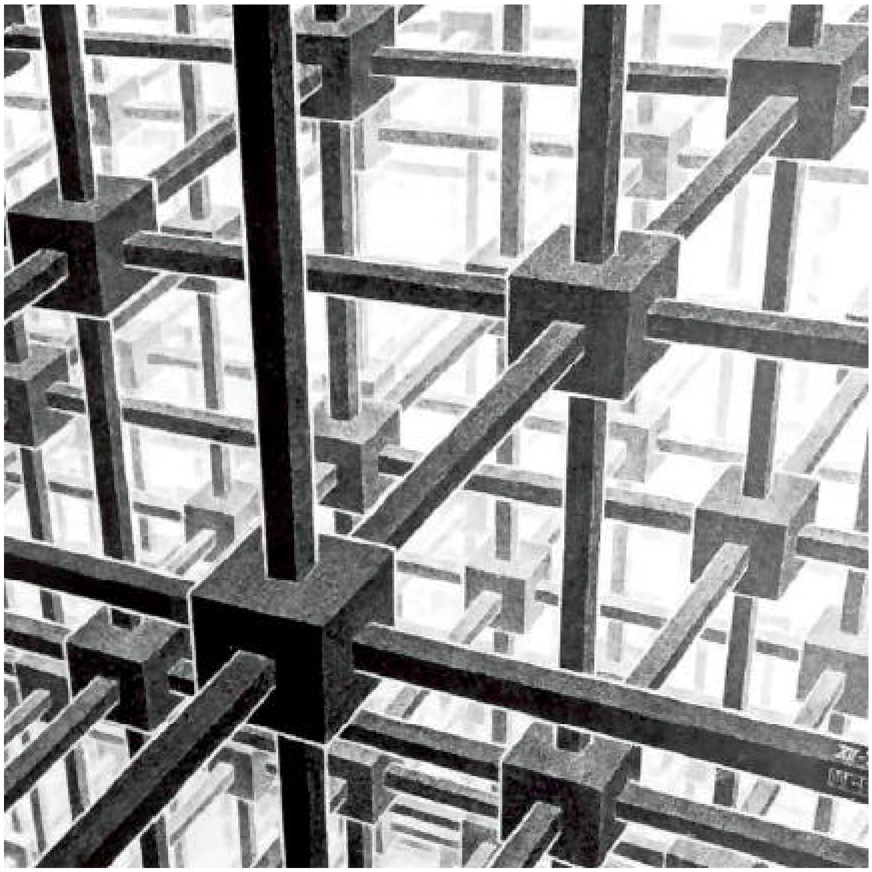


METODO DE CROSS

Materia: Estructura II

Folio: EST 2-03

Fecha: Noviembre/2000

Autores: Arqto. Isabel M. Zúñiga Lamarque
Arqto. Jing Chang Lou

INTRODUCCION

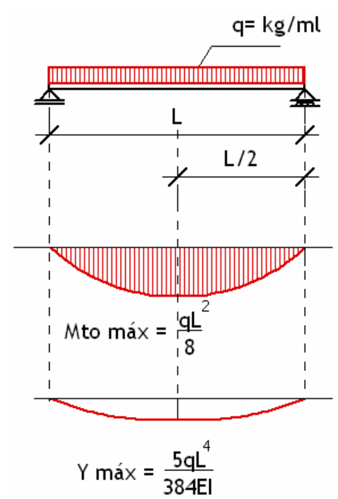
El poder entender y manejar el conocimiento de los modelos estructurales requiere contar con herramientas que nos permitan evaluar las tensiones que se generan en los elementos componentes del sistema.

Estas herramientas de evaluación se basan en modelos físicos, que se establecen sobre esos elementos y que buscan representar los fenómenos tensionales (comportamiento tensional, deformaciones) mediante procedimientos y ecuaciones matemáticas. La importancia de contar con estas herramientas, para nosotros como arquitectos o estudiantes de arquitectura, radica en

1. Los métodos y ecuaciones matemáticas con que se mide un fenómeno, contienen en su formulación. las variables que intervienen en éste la medida o proporción en que participan o influyen en el fenómeno. Por lo tanto, es la herramienta que nos otorga una comprensión de cómo funciona ese fenómeno y nos dice cómo intervenir y modificarlo en función de los requerimientos.

He aquí algunos ejemplos que ilustran este punto.

Un viga simplemente apoyada, con carga uniformemente repartida “q” y luz “l”

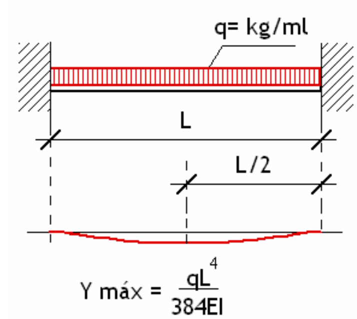


Si observamos los valores dados de Momento Máximo y de Flecha Máxima, vemos que la luz influye en el cuadrado de su valor en las tensiones de la viga, y a la cuarta en la deformación de ésta.

Es fácil concluir que a medida que la luz crece, la deformación de la viga aumenta en mayor proporción que sus tensiones.

Por otra parte, también es posible afirmar, que en la medida que la carga aumenta, el problema de tensiones y el de deformaciones en la viga, se incrementa en la misma proporción.

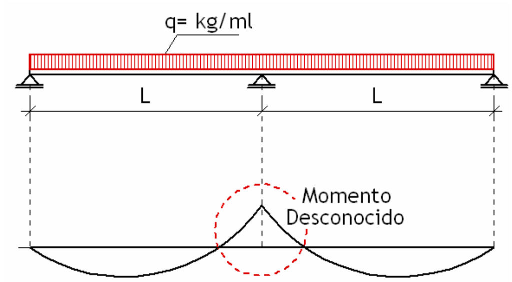
Si esa misma viga se empotra en sus apoyos (por ejemplo conectándola en cada uno de estos con un par de pernos adecuadamente dimensionados) la fórmula que representa el valor de la flecha máxima, nos muestra que la deformación disminuirá a la quinta parte, con respecto a la deformación original. (fig. 2)



Este tipo de conclusiones, que lo podemos obtener en todos los niveles de análisis estructural, desde el diseño de un conector, al análisis y dimensionamiento de un elemento del sistema o al análisis del modelo estructural como un todo, nos ira proporcionando los criterios que como arquitectos necesitamos para enfrentar nuestros proyectos.

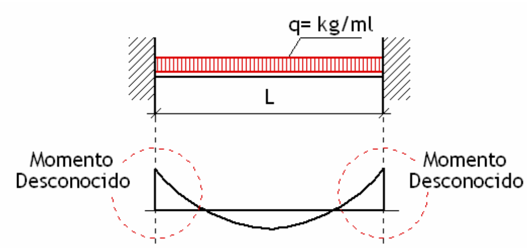
2. Por otra parte, el contar con estas herramientas - que en muchos casos son simplificaciones del fenómeno o aproximaciones a la realidad - nos permite hacer una evaluación con miras a un predimensionamiento o a establecer la factibilidad de nuestras proposiciones.

En el estudio de las estructuras hiperestáticas, debemos recurrir al estudio de las deformaciones de los elementos para poder llegar a conocer las tensiones que los solicitan. A partir de dichas deformaciones, se llegan a establecer sistemas de análisis como es el caso de los Teoremas de Clapeyron, o de los Tres y Cuatro Momentos.



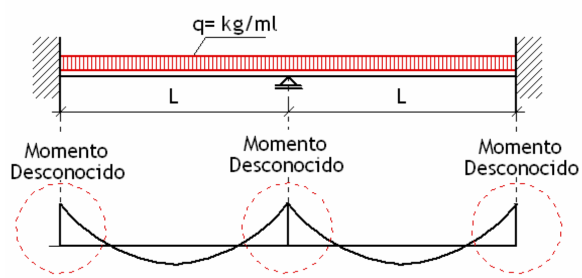
Este método nos permite determinar el valor de los momentos en los nudos o apoyos de elementos hiperestáticos, como lo son las vigas empotradas, las vigas continuas, las losas y los marcos rígidos. Para esto, es necesario establecer en cada nudo, una ecuación por cada momento desconocido.

El asunto es que al aplicar Clapeyron al modelo, se establecen relaciones entre dichos momentos, lo que genera ecuaciones con tres o cuatro incógnitas, según sea la conformación de los nudos.



Finalmente, los resultado se obtienen resolviendo sistemas de ecuaciones, lo que resulta muy tedioso cuando las incógnitas son varias.

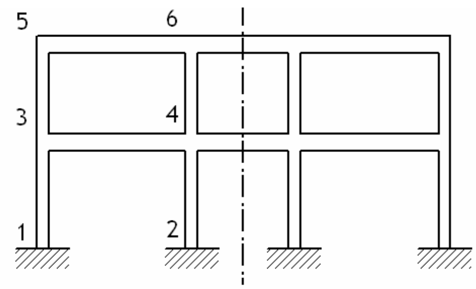
En el ejemplo de la figura 3, sólo hay una incógnita y el aplicar Clapeyron resulta eficiente ya que sólo deberemos resolver una ecuación.



En la viga empotrada de la figura 4, también las incógnitas se reducen a una, por la simetría del modelo.

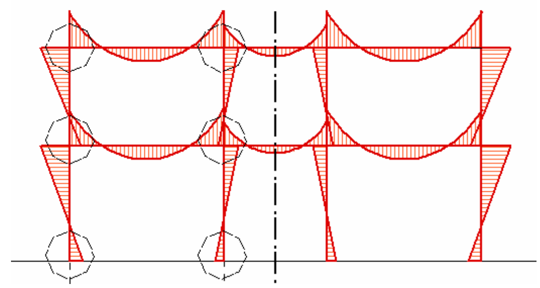
La viga de dos tramos de la figura 5 se resolverá con un sistema de dos ecuaciones, si es simétrica, y de tres si no lo es.

En cambio. el marco de dos pisos y 3 naves. de la figura 6. a pesar de la simetría que reduce las incógnitas a la mitad. tiene una incógnita en los nudos 1 - 2 – 5, tres incógnitas en los nudos 3 - 6, y cuatro incógnitas en el nudo 4, con un total de trece incógnitas, que deberán resolverse con un sistema de trece ecuaciones.



Este caso y muchos otros que enfrentaremos en nuestros diseños, que cuentan con gran cantidad de incógnitas, hace indispensable el contar con otra herramienta que facilite su resolución.

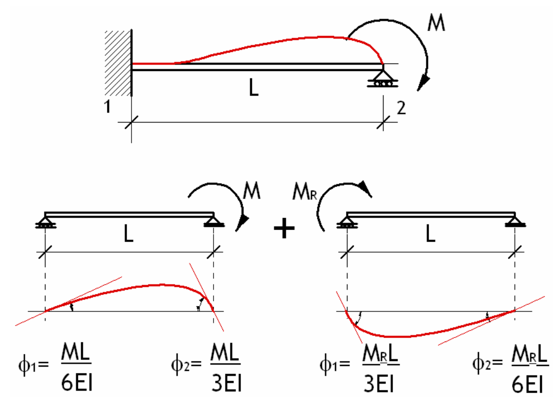
Esta herramienta es el método de Cross, que podrá ser aplicado tanto en vigas, como en losas o marcos, con una o muchas incógnitas, pero evidentemente, cómo se comprobara a medida de que se plantee el método y se desarrollen ejemplos, Clapeyron seguirá, siendo más practico, en el caso de pocas incógnitas y Cross resultará irreemplazable, como herramienta "manual", en caso contrario.



ANTECEDENTES PREVIOS

1) COEFICIENTE DE TRASPASO

En una barra empotrada-rotulada, se aplica un momento "**M**" en el extremo que puede girar. En el extremo contrario (el empotramiento) se genera un momento de respuesta "M_R" tal que el ángulo ϕ_1 en dicho apoyo es igual a cero



$$\phi_1 = 0$$

La deformación angular (rotación), es originada por "M"., es anulada al llegar al empotramiento por "M_R", tal que:

$$\phi_1(M) - \phi_1(M_R) = 0$$

$$\frac{ML}{6EI} - \frac{M_R L}{3EI} = 0$$

por lo tanto:

$$M_R = \frac{M}{2}$$

Conclusiones

1. Cada vez que en una barra rotulada-empotrada, apliquemos un momento en el extremo rotulado, éste afectará al extremo empotrado en el que se producirá un momento de igual sentido que el momento original y con la mitad de su magnitud.

