UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE ARQUITECTURA Y URBANISMO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA CONSTRUCCIÓN

ASIGNATURA	: MATEMATICAS	MATERIAL DE APOYO
NIVEL	: 1er. AÑO	PROF. L. ALTIMIRAS R.
CARRERA	: ARQUITECTURA	M.E. HUMERES
AÑO	: 2008	AYUD. C. ESCOBEDO C.
		M.GALAZ L.

UNIDAD : GEOMETRIA ANALITICA PLANA

FORMULAS IMPORTANTES

1.- CIRCUNFERENCIA

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$; Centro $= C(h,k)$; radio $= r > 0$

2.- PARABOLA

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$; eje focal // al eje X ; Vértice $= V(h,k)$

a) si $p > 0$, la curva se abre hacia la derecha

b) si $p < 0$, la curva se abre hacia la izquierda

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$; eje focal // al eje Y ; Vértice $= V(h,k)$

a) si $p > 0$, la curva se abre hacia arriba

b) si $p < 0$; la curva se abre hacia abajo

3.- ELIPSE

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$; $a > b$; $a > c$; eje focal // al eje X ; $C(h,k)$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$; $a > b$; $a > c$; eje focal // al eje Y ; $C(h,k)$

4.- HIPÉRBOLA

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$; $c > a$; eje focal // al eje X ; $C(h,k)$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$; $c > a$; eje focal // al eje Y ; $C(h,k)$

5.- ECUACION GENERAL DE SEGUNDO GRADO

$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$

PUEDE representar una :

d) Hipérbola si $A \neq B$ y $AB < 0$

La certeza del lugar geométrico se tiene cuando es factible reducirla a la forma ordinaria de la ecuación de la cónica ; puesto que también dicha ecuación puede representar otro lugar geométrico tal como : un punto, una recta, dos rectas oblicuas o un lugar geométrico no real.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Compruebe que la recta que pasa por los puntos A(3 , 7) y B(-1 , 1) es perpendicular a la recta determinada por los puntos C(-2 , 5) y D(4 , 1).

2. Escriba la ecuación de la recta que satisface las siguientes condiciones:

   a) tiene pendiente $m = 2$ y pasa por P(-2 , 3)

   b) pasa por los puntos P(2 , 3) y Q(5 , 4)

   c) corta al eje X en A(-2 , 0) y al eje Y en B(0 , 5)

   Grafique cada una de ellas

3. Hallar la ecuación de la simetral del segmento que une los puntos P(-3 , 2) y Q(1 , 6).

4. Una recta pasa por el punto P(7 , 8) y es paralela a la recta que pasa por los puntos A(-2 , 2) y B(3 , -4). Hallar su ecuación.

5. Demuestre de dos formas distintas que los puntos P(-5 , 2) ; Q(1 , 4) y R(4 , 5) son colineales.

6. Los vértices de un triángulo son A(-2 , 1) ; B(4 , 7) y c(6 , -3) . Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el vértice B y trisectan el lado opuesto $\overline{AC}$.

7. Hallar los vértices del triángulo formado por las rectas que pasan por los vértices A(-2 , 1) ; B(4 , 7) y C(6 , -3) y son paralelas a los lados opuestos.

8. Hallar la ecuación general de la recta que pasa por P(-1 , -3) y es perpendicular a la recta $L : 3x - 4y + 11 = 0$.

9. Determinar el valor de k para que la recta $k^2x + (k + 1)y + 3 = 0$ sea perpendicular a la recta $3x - 2y - 11 = 0$.

10. Hallar el valor de k para que la recta $kx + (k - 1)y - 18 = 0$ sea paralela a la recta $4x + 3y + 7 = 0$.

11. Demostrar que la recta que pasa por los puntos A(4 , -1) y B(7 , 2) bisecta al segmento cuyos extremos son C(8 , -3) y D(-4 , -3).

12. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(3 , 1) y tal que la distancia de ésta recta al punto Q(-1 , 1) sea igual a $2\sqrt{2}$ unidades. (dos soluciones).

15. Los vértices de un cuadrilátero son $A(0, 0)$; $B(2, 4)$; $C(6, 7)$ y $D(8, 0)$. Hallar las ecuaciones de sus lados.

16. Hallar la ecuación de la simetral del segmento que los ejes coordenados determinan en la recta $5x + 3y - 15 = 0$.

17. Determinar el valor de k para que la recta $4x + 5y + k = 0$ forme con los ejes coordenados un triángulo rectángulo de área igual a $\frac{5}{2}$ (u^2).

18. Hallar la ecuación simétrica de la recta que pasa por los puntos $A(-3, -1)$ y $B(2, -6)$.

19. Encuentre, si es que existe, el punto de intersección de los siguientes pares de rectas:

a) $2x + y = 5$; $3x - y = 5$

b) $5x + 2y - 6 = 0$; $6x + 3y = 8$

c) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 5$; $\frac{x}{5} + 3y = -7$

20. Determine si los siguientes pares de rectas son o no paralelas:

a) $2x + y = -7$; $2x + 4y = 4$

b) $4x - y = -7$; $3y = 8 + 12x$

21. Demostrar que las rectas L_1 , L_2 y L_3 son concurrentes y calcule el punto de concurrencia:

L_1 : $5x + 3y - 7 = 0$; L_2 : $3x - 4y - 10 = 0$; L_3 : $x + 2y = 0$

22. Hallar la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo definido por las rectas L_1 : $3x + 4y - 1 = 0$; L_2 : $5x + 12y - 2 = 0$

23. Determinar los valores de a y b de tal manera que la recta de ecuación $(2a - b + 5)x + (a + 3b - 2)y + 2a + 7b + 19 = 0$ sea paralela al eje Y y corte al eje X a una distancia de 5 unidades del origen. Escriba la ecuación de dicha recta.

24. Las ecuaciones de los lados de un cuadrilátero son :

L_1 : $3x - 8y + 36 = 0$ L_2 : $x + y - 10 = 0$
L_3 : $3x - 8y - 19 = 0$ L_4 : $x + y + 1 = 0$

(a) Demostrar que el cuadrilátero es un paralelógramo
(b) Determinar las coordenadas de sus vértices

25. Encontrar las ecuaciones de las diagonales del paralelógramo cuyos lados tienen por ecuación $x - a = 0$, $x - b = 0$, $y - c = 0$, $y - d = 0$ (considere el paralelógramo en el primer cuadrante)

26. Encontrar la ecuación del **Lugar Geométrico** de un punto que se mueve de tal manera que:

(d) su distancia a la recta $4x - 3y + 12 = 0$ es siempre igual al doble de su distancia al eje X

(e) su ordenada es siempre igual a su abscisa incrementada en 2

(f) su distancia al punto (3,1) es siempre igual a la mitad de su distancia al eje Y

(g) la diferencia de sus distancias a los puntos (0,3) y (0 , -3) es siempre igual a 4

27.- Reduciendo a la forma ordinaria, determinar si las siguientes ecuaciones de segundo grado representan o no una circunferencia. En caso afirmativo, determinar su centro y radio.

a) $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$

c) $3x^2 + 3y^2 + 24x - 6y + 51 = 0$

28.- Encontrar la ecuación de la circunferencia que :

a) pasa por los puntos P(4 , -2) , Q(-5 , 1) y R(2 , 2)

b) pasa por A(-3 , 3) , B(1 , 4) y su centro está en la recta L : $3x - 2y - 23 = 0$.

29.- Determinar el o los puntos de intersección de las circunferencias de ecuación $x^2 + y^2 = 2x + 2y$; $x^2 + y^2 + 2x = 4$

30.- Demostrar que las circunferencias $x^2 + y^2 - 12x - 9y + 50 = 0$; $x^2 + y^2 - 25 = 0$ son tangentes.

