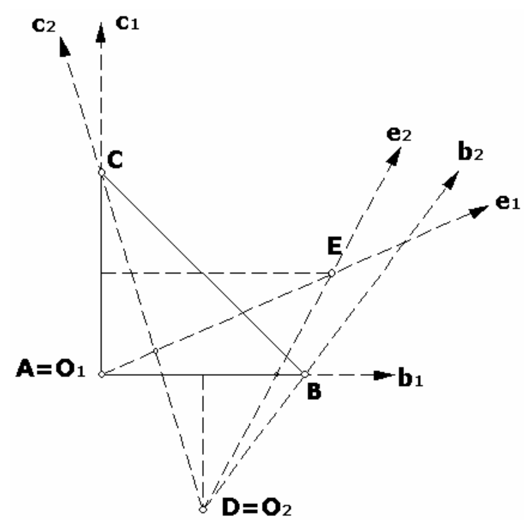
**EJEMPLO:**

Determine la cónica que pasa por los siguientes cinco puntos a través del método de una forma intermedia de dos haces planos de recta en situación proyectiva.




**Procedimiento.**

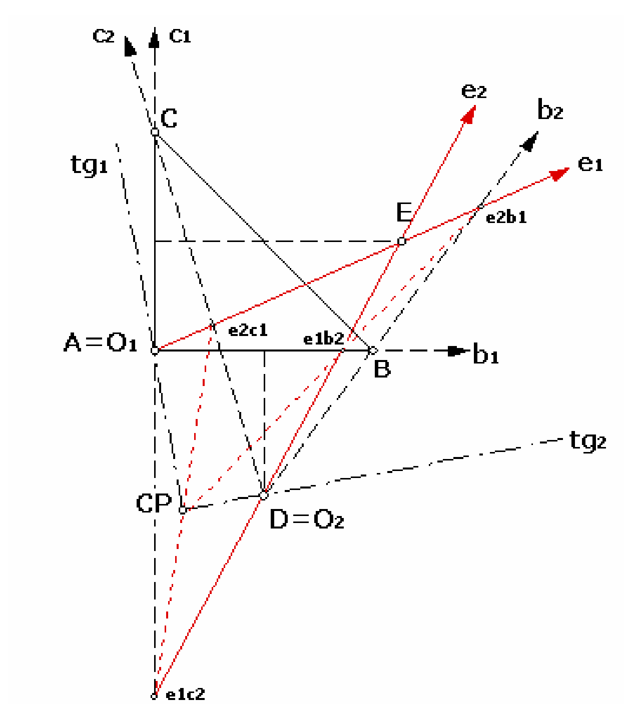
1.- Suponer dos de los puntos dados vértices de haces (pueden ser cualquiera). Luego se definen el resto de los puntos como rayos correspondientes que nacen de estos vértices de haces.



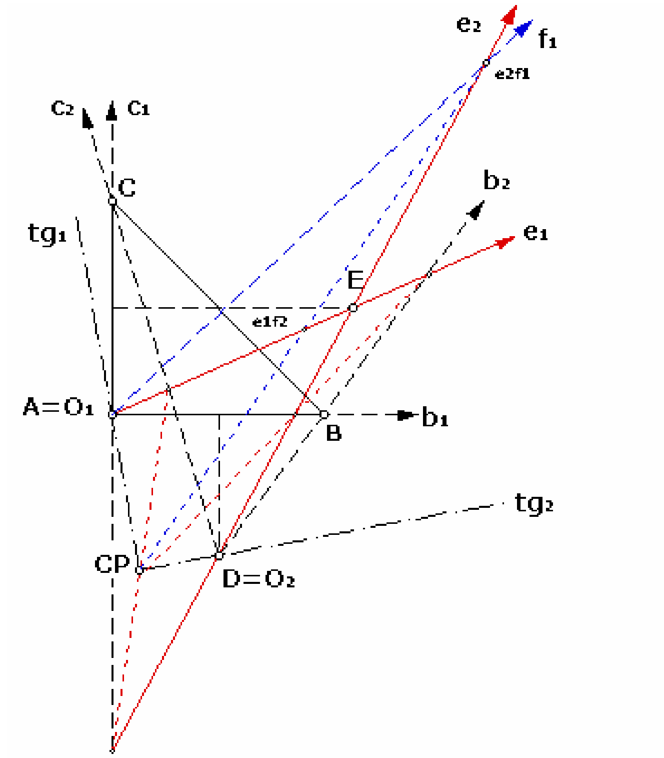

2.- Se toma un par de rayos correspondiente como alineaciones definidas por tres puntos con un punto doble o común. ( e1, e2).

3.- Se determina la intersección de e1 con los rayos que nazcan del vértice O2 y luego donde e2 se intersecte con los rayos que nazcan de O1.

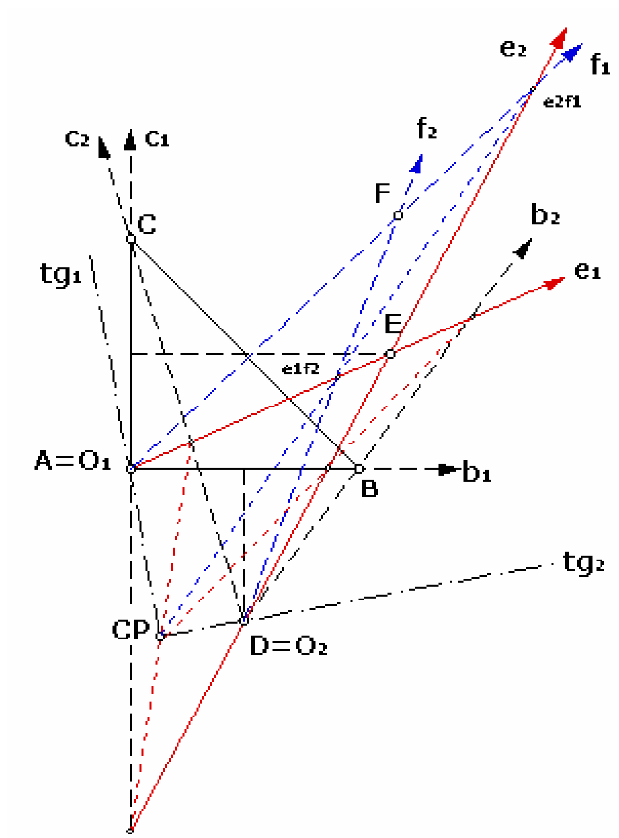
4.- Para determinar CP se uninen puntos correspondientes de las alineaciones e1 y e2, es decir e1d2 con e2d1 y e1c2 con e2c1.



5.- Para determinar un punto de la cónica trazo desde el vértice O1 un rayo arbitrario f1 y determino donde se corta con e2, luego uno e2f1 con CP y donde esta recta corte a la al rayo e1 tendré el punto e1f2.
dará un punto F que pertenece a la cónica pedida.




6.- Determino la posición del rayo f2 al unir O2 con e1f2. La intersección de f1 con f2 nos



7.- Continuar sacando puntos a través de la intersección de rayos correspondientes que nacen de dos vértices de haces en situación proyectiva dará origen a una cónica, que en este caso será una elipse, como se indica a continuación.