2. Por otra parte, en el extremo rotulado, el valor del ángulo será:

   $$\phi_2 = \frac{ML}{3EI} - \frac{M_R L}{6EI} \quad \text{siendo:} \quad M_R = \frac{M}{2} \quad \text{tenemos:}$$

   $$\phi_2 = \frac{ML}{3EI} - \frac{ML}{12EI}$$

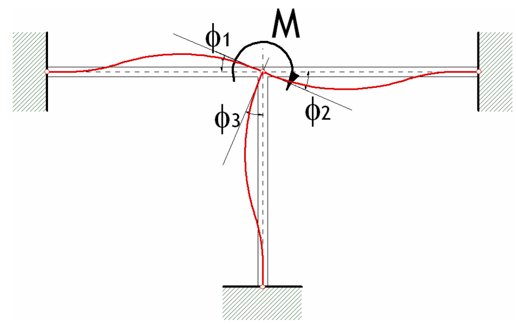
   por lo tanto: $\phi_2 = \frac{ML}{4EI}$

   Este valor lo usaremos en la siguiente demostración

2) Rigidez y Coeficientes de Distribución

Al aplicar un momento a un nudo rígido, este gira tal que:

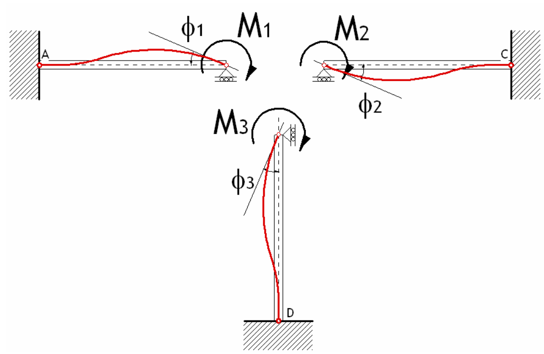
$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 \qquad (1)$$



Por otra parte, cada una de las barras se hace cargo de una parte del momento solicitante para equilibrarlo, siendo

$$M_1 + M_2 + M_3 = M\,. \qquad (2)$$

De acuerdo al valor de ángulo establecido en la deducción. anterior



$$\phi_1 = \frac{M_1 L_1}{4EI} \qquad \phi_2 = \frac{M_2 L_2}{4EI} \qquad \phi_3 = \frac{M_3 L_3}{4EI}$$

En esta relación, la deformación angular ϕ, es directamente proporcional al momento solicitante "M" y a la capacidad de deformarse de la barra, o flexibilidad L/4EI

Llamaremos "f" a la flexibilidad de la barra y rigidez a su valor inverso: k = 1/f

Siendo 4 un valor constante, podemos simplificar esa expresión, trabajando con un coeficiente de rigidez k = EI/L o, simplemente K = I/L, ya que lo usual es que todas las barras del nudo sean de la misma materialidad y esta se expresa en el coeficiente de elasticidad E.

De esta forma, el valor de los ángulos o giros de las barras serán

$$\phi_1 = \frac{M_1}{k_1} \qquad \phi_2 = \frac{M_2}{k_2} \qquad \phi_3 = \frac{M_3}{k_3} \qquad (3)$$

y combinando (1) con (3)

$$\frac{M_1}{k_1} = \frac{M_2}{k_2} = \frac{M_3}{k_3} \qquad (4)$$

Expresaremos todos los momentos en función de M_1:

$$M_2 = \frac{M_1\, k_2}{k_1} \qquad M_3 = \frac{M_1\, k_3}{k_1}$$

y reemplazaremos en (2)

$$M = \frac{M_1}{k_1} + \frac{M_1\ k_2}{k_1} + \frac{M_1\ k_3}{k_1}$$

desarrollando esta expresión

$$M = \frac{M_1 + M_1\ k_2 + M_1\ k_3}{k_1}$$

$$M = \frac{M_1 (k_1 + k_2 + k_3)}{k_1}$$

por lo tanto

$$M_1 = \frac{k_1}{(k_1 + k_2 + k_3)} * M$$

$$M_2 = \frac{k_2}{(k_1 + k_2 + k_3)} * M$$

$$M_3 = \frac{k_3}{(k_1 + k_2 + k_3)} * M$$

Conclusiones

1. Al aplicar un momento en un nudo rígido éste será equilibrado por todas las barras que concurren al nudo, en proporción de sus rigideces EI/L o 1/L.

2. Podemos determinar un "coeficiente de distribución", para la participación de cada una de las barras concurrentes al nudo, tal que

$$cd_1 = \frac{k_1}{k_1 + k_2 + k_3}$$

generalizando $cd_1 = \dfrac{k_1}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}$

ó $cd_1 = \dfrac{k_1}{\Sigma k}$ $\quad cd_2 = \dfrac{k_2}{\Sigma k}$ $\quad cd_3 = \dfrac{k_3}{\Sigma k}$ $\quad$ etc.

EL METODO

1. Se inicia el método considerando que todos los nudos del entramado son absolutamente rígidos, quedando las barras totalmente incomunicadas entre ellas ya que cada una tendría en su extremo un empotramiento perfecto.

   Esto significa . que las barras que poseen cargas, generarán en sus extremos pares de empotramiento perfecto, que deberán ser calculados para aplicar el método.

2. A continuación, se soltará nudo por nudo, de uno a la vez. dejando congelados los demás nudos y permitiendo que las barras de dicho nudo, entre las que hay continuidad, interactúen.

   Si en el nudo hay momentos, este girará, y dicho giro deberá ser equilibrado por las barras que concurren al nudo. Se produce así, una interacción entre las barras que llegan al nudo y una distribución de los esfuerzos (momentos) en función de las rigideces de los elementos. (ver punto 2 de "antecedentes previos").

3. Cada barra que rotó, al asumir un momento, genera en su apoyo contrario un momento de respuesta, de igual sentido que el anterior y de la mitad del valor de este.

   Es decir, la barra asume un momento de valor “M” en el extremo que rota, y "traspasa" al otro extremo un momento de valor M/2. (ver punto 1 de "antecedentes previos").

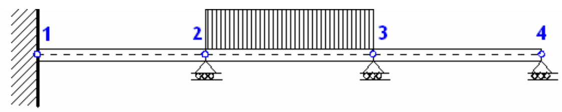
Es posible anotar inmediatamente los traspasos que se originan cada vez que equilibramos un nudo, como también, podemos "soltar y equilibrar" todos los nudos, uno por uno, y después de desarrollar una vuelta completa de equilibrios, efectuar todos los correspondientes a los apoyos contrarios.

4. Al ejecutar los traspasos, los nudos ya equilibrados se vuelven a desequilibrar y será necesario repetir el ciclo de equilibrios y traspasos.

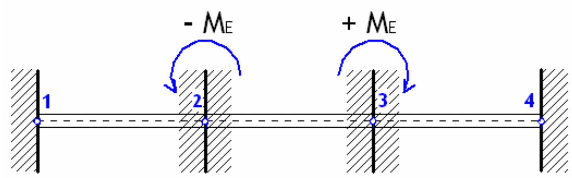
A medida de que se completa un mayor número de vueltas, los desequilibrios van disminuyendo en magnitud, y nos acercamos más a los valores reales del momento en las barras. Por eso este método es conocido también como el “de las aproximaciones sucesivas”.

Se recomienda repetir dicho ciclo las veces. que sea necesario, hasta que los desequilibrios remanentes no sean superiores al 10% del desequilibrio original de cada nudo

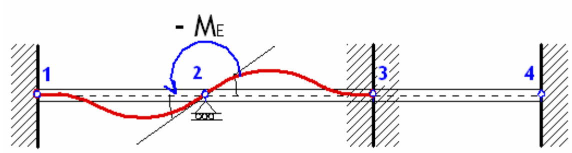
5. El valor del momento final. en los extremos de cada barra corresponde a la suma de todos los momentos que. la fueron afectando en los sucesivos ciclos de equilibrios y traspasos.



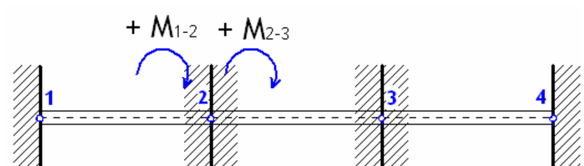
La viga y sus cargas



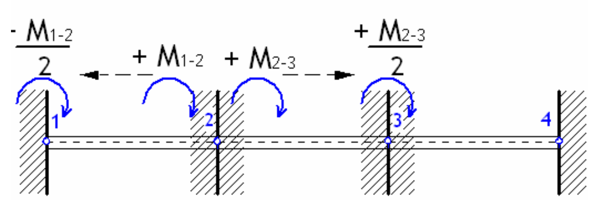
Los Momentos de empotramiento perfecto



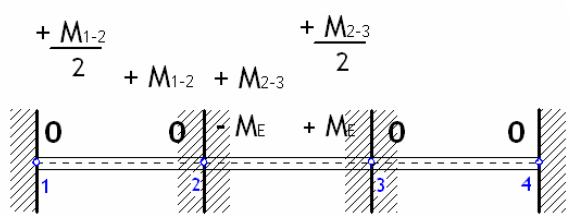
Se suelta el nudo 2 y gira debido a M_E



Las barras que concurren al nudo lo equilibran con momentos contrarios tal que: $M_{1-2} + M_{2-3} = M_E$



A los apoyos contrarios se traspasan momentos de igual sentido y la mitad del valor



Los momentos resultantes después del equilibrio y traspasos del nudo 2

PROCEDIMIENTO

Para aplicar el método, se dibuja una trama ortogonal que representa todas las barras de entramado.

Las intersecciones de líneas horizontales y verticales corresponden a los nudos y deberá anotarse en ellos, en el extremo de cada barra, su correspondiente coeficiente de distribución" en, dicho nudo.

Estos valores se encerrarán en un rectángulo. sobre el cual se ubicará el correspondiente valor de momento de empotramiento perfecto, para esa barra. en ese nudo.

La ubicación de estos valores en el nudo, por convención, será la siguiente:

Para las barras horizontales:

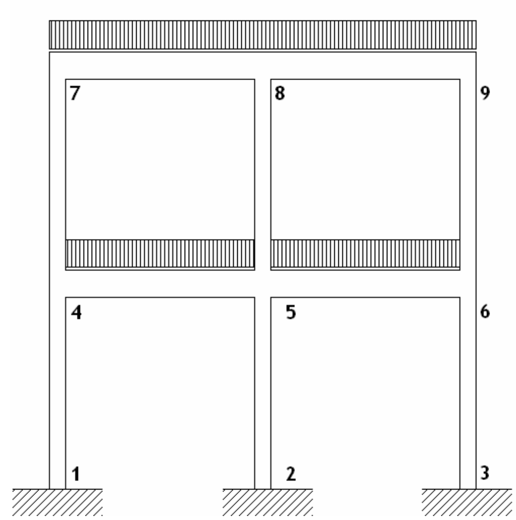
- en el apoyo izquierdo: arriba,
- en el apoyo derecho: abajo.

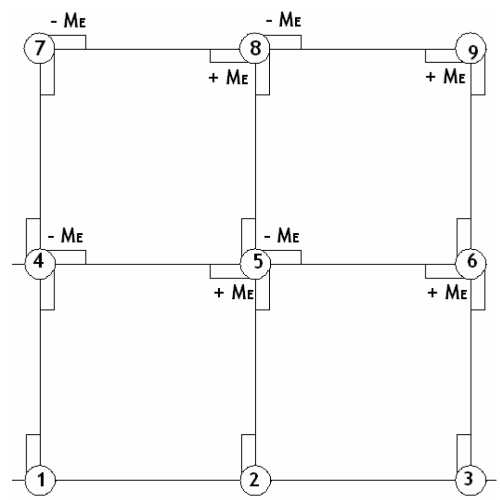
Para las barras verticales:

- en el apoyo inferior: a la izquierda
- en el apoyo superior: ala derecha.

A continuación se inician los ciclos de equilibrios y traspasos, hasta equilibrar definitivamente el nudo o al menos reducir el desequilibrio según lo recomendado.