31.- Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por P(-2 , 4) y tiene el mismo centro que la representada por la ecuación $x^2 + y^2 - 5x + 4y - 1 = 0$

32.- Para la circunferencia de ecuación $25x^2 + 25y^2 + 30x - 20y - 62 = 0$, calcular su longitud.

33.- Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por P(1 , 4) y es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$ en el punto Q(-2 , 1).

34.- Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - y - 44 = 0$ en el punto P(4 , 5)

35.- Desde el punto P(11 , 4) se trazan tangentes a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$. Hallar la ecuación de dichas tangentes.

36.- Una circunferencia de radio 5 es tangente a la recta L : $3x - 4y - 1 = 0$ en el punto P(3 , 2). Hallar su ecuación.

37.- Una circunferencia de radio 5 pasa por los puntos P(0 , 2) y Q(7 , 3). Hallar su ecuación.

38.- Determinar la ecuación de la circunferencia de radio $\sqrt{13}$, que es tangente a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 47 = 0$ en el punto P(6 , 5).

a) $x^2 + 2y = 0$; b) $y^2 + 8y = 0$; c) $x^2 + 16y = 0$

41.- Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos (3 , -2) y (3 , -8) , respectivamente. Hallar también la ecuación de su eje focal y de su directriz.

42.- Una recta que pasa por el foco de la parábola $x^2 = -12y$, corta al lugar geométrico en el punto (5 , -25/12). Encontrar el otro punto de intersección entre la recta y la parábola.

43.- Determinar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos P(-1 , 2) , Q(1 , -1) y R(2 , 1) y tiene su eje focal paralelo al eje X.

44.- Calcular la longitud de la cuerda focal de la parábola $x^2 + 8y = 0$ que es paralela a la recta $3x + 4y - 7 = 0$

45.- La directriz de una parábola es la recta $y - 1 = 0$ y su foco está en el punto (4 , -3). Hallar su ecuación.

46.- Un arco parabólico tiene una altura de 10 m. y un ancho de 18 m. en la base. Si el vértice de la parábola está en la parte superior del arco ¿ A qué altura, sobre su base, tiene un ancho de 9 m.?

47.- Un arco en forma parabólica con eje vertical mide 29 pies de luz y 8 pies de altura máxima sobre su base. ¿ Qué longitud tendrá una viga colocada horizontalmente a través del arco, a una distancia de 4 pies de su cúspide ?

48.- Las dos torres de un puente colgante están separadas por una distancia de 300 pies y tienen una altura de 80 pies sobre la superficie del camino. Si el cable es tangente al camino en el centro del puente ; encontrar la altura del cable sobre el camino a 50 pies y a 100 pies del centro del puente. (Suponga que el camino es horizontal).

49.- Hallar la ecuación de la elipse de centro (0 , 0) ; eje focal el eje X y que pasa por los puntos ($\sqrt{6}$, -1) y (2 , $\sqrt{2}$). Graficar.

50.- Los vértices de una elipse son V_1(-5 , 2) y V_2(3 , 2). Si la longitud de cada lado recto es 1 (u); encontrar la ecuación de la elipse.

51.- Hallar la ecuación de la elipse que pasa por ($\frac{\sqrt{7}}{2}$, 3), tiene su centro en el origen, su eje menor coincide con el eje X y la longitud de su eje mayor es el doble de la de su eje menor.

52.- Determinar la ecuación de la elipse cuyos vértices son V_1(-3 , 2) ; V_2(5 , 2), si los semiejes mayor y menor miden 4 (u) y 1 (u), respectivamente.

53.- Determinar las ecuaciones de las dos hipérbolas cuyo centro está en (2 , -1) y cuyos semiejes paralelos a los ejes coordenados tienen longitudes 1 (u) y 4 (u), respectivamente.