Los valores que se van obteniendo se anotan en cada barra en una columna que se genera a partir del valor de empotramiento perfecto original, y que se cierra con la sumatoria de todos los momentos de dicha columna.

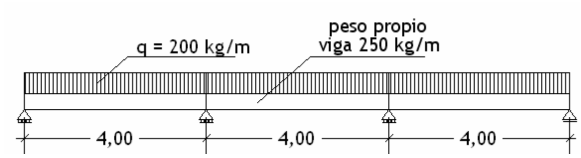




EJEMPLO 1
APLICACIÓN DEL MÉTODO DE CROSS EN LA DETERMINACIÓN DE MOMENTOS DE UNA VIGA CONTINUA, DE TRES TRAMOS.

Datos

Viga de Hormigón Armado 20/50
Peso propio viga = 250 kg ml
Carga repartida q = 200 kg/ml

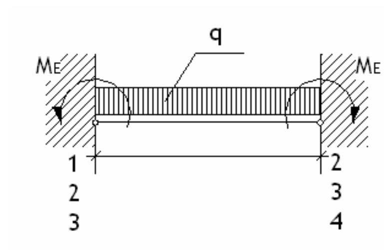


I.- ANTECEDENTES PREVIOS

1.- Cálculo Momentos de Empotramiento Perfecto

En este caso, los tres tramos tienen las mismas cargas Y luces y por lo tanto, los mismos

Momentos de Empotramiento perfecto.



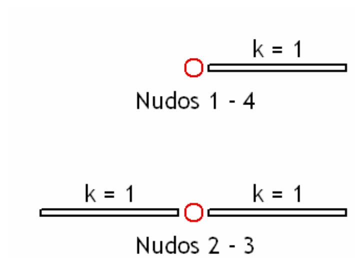
$$M_E = \frac{qL^2}{12} = \frac{(250\ \ kg + 200\ \ kg) * (4\ \ m)^2}{12} = 600\ \ kgm$$

2.- Coeficientes de Distribución por Nudo

Todas las barras tiene la misma rigidez EI/L, por lo que les asignaremos rigidez 1
Nudos 1 – 4

A los nudos 1 y 4, llega una sola barra, por lo que si:

$$cd = \frac{k}{\Sigma k} \qquad cd_{(1-2)} = cd_{(3-4)} = \frac{1}{1} = 1$$



Nudos 2 - 3

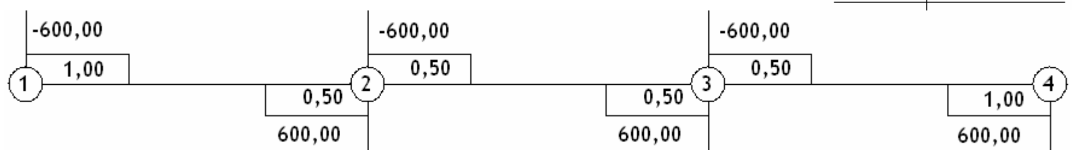
$$cd_{(2-1)} = cd_{(2-3)} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$cd_{(3-2)} = cd_{(3-4)} = \frac{1}{2} = 0,5$$

II.- DESARROLLO

Nudo	Desequilibrio
1	- 600
2	+ 600 - 600 = 0
3	+ 600 - 600 = 0
4	+ 600

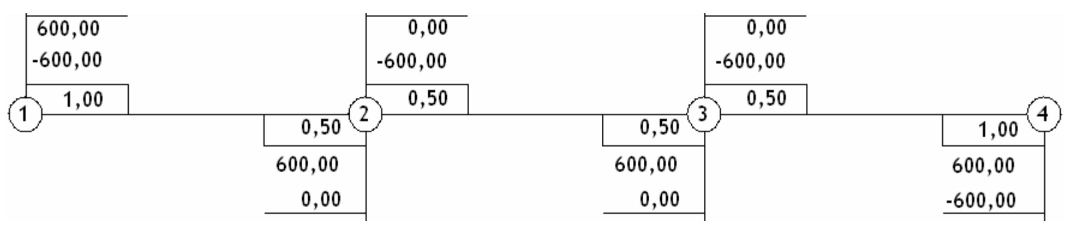
Dibujamos la malla, con los coeficientes de distribución por nudo y los momentos de empotramiento perfecto.



Obsérvese que si deshacemos el empotramiento en los nudos, los nudos 1 y 4 rotarán, debido al momento que los afecta y los desequilibra.

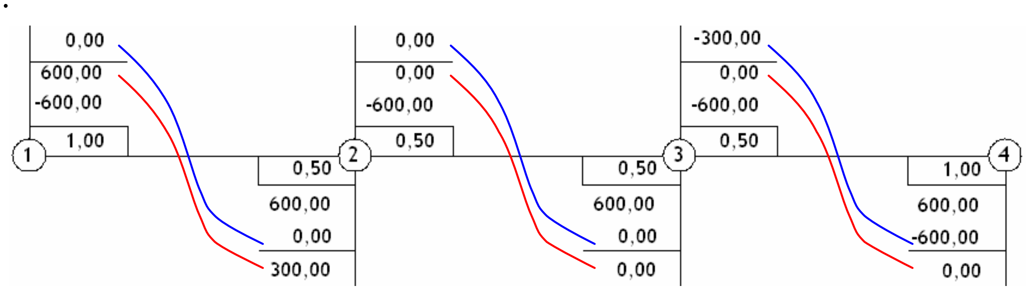
1º Vuelta de Equilibrios: Se suelta nudo por nudo (deshaciendo el empotramiento) permitiendo que el nudo gire y las barras interactúen.

En cada nudo., las barras que concurren a él reestablecen el equilibrio, aportando. un momento de igual valor Y sentido contrario. Cada barra hace su aporte en función de su correspondiente coeficiente de distribución. Así es, como en los nudos 1 y 4, la única barra del nudo aportó el total del equilibrio (+600 y -600, respectivamente). En cambio. en los nudos 2 y 3, no había desequilibrio y las barras aportaron "cero"`.



Se traza una línea horizontal, después de que cada nudo queda equilibrado y este se vuelve a "empotrar".

1ª Vuelta de Traspasos: Cada uno de los momentos aportados por las barras, generan en sus apoyos contrarios, un momento de igual sentido (signo) y la mitad de su valor.



Obviamente, las barras que no aportaron momentos, no "traspasan" momentos al apoyo contrario.

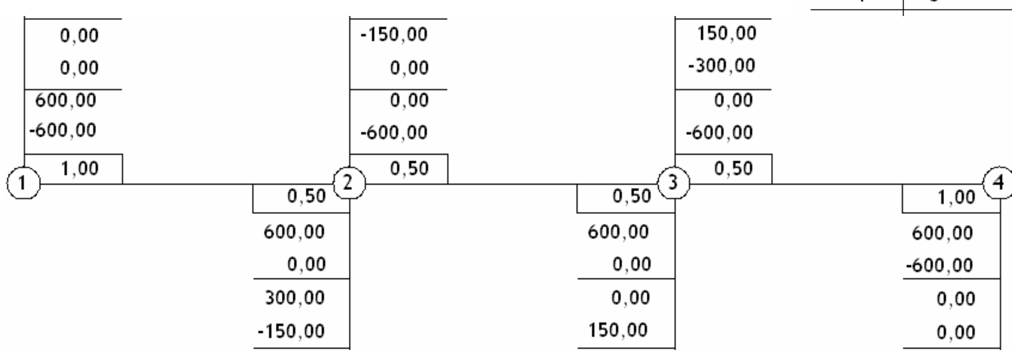
Se ha completado así, una primera vuelta o ciclo de equilibrios y traspasos.

Obsérvese que los nudos 2 y 3, después de los traspasos quedaron nuevamente desequilibrados. (Momentos que aparecen después de las líneas horizontales de equilibrio).

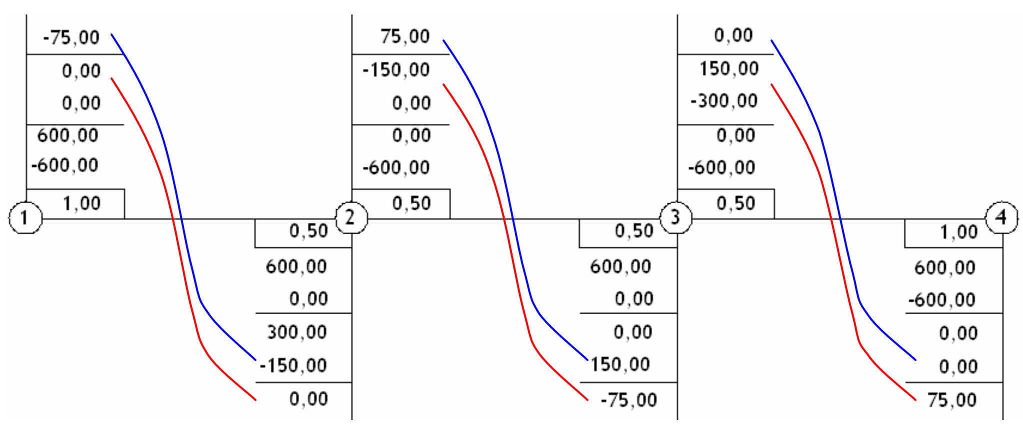
Se procederá, por lo tanto, a realizar un 2° ciclo de equilibrios y traspasos.

Nudo	Desequilibrio
1	- 600
2	+ 600 - 600 = 0
3	+ 600 - 600 = 0
4	+ 600
1	0
2	+ 300
3	- 300
4	0

2° Vuelta de Equilibrios: los nudos 1 y 4 están equilibrados. mientras que los nudos 2 y 3 tienen desequilibrios de +300 y -300. respectivamente. Se soltará nudo por nudo y los desequilibrios se equilibrarán, nuevamente, con los aportes de las barras que concurren al nudo, de acuerdo a sus coeficientes de distribución.



2ª Vuelta de Traspasos: Cada uno de los momentos aportados por las barras, generan en sus apoyos contrarios, un momento de igual sentido (signo) y la mitad de su valor.



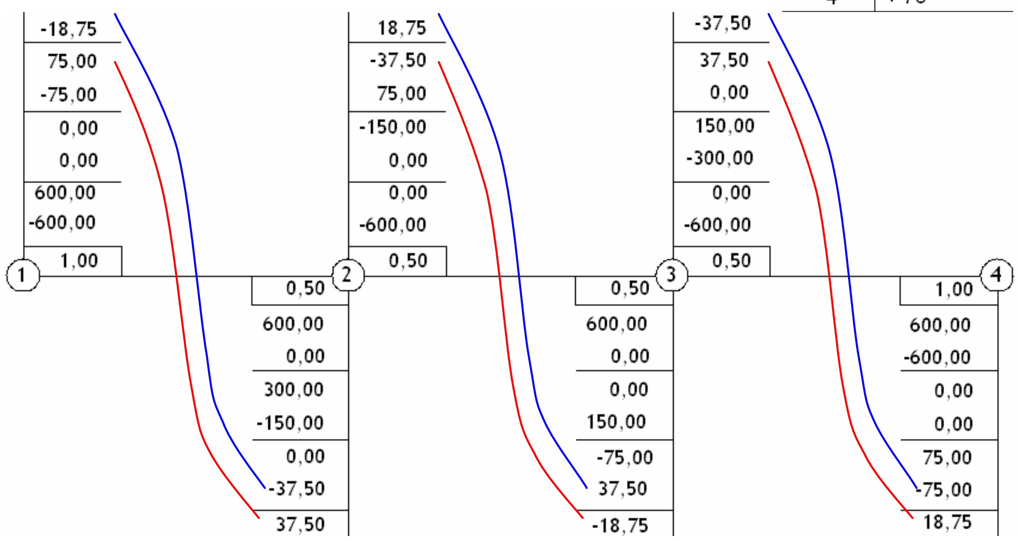
Se completa así, la segunda "vuelta" o ciclo de equilibrios y traspasos.

Todos los nudos del sistema han quedado desequilibrados.

Los desequilibrios son mayores al 10% del valor de los desequilibrios originales, por lo que se procederá a realizar una tercera vuelta.