54.- Determinar la ecuación de la hipérbola cuyo centro está en (2 , -2); uno de los vértices es el punto (0 , -2) y sus lados rectos miden 8 (u). Determinar además, la longitud del eje conjugado y su excentricidad.

55.- Determinar la ecuación de la hipérbola cuyo centro está en el punto (-2 , 1), tiene sus ejes paralelos a los coordenados y pasa por los puntos P_1(0 , 2) y P_2(1 , -4).

57.- Dadas las siguientes ecuaciones generales de segundo grado ; identifique el lugar geométrico que representan y, cuando corresponda, determine los elementos principales. Grafique.

a) $x^2 - 3x + 2y - 4 = 0$

b) $y = (x - 1)(x + 2)$

c) $4x^2 = 3y^2 - 12y + 24$

d) $4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 7 = 0$

e) $49y^2 - 4x^2 + 98y - 48x = 291$

f) $4x^2 + y^2 + 8x - 4y = 8$

g) $5x^2 + 2y^2 - 10x + 4y + 7 = 0$

h) $9x^2 - 4y^2 + 18x + 16y - 43 = 0$

i) $16x^2 + 25y^2 + 160x + 200y = -400$

j) $3x^2 + 2y^2 + 4y - 26 = 0$

58.- Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por el vértice y por los puntos extremos del lado recto de la parábola $x^2 = -8y$.

59.- Una cuerda de la parábola $y^2 - 4x = 0$ es un segmento de la recta de ecuación $x - 2y + 3 = 0$. Calcular su longitud.

RESPUESTA A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- $m\overline{AB} = \frac{3}{2}$; $m\overline{CD} = \frac{-2}{3}$ $\therefore$ $L_1 \perp L_2$

2.- a) $2x - y + 7 = 0$; b) $x - 3y + 7 = 0$ c) $5x - 2y + 10 = 0$

3.- $x + y - 3 = 0$ 4.- $6x + 5y - 82 = 0$

5.- Debe hacer demostración

6.- $11x - 5y - 9 = 0$; $13x - y - 45 = 0$

7.- $(-4, 11)$; $(12, 3)$; $(0, -9)$

8.- $4x + 3y + 13 = 0$ 9.- $k_1 = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}$; $k_2 = \frac{1 - \sqrt{7}}{3}$

10.- $k = 4$ 11.- Debe hacer demostración

12.- $x + y - 4 = 0$; $y - x + 2 = 0$

13.- $k_1 = \frac{3\sqrt{5}}{2}$; $k_2 = -\frac{3\sqrt{5}}{2}$

16.- $3x - 5y + 8 = 0$ 17.- $k = 10$ 18.- $\frac{x}{-4} + \frac{y}{-4} = 1$

19.- a) $(2, 1)$; b) $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$; c) $\left(\frac{185}{9}, \frac{-100}{27}\right)$

20.- a) no son paralelas ; b) si son paralelas 21). punto de concurrencia $(2, -1)$

22.- $7{,}4224x + 16y - 2{,}8556 = 0$; $\angle$ inclinación bisectriz $= 155{,}1113°$

23.- $a = -4$; $b = 2$; ec. Recta $x = 5$

24 .- $L_1 \cap L_4 = A(-4, 3)$ $L_4 \cap L_3 = B(1, -2)$
$L_3 \cap L_2 = C(9, 1)$ $L_1 \cap L_2 = D(4, 6)$

25.- Ec. d_1 : $(c - d)x + (b - a)y + ad - bc = 0$
Ec . d_2 : $(c - d)x + (a - b)y + bd - ac = 0$