Nudo	Desequilibrio
1	- 600
2	+ 600 - 600 = 0
3	+ 600 - 600 = 0
4	+ 600
1	0
2	+ 300
3	- 300
4	0
1	- 75
2	+ 75
3	- 75
4	+ 75

3ª Vuelta de Equilibrios y Traspasos : Se equilibran todos los nudos. uno por uno, y luego se efectúan los correspondientes traspasos a los apoyos contrarios, según se indica.



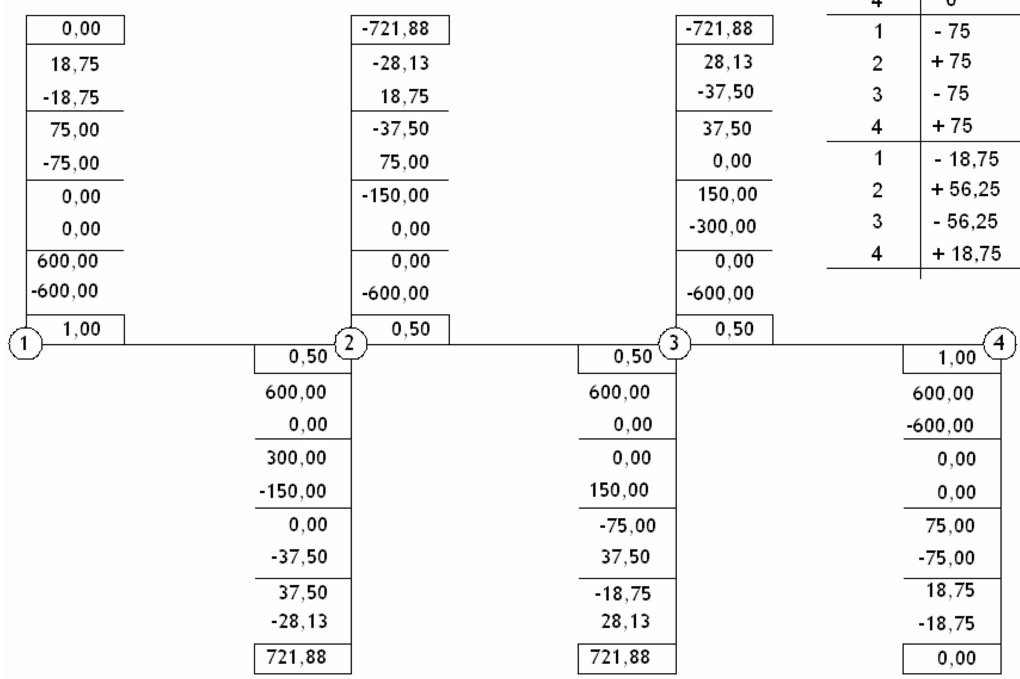
Después de esta tercera vuelta, se observa que los nudos 1 y 4, han disminuido sus desequilibrios a menos del 5% respecto a los desequilibrios originales (18,75 kgm, anotados después de la última línea de equilibrios, con respecto a 600 kgm).

Los nudos 2 y 3, en cambio, presentan desequilibrios de 56,2.5 kgm (37,5 + 18,75), cuando originalmente estaban equilibrados (desequilibrios = 0). En este caso, como es imposible lograr el 10% del "desequilibrio" original, nos remitiremos al primer desequilibrio acontecido en el nudo, de 300 kgm. Siendo así, aún debemos disminuir el desequilibrio, a un valor inferior a 3 0 kgm., por lo que efectuaremos una última vuelta.

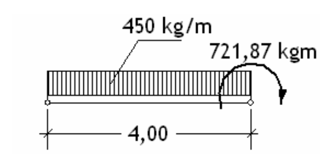
Finalizamos el desarrollo del método, sumando todas las cifras anotadas en cada columna, para obtener los momentos finales, correspondientes a los extremos de cada barra.

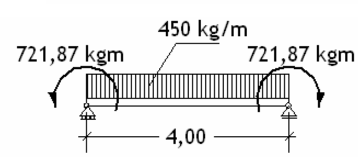
Nudo	Desequilibrio
1	- 600
2	0
3	0
4	+ 600
1	0
2	+ 300
3	- 300
4	0
1	- 75
2	+ 75
3	- 75
4	+ 75
1	- 18,75
2	+ 56,25
3	- 56,25
4	+ 18,75

Se detiene el procedimiento después de un ciclo de equilibrios. De esta manera. al sumar los momentos finales en cada nudo, deberá dar valor cero, ya que el nudo está en equilibrio. Esto nos permite verificar que no hayamos cometido errores de signos en el desarrollo y que hayamos aplicado correctamente los coeficientes de distribución.

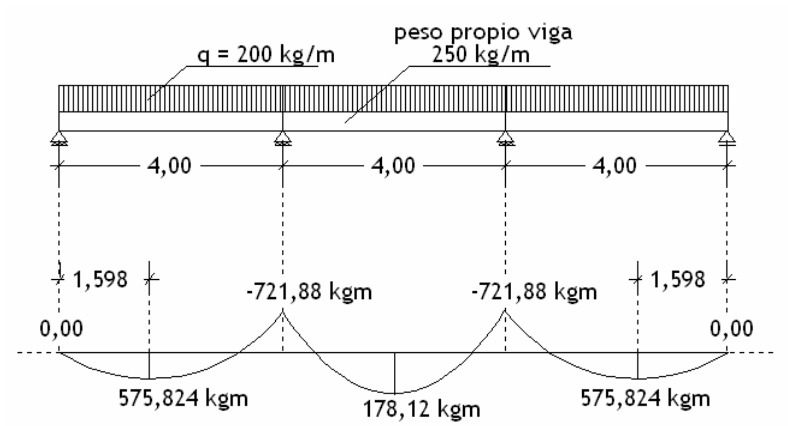


El método de Cross nos ha proporcionado el valor de los momentos en los nudos; es tarea aparte el encontrar los valores de momentos de tramo, que se determinan en cada tramo de la viga, con las mismas herramientas que utilizamos en una viga isostática cualquiera y, aunque en este caso plantearemos el modelo, no incluiremos los cálculos ya que no es el tema de este apunte. Por razones de simetría, es suficiente analizar dos tramos de la viga.



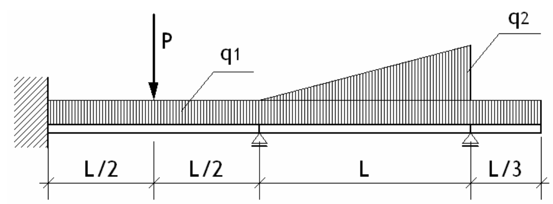


Y para finalizar, incluiremos el diagrama de momentos de la viga.



EJEMPLO 2:
APLICACIÓN DEL MÉTODO DE CROSS EN LA DETERMINACIÓN DE MOMENTOS DE UNA VIGA CONTINUA, ASIMÉTRICA, DE DOS TRAMOS Y VOLADIZO.

Datos
Viga de Acero (obviar peso propio)
q_1 = 200 kg / ml
q_2 = 300 kg / ml
P = 500 kg
L = 3,00 m

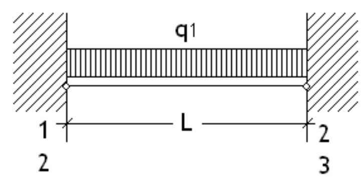


I. ANTECEDENTES PREVIOS

1.- Cálculo Momentos de Empotramiento Perfecto

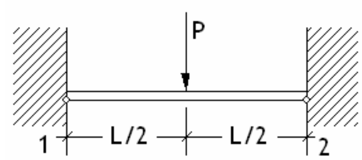
$$M_{EMP} = \frac{qL^2}{12}$$

$$M_{EMP} = \frac{200\ 3^2}{12} = 150\ \text{kgm}$$



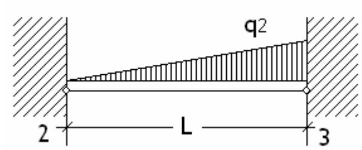
$$M_{EMP} = \frac{PL}{8}$$

$$M_{EMP} = \frac{500\ 3}{8} = 187{,}5\ \text{kgm}$$

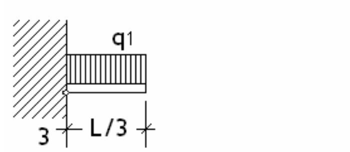


$$M_{EMP}(1) = 150\ \text{kgm} + 187{,}5\ \text{kgm} = 337{,}5\ \text{kgm}$$
$$M_{EMP}(2i) = 150\ \text{kgm} + 187{,}5\ \text{kgm} = 337{,}5\ \text{kgm}$$

$$M_{EMP} = \frac{qL^2}{30}$$



$$M_{EMP} = \frac{300\ 3^2}{30} = 90\ \text{kgm}$$



$$M_{EMP} = \frac{qL^2}{20}$$

$$M_{EMP} = \frac{300\ 3^2}{20} = 135\ \text{kgm}$$

$$M_{EMP} = \frac{qL^2}{2}$$

$$M_{EMP} = \frac{200\ 1^2}{2} = 100\ \ \text{kgm}$$

$$M_{EMP}(3d) = 100\ \ \text{kgm}$$

2.- Coeficientes de Distribución por Nudo.

Todas las barras tienen la misma rigidez EI/L, por lo que le asignaremos rigidez “1”

En el nudo 1 el empotramiento tiene una rigidez infinita comparada con la barra 1-2 por lo tanto el coeficiente de distribución de la barra es:

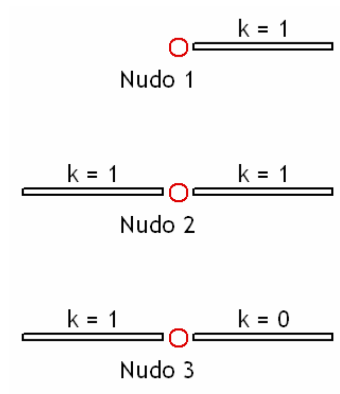
$cd_{(1\text{-}2)} = 0$

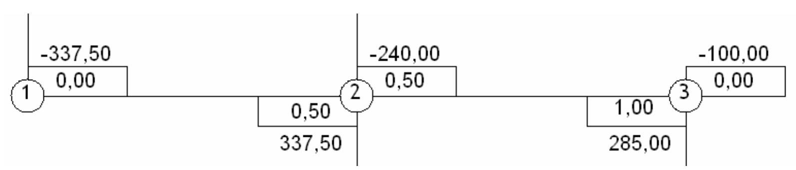
En el nudo 2 llegan dos barras de igual rigidez por lo tanto el coeficiente de distribución es el mismo para cada una de ellas:

$cd_{(1\text{-}2)} = 0{,}5$
$cd_{(2\text{-}3)} = 0{,}5$

En el nudo 3 el equilibrio del voladizo depende de su continuidad con la barra 2-3 y no puede aportar nada al equilibrio del nudo, por lo tanto el coeficiente de distribución para cada una de ellas:

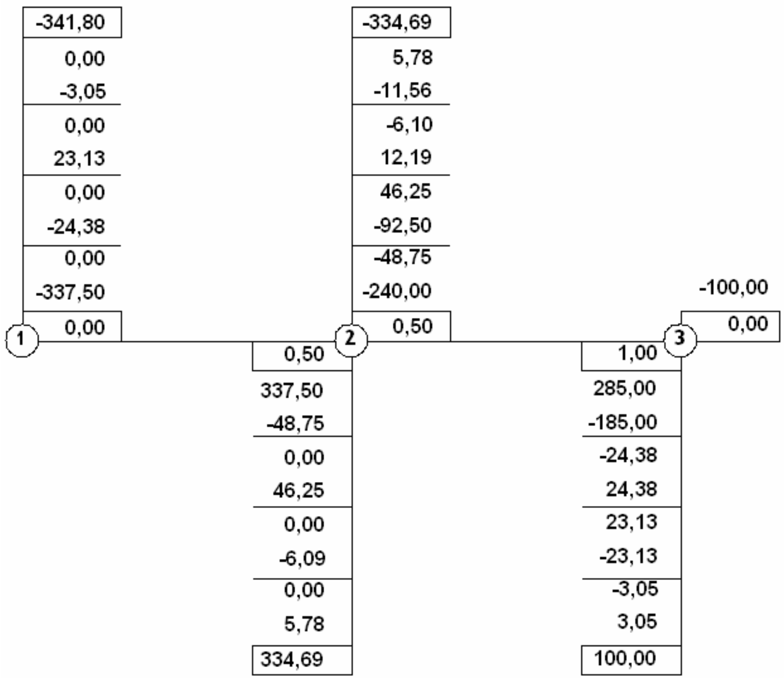
$cd_{(2\text{-}3)} = 1$
$cd_{(\text{voladizo})} = 0$





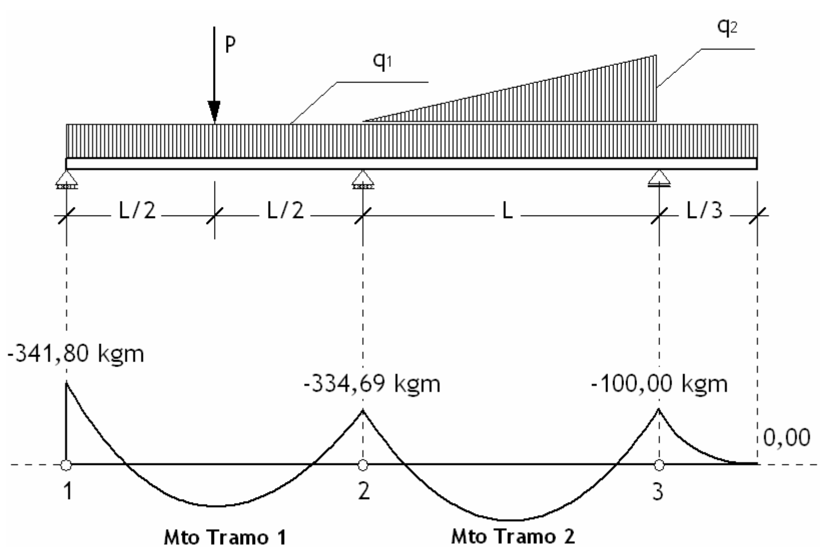
II. DESARROLLO

Como ya hemos desarrollado un ejemplo en que cada ciclo o vuelta se trató por separado, en este ejemplo y en los siguientes incluiremos la malla con el proceso total, de equilibrios y traspasos y los valores finales. También se incluye el cuadro que indica los desequilibrios existentes en cada vuelta.



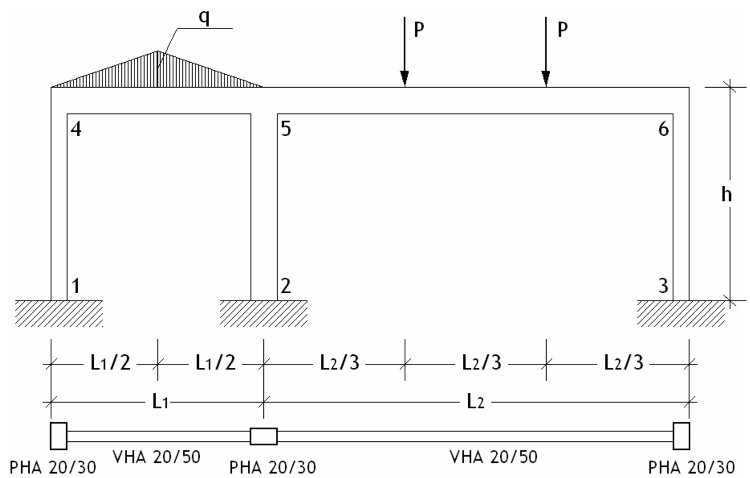
Nudo	Desequilibrio
1	-337,50
2	97,50
3	185,00
1	-24,38
2	-92,50
3	-24,38
1	23,13
2	12,19
3	23,13
1	-3,05
2	-11,56
3	-3,05

III.- Grafico de Momento



EJEMPLO 3:
APLICACIÓN DEL MÉTODO DE CROSS EN LA DETERMINACIÓN DE MOMENTOS EN UN MARCO DE DOS NAVES Y UN PISO.

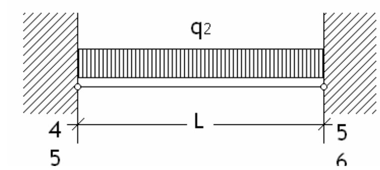
Datos
Marco de Hormigón Armado
Vigas 20/50 Pilares 20/30
Peso propio vigas q = 250kg/ml
Sobrecarga q= 300 kg/ml
P = 150 kg
L_1= 3,00 m.
L_2 = 6,00 m.
h= 3,00 m.



I.- ANTECEDENTES PREVIOS

1.- Cálculo Momentos de Empotramiento Perfecto

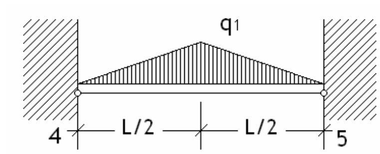
$$M_{EMP} = \frac{qL^2}{12}$$



$$M_{EMP(4-5)} = \frac{250 \ 3^2}{12} = 187{,}50 \ \text{kgm}$$

$$M_{EMP(5-6)} = \frac{250 \ 6^2}{12} = 750{,}00 \ \text{kgm}$$

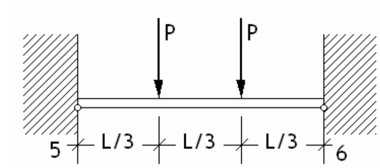
$$M_{EMP} = \frac{5qL^2}{96}$$



$$M_{EMP(4-5)} = \frac{5 \ 300 \ 3^2}{96} = 140{,}63 \ \text{kgm}$$

$$M_{EMP(4-5)} = 187{,}50 + 140{,}63 = 328{,}13 \ \text{kgm}$$

$$M_{EMP} = \frac{2PL}{9}$$



$$M_{EMP(5-6)} = \frac{2 \ 150 \ 6}{9} = 200{,}00 \ \text{kgm}$$

$$M_{EMP(5-6)} = 750 + 200 = 950{,}00 \ \text{kgm}$$

2.- Calculo de Rigideces de las Barras. (EI / L)

Barras 1-4 y 3-6

$$I = \frac{20\ \ 30^3}{12} = 45000 \rightarrow k = \frac{45000}{300} = 150$$

Barras 2-5

$$I = \frac{30\ \ 20^3}{12} = 20000 \rightarrow k = \frac{20000}{300} = 66{,}67$$

Barras 4-5

$$I = \frac{20\ \ 50^3}{12} = 208333 \rightarrow k = \frac{208333}{300} = 694{,}44$$

Barras 5-6

$$I = \frac{20\ \ 50^3}{12} = 208333 \rightarrow k = \frac{208333}{600} = 347{,}22$$

3.- Coeficientes de Distribución por Nudo

En los nudos 1, 2 y 3, el empotramiento tiene una rigidez infinita comparada con las barras que llegan a cada nudo por lo tanto el coeficiente de distribución de las barras es:

$$cd_{(1-4)} = cd_{(2-5)} = cd_{(3-6)} = 0$$

En los nudos 4 y 6 llegan dos barras de distinta rigidez por lo tanto el coeficiente de distribución para cada una de ellas es:

$$cd_{(4-5)} = \frac{694{,}44}{694{,}44 + 66{,}7} = 0{,}91$$

$$cd_{(1-4)} = 1 - 0{,}91 = 0{,}09$$

$$cd_{(5-6)} = \frac{347{,}22}{347{,}22 + 66{,}7} = 0{,}84$$

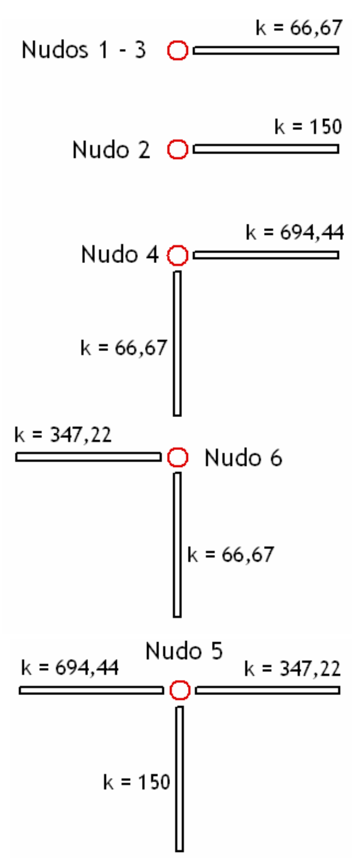
$$cd_{(3-6)} = 1 - 0{,}84 = 0{,}16$$

En el nudo 5 llegan tres barras de distintas rigideces por lo tanto el coeficiente de distribución para cada una de ellas es:

$$cd_{(4-5)} = \frac{694{,}44}{694{,}44 + 347{,}22 + 66{,}7} = 0{,}58$$

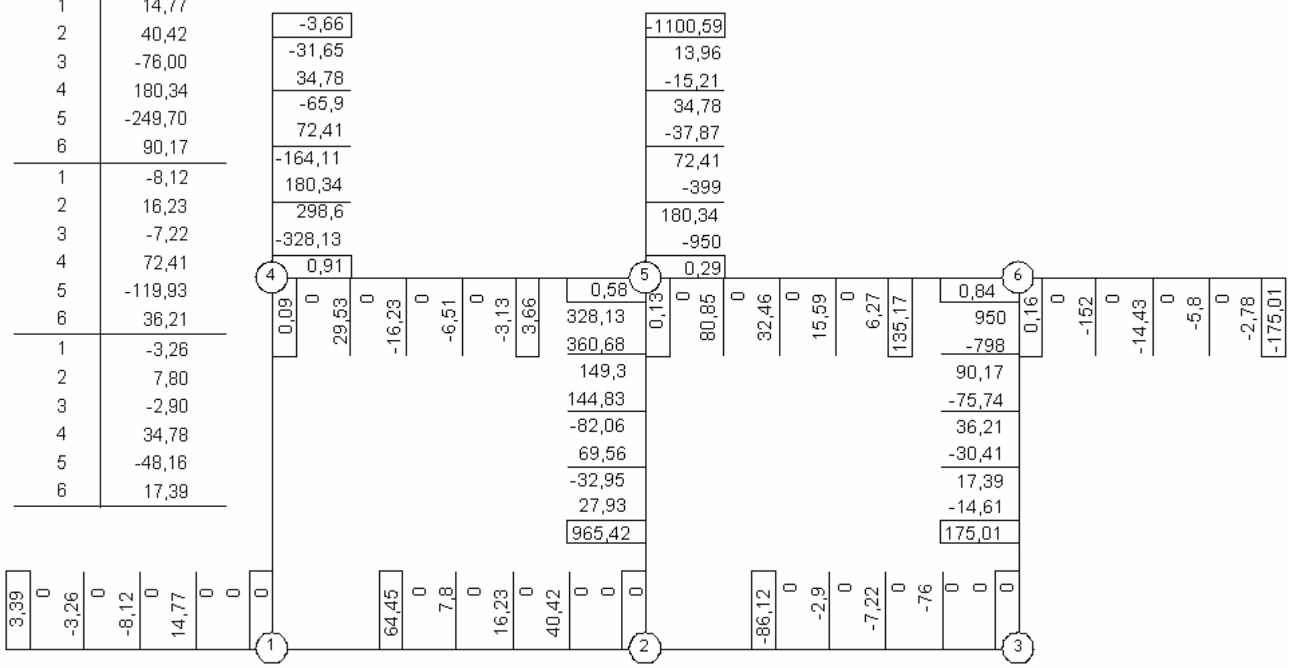
$$cd_{(5-6)} = \frac{347{,}22}{694{,}44 + 347{,}22 + 66{,}7} = 0{,}29$$

$$cd_{(2-5)} = 1 - 0{,}58 - 0{,}29 = 0{,}13$$



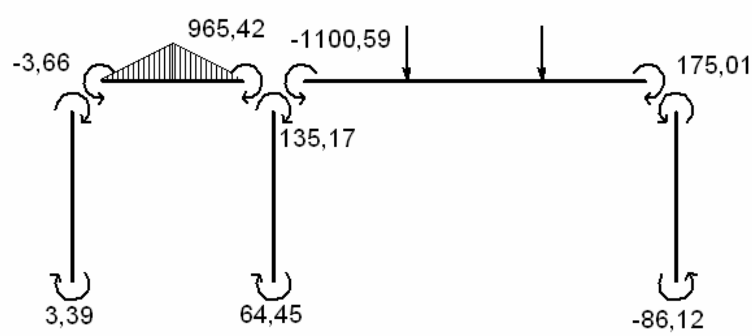
II.- DESARROLLO

Nudo	Desequilibrio
1	0,00
2	0,00
3	0,00
4	-328,13
5	-621,87
6	950,00
1	14,77
2	40,42
3	-76,00
4	180,34
5	-249,70
6	90,17
1	-8,12
2	16,23
3	-7,22
4	72,41
5	-119,93
6	36,21
1	-3,26
2	7,80
3	-2,90
4	34,78
5	-48,16
6	17,39