26.- (a) $x^2 - 8y = 0$ (b) $8x + 10y + 3 = 0$

(c) $x^2 + y^2 + x - 7y + 12 = 0$ (d) $4x + 7y + 12 = 0$; $4x - 13y + 12 = 0$

(e) $y - x - 2 = 0$ (f) $3x^2 + 4y^2 - 24x - 8y + 40 = 0$

(g) $4x^2 - 5y^2 + 20 = 0$

27.- a) Circunferencia $C\left(\frac{3}{2}, \frac{-5}{2}\right)$; $r = \sqrt{5}$

b) Circunferencia $C(1 . -2)$; $r = \sqrt{3}$ c) Punto aislado $P(-4, 1)$

28.- a) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$ b) $(x - 2)^2 + \left(y + \frac{17}{2}\right)^2 = \frac{629}{4}$

29.- $P_1(0, 2)$; $P_2\left(\frac{6}{5}, \frac{-2}{5}\right)$ 31.- $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 = \frac{225}{4}$

32- Longitud de la circunferencia $= 2\sqrt{3}\,\pi$ 33.- $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$

34.- Ecuación tangente: $10x + 9y - 85 = 0$

35.- Ecuaciones tangentes: $3x + 4y - 49 = 0$; $4x - 3y - 32 = 0$

36.- (2 soluc.): $x^2 + (y - 6)^2 = 25$; $(x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 25$

37.- (2 soluc.): $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$; $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 25$

38.- (2 soluc.): $(x - 8)^2 + (y - 8)^2 = 13$; $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 13$

39.- $(x - 1)^2 = -8(y - 2)$ 40.- a) $F\left(0, \frac{-1}{2}\right)$ ec. Directriz: $y = \frac{1}{2}$
b) $F(-2, 0)$ ec. Directriz $x = 2$ c) $F(0, -4)$ ec. Directriz $y = 4$

41.- $(x - 3)^2 = -24(y + 2)$; ec. Directriz: $y = 4$; ec. Eje focal $x = 3$

42.- $\left(\frac{-36}{5}, \frac{-108}{25}\right)$ 43.- $7y^2 - 3y + 6x - 16 = 0$

49.- $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

50.- $\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{2} = 1$

51.- $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

52.- $\frac{(x-1)^2}{16} + (y-2)^2 = 1$

53.- $16(x-2)^2 - (y+1)^2 = \pm 16$

54.- $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{8} = 1$; $2b = 4\sqrt{2}$
$e = \sqrt{3}$

55.- $24(x+2)^2 - 5(y-1)^2 = 91$

56.- $(y+2)^2 - \frac{(x+5)^2}{4} = 1$

57.- a) parábola ; eje // eje Y ; $V(\frac{3}{2}, \frac{25}{8})$; $F(\frac{3}{2}, \frac{21}{8})$; $p = \frac{-1}{2}$

b) parábola ; eje // eje Y ; $V(\frac{-1}{2}, \frac{-9}{4})$; $F(\frac{-1}{2}, -2)$; $p = \frac{1}{4}$

c) hipérbola ; eje // eje X ; C(0 , 2) ; $a = \sqrt{3}$; b = 2 ; $c = \sqrt{7}$

d) elipse ; eje // eje X ; C(1 , -2) ; a = 1 ; $b = \frac{1}{2}$; $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$

e) hipérbola ; eje // eje Y ; C(-6 , -1) ; a = 2 ; b = 7 ; $c = \sqrt{53}$

f) elipse ; eje // eje X ; C(-1 , 2) ; a = 4 ; b = 2 ; $c = \sqrt{12}$

g) punto aislado P(1 , -1)

h) hipérbola ; eje // eje X ; C(-1 , 2) ; a = 2 ; b = 3 ; $c = \sqrt{13}$

i) elipse ; eje // eje X ; C(-5 , -4) ; a = 5 ; b = 4 ; c = 3

j) elipse ; eje // eje Y ; C(0 , -1) ; $a = \sqrt{14}$; $b = \sqrt{\frac{28}{3}}$; $c = \sqrt{\frac{14}{3}}$

58.- $x^2 + y^2 + 10y = 0$

59.- longitud cuerda = $4\sqrt{5}$ (u).