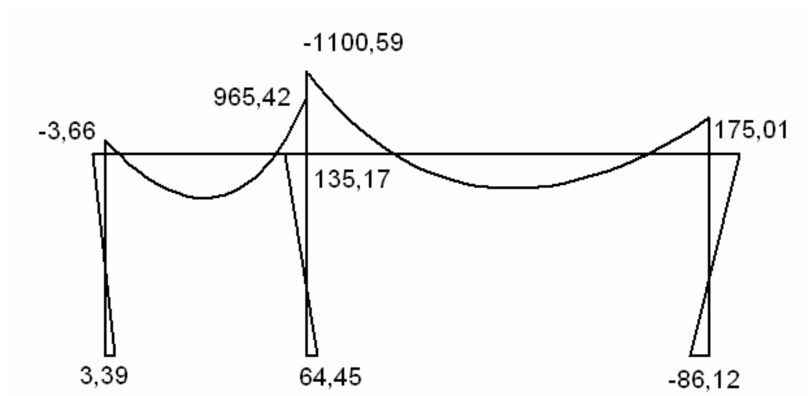


En el caso de los marcos, como en el de las vigas hiperestáticas analizadas en los ejemplos anteriores, el método de Cross nos proporciona el valor de los momentos en los nudos.

Los momentos de tramo se obtiene en los respectivos tramos de viga, tal como en los otros casos, con las mismas herramientas utilizadas hasta ahora en una viga isostática cualquiera.

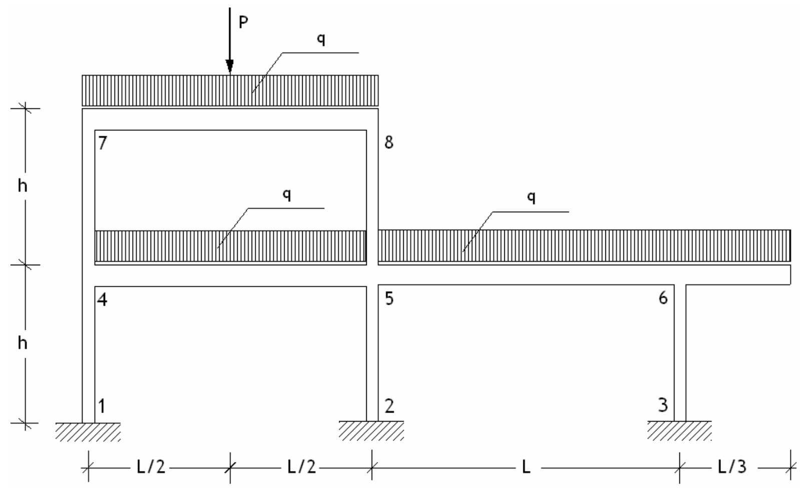


III.- Gráfico de Momento



EJEMPLO 4 :
APLICACIÓN DEL MÉTODO DE CROSS EN LA DETERMINACIÓN DE MOMENTOS DE UN MARCO EN DOS PISOS.

Datos:
Marco de Hormigón Armado
Viga 20/50 Pilares 20/30
Peso propio viga q1 = 250 Kg/ml
Sobrecarga q2 = 200 Kg/ml
P = 500 kg
L1 = 6,00 m
h = 3,00 m

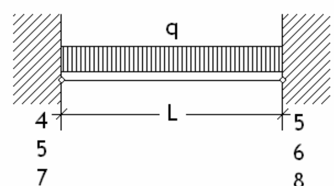


I.- ANTECEDENTES PREVIOS

1. Cálculo Momentos de Empotramiento Perfecto

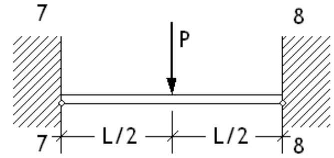
$$M_{EMP} = \frac{qL^2}{12}$$

$$M_{EMP} = \frac{450 * 6^2}{12} = 1350 \text{ kgm}$$



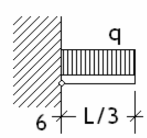
$$M_{EMP} = \frac{PL}{8}$$

$$M_{EMP} = \frac{500 * 6}{8} = 375 \text{ kgm}$$



$$M_{EMP} = \frac{qL^2}{2}$$

$$M_{EMP} = \frac{450 * 2^2}{2} = 900 \text{ kgm}$$



2.- Calculo de Rigideces de las Barras.

Pilares 1-4, 2-5, 3-6, 4-7 y 5-8

$$I = \frac{20\ \ 30^3}{12} = 45000 \rightarrow k = \frac{45000}{300} = 150$$

Vigas 4-5, 5-6 y 7-8

$$I = \frac{20\ 50^3}{12} = 208333 \rightarrow k = \frac{208333}{600} = 347{,}22$$

1c.- Coeficientes de Distribución por Nudo

En los nudos 1, 2 y 3, el empotramiento tiene una rigidez infinita comparada con las barras que llegan a cada nudo por lo tanto el coeficiente de distribución de las barras es:

$$cd_{(1-4)} = cd_{(2-5)} = cd_{(3-6)} = 0$$

En el nudo 4 llegan tres barras de distinta rigidez por lo tanto el coeficiente de distribución para cada una de ellas es:

$$cd_{(1-4)} = cd_{(4-7)} = \frac{150}{347 + 150 + 150} = 0{,}23$$

$$cd_{(4-5)} = \frac{347}{347 + 150 + 150} = 0{,}54$$

En el nudo 5 llegan cuatro barras de distinta rigidez por lo tanto el coeficiente de distribución para cada una de ellas es:

$$cd_{(2-5)} = cd_{(5-8)} = \frac{150}{347 + 347 + 150 + 150} = 0{,}15$$

$$cd_{(4-5)} = cd_{(5-6)} = \frac{347}{347 + 347 + 150 + 150} = 0{,}35$$

En el nudo 6 llegan tres barras de distinta rigidez, pero una barra en voladizo no se considera ya que ésta no aporta rigidez al sistema, por lo tanto el coeficiente de distribución para cada una de ellas es:

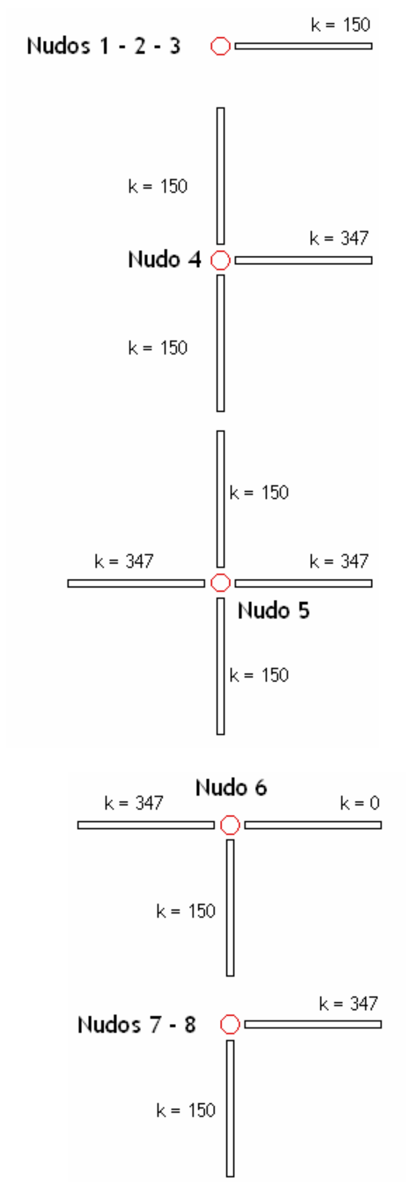
$$cd_{(5-6)} = \frac{150}{347 + 150 + 0} = 0{,}30$$

$$cd_{(3-6)} = \frac{347}{347 + 150 + 0} = 0{,}70$$

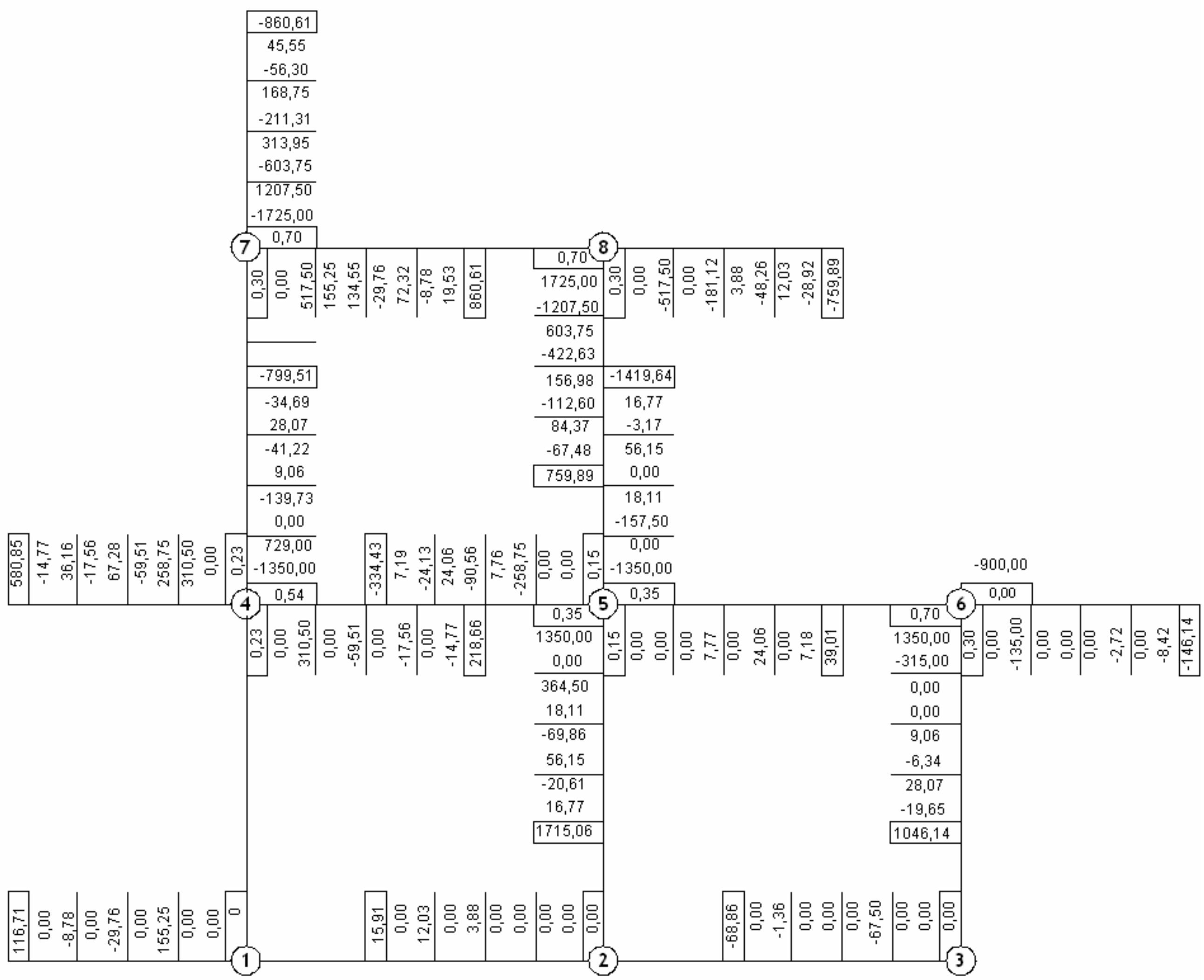
En los nudos 7 y 8 llegan dos barras de distintas rigideces por lo tanto el coeficiente de distribución para cada una de ellas es:

$$cd_{(4-7)} = cd_{(5-8)} = \frac{150}{347 + 150} = 0{,}30$$

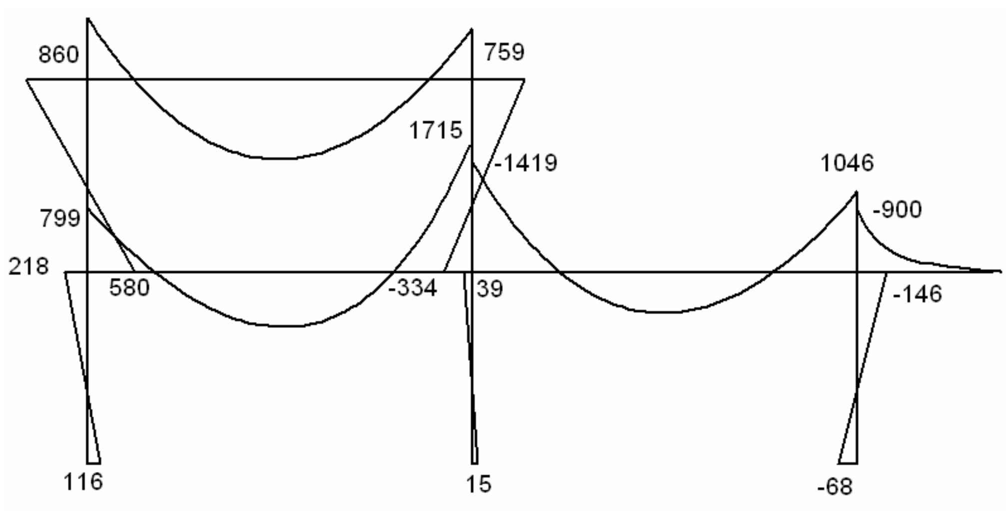
$$cd_{(7-8)} = \frac{347}{347 + 150} = 0{,}70$$



II. DESARROLLO



III.- Grafico de Momentos



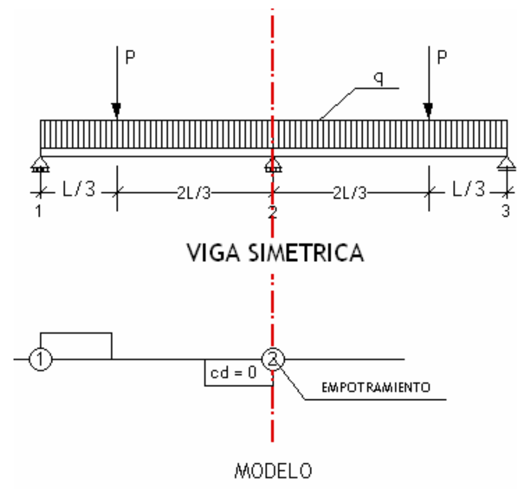
CASOS DE SIMETRIA

Existen dos tipos de simetría :

A) Simetría respecto a un apoyo
B) Simetría respecto a la mitad de la viga

CASO A
SIMETRÍA RESPECTO A UN APOYO

Se produce cuando el eje de simetría coincide con el apoyo de una viga o con el pilar central de un marco.



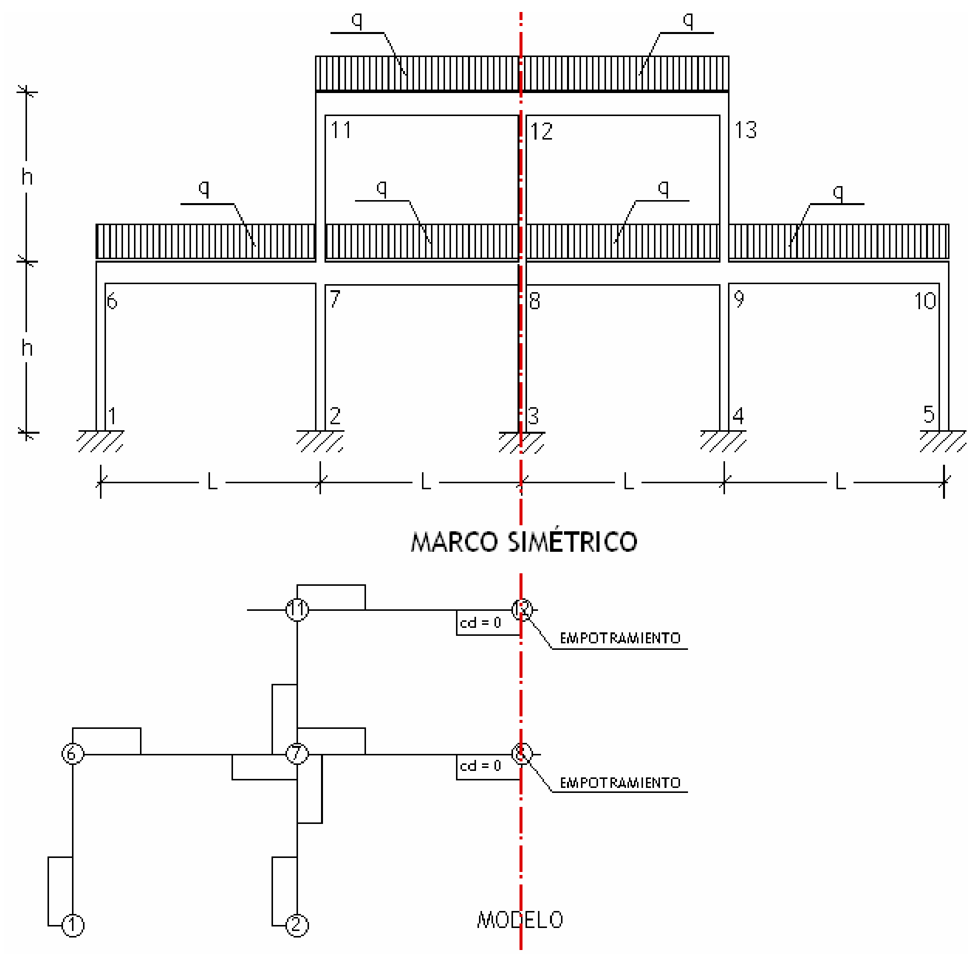
Viga simétrica respecto a un apoyo

En este caso, el eje de simetría divide el modelo en dos partes, y se trabaja con una de ellas.

Las barras que llegan al eje de simetría se consideran con dicho extremo empotrado.

Marco simétrico respecto a pilar central y su modelo de evaluación

En el caso de un marco, el pilar central no tiene momentos

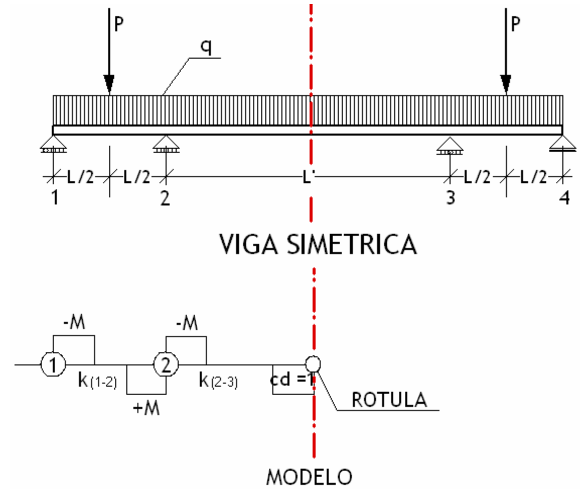


CASO B:
SIMETRÍA RESPECTO A LA MITAD DE LA VIGA.

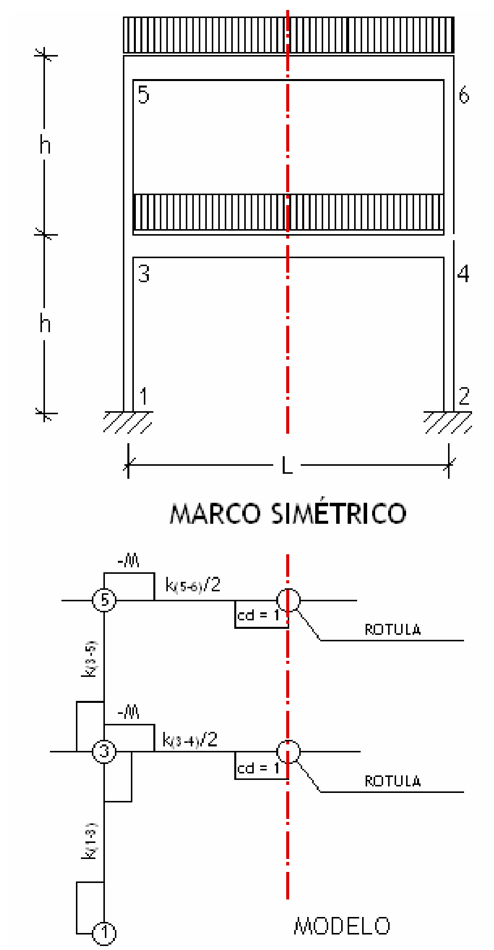
Se produce cuando el eje de simetría coincide con el punto medio del tramo de viga central de una viga continua o de un marco.

En este caso, como en el anterior, el eje de simetría divide el modelo en dos partes, trabajándose una de ellas. A las barras cortadas se le considerará la mitad de su rigidez real, y su encuentro con el eje de simetría se considera un apoyo rotulado.

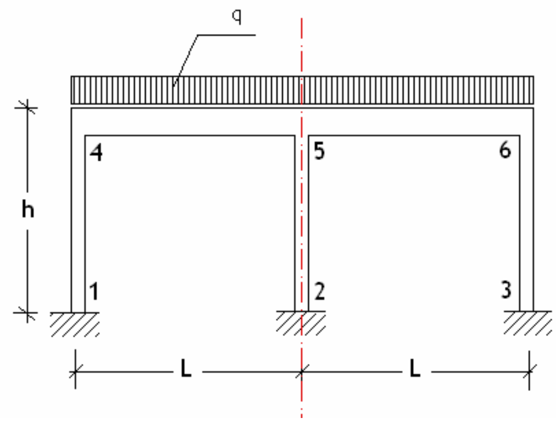
Viga Simétrica respecto al punto medio del tramo central.



Marco Simétrico respecto al punto medio de la viga



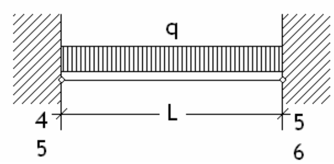
EJEMPLO 5:
CASO DE SIMETRÍA RESPECTO A UN APOYO.



Datos
Marco de Hormigón Armado
Viga 20/50 Pilares 20/30
Peso propio viga q = 250 kg / ml
Sobrecarga q_1 = 200 kg / ml
L_1 = 3,00 m
h = 3,00 m

I.- ANTECEDENTES PREVIOS

1. Cálculo Momentos de Empotramiento Perfecto



$$M_{EMP} = \frac{qL^2}{12}$$

$$M_{EMP} = \frac{450 * 3^2}{12} = 337{,}50 \ \text{kgm}$$

2.- Calculo de Rigideces de las Barras.

Pilares 1-4

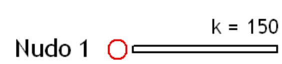
$$I = \frac{20 \ \ 30^3}{12} = 45000 \rightarrow k = \frac{45000}{300} = 150$$

Vigas 4-5

$$I = \frac{20 \ \ 50^3}{12} = 208333 \rightarrow k = \frac{208333}{300} = 694{,}44$$

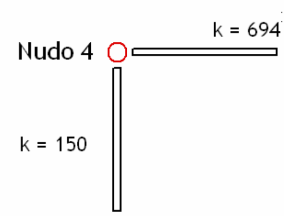
3.- Coeficientes de Distribución por Nudo

En el nudo 1 el empotramiento tiene una rigidez infinita comparada con la barra por lo tanto el coeficiente de distribución de la barra es:



$$cd_{(1-4)} = 0$$

En el nudo 4 llegan dos barras de distinta rigidez por lo tanto el coeficiente de distribución para cada una de ellas es:

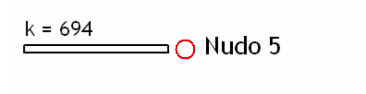


$$cd_{(1-4)} = \frac{150}{150 + 694{,}44} = 0{,}18$$

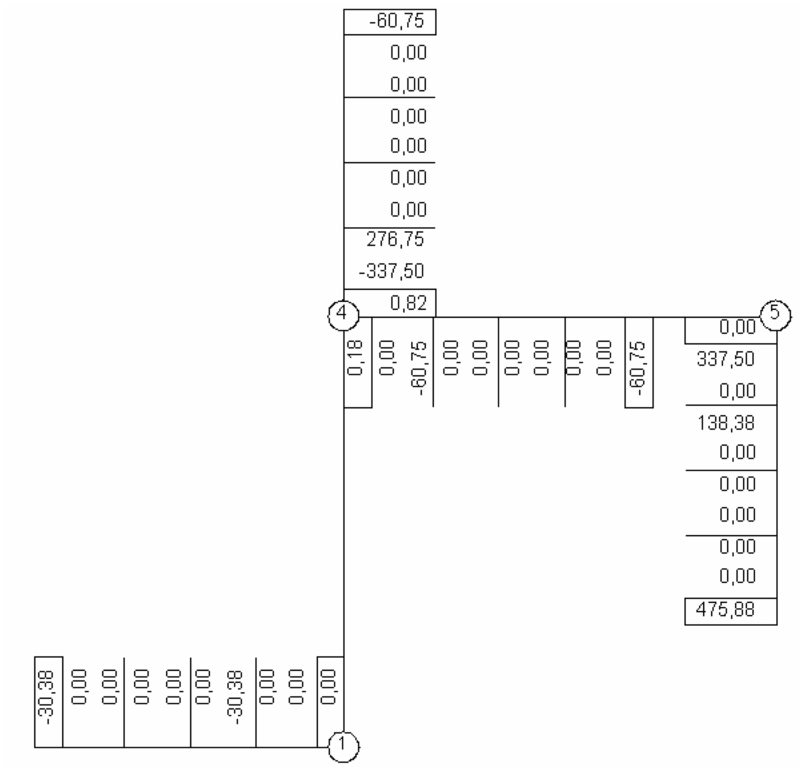
$$cd_{(4-5)} = 1 - 0{,}18 = 0{,}82$$

En el nudo 5 la barra 4-5 llega el eje de simetría por lo tanto al considerar un empotramiento el coeficiente de distribución para la barra es:

$cd_{(4-5)} = 0$

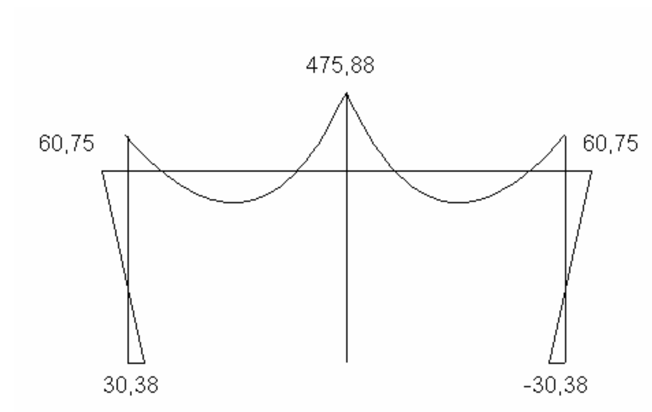


II.- DESARROLLO

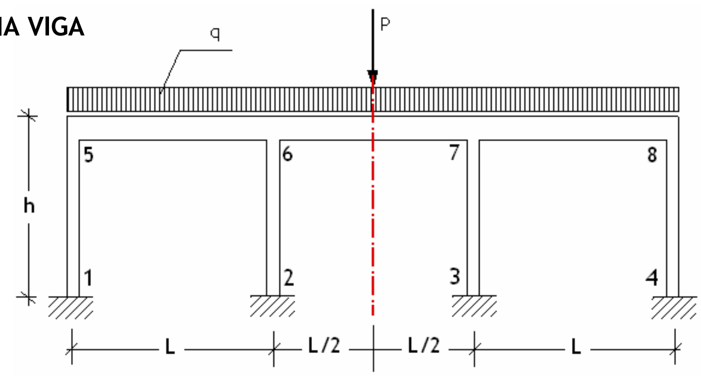


Nudo	Desequilibrio
1	0,00
4	-337,50
5	337,05
1	30,38
4	0,00
5	138,28
1	0,00
4	0,00
5	0,00
1	0,00
4	0,00
5	0,00

III.- GRÁFICO DE MOMENTO



EJEMPLO 6 :
CASO DE SIMETRÍA RESPECTO A LA MITAD DE UNA VIGA

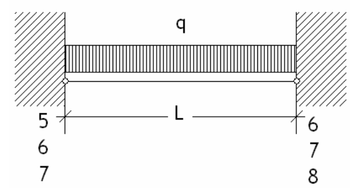


Datos
Marco de Acero (obviar peso propio)
Pilares y vigas de secciones iguales.
Sobrecarga q = 4500 kg / ml
P = 500 kg
L = 3,00 m
h = 3,00 m

I.- ANTECEDENTES PREVIOS

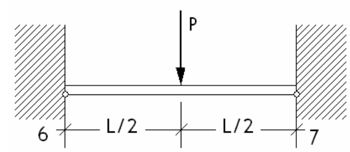
1. Cálculo Momentos de Empotramiento Perfecto

$$M_{EMP} = \frac{qL^2}{12}$$



$$M_{EMP} = \frac{450 * 3^2}{12} = 337{,}50 \text{ kgm}$$

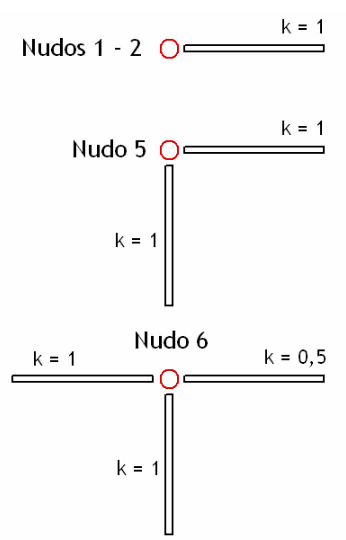
$$M_{EMP} = \frac{PL}{8}$$



$$M_{EMP} = \frac{500 * 3}{8} = 187{,}50 \text{ kgm}$$

2.- Coeficientes de Distribución por Nudo

Todas las barras tienen la misma rigidez EI/L, por lo que le asignaremos rigidez “1”



En los nudos 1 y 2 el empotramiento tiene una rigidez infinita comparada con la barra por lo tanto el coeficiente de distribución de la barra es:

$$cd_{(1-5)} = cd_{(2-6)} = 0$$

En el nudo 5 llegan dos barras de igual rigidez por lo tanto el coeficiente de distribución para cada una de ellas es:

$$cd_{(1-5)} = cd_{(5-6)} = 0{,}50$$

En el nudo 6 llegan tres barras de la misma rigidez pero la barra 6-7 es la barra cortada por el eje de simetría por lo que sólo se considerará la mitad de su rigidez.

$$cd_{(2-6)} = cd_{(5-6)} = \frac{1}{1+1+0{,}50} = 0{,}40$$

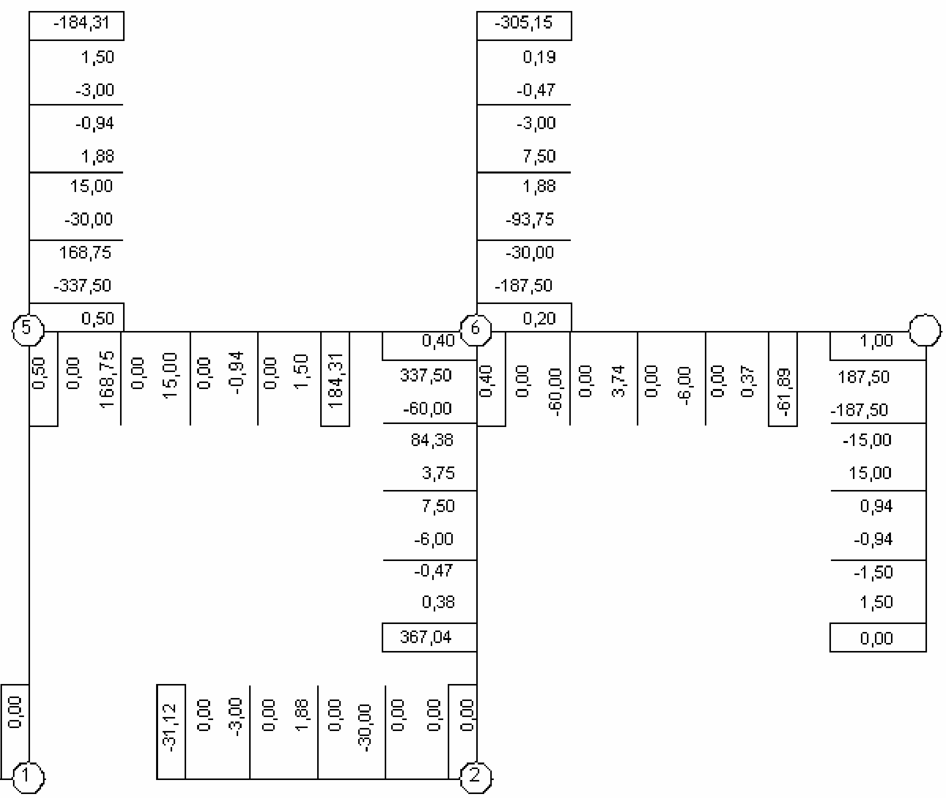
$$cd_{(6-7)} = 1 - 0{,}40 - 0{,}40 = 0{,}20$$

En el nudo ficticio en la mitad de la barra 5-6 se considera apoyo rotulado por lo tanto el coeficiente de distribución es:

$cd_{(6-7)} = 1$

II.- DESARROLLO

Nudo	Desequilibrio
1	0,00
2	0,00
5	-337,05
6	150,00
NF	187,50
1	-84,38
2	-30,00
5	-30,00
6	-9,37
NF	-15,00
1	-7,50
2	1,88
5	1,88
6	15,00
NF	0,94
1	0,47
2	-3,00
5	-3,00
6	-0,94
NF	-1,50



III.- GRAFICO DE MOMENTOS

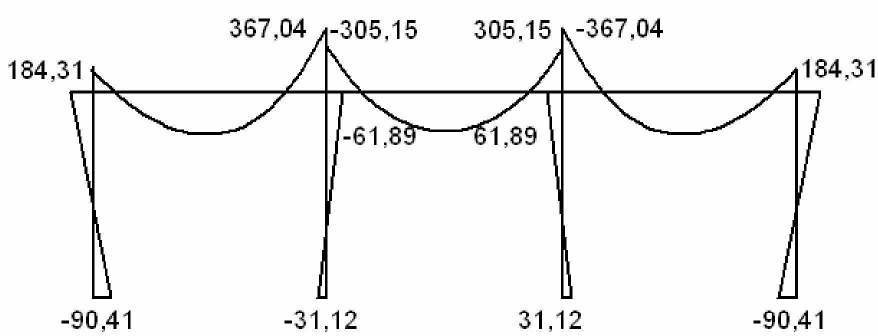
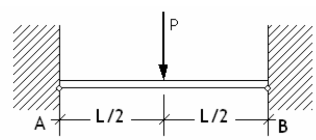
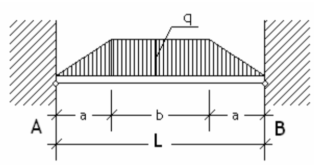


TABLA DE
MOMENTO DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO



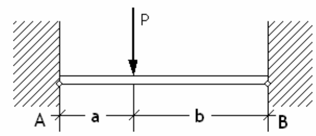
$$M_A = \frac{PL}{8}$$

$$M_B = \frac{PL}{8}$$



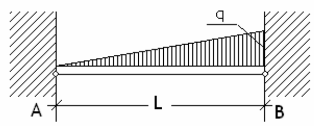
$$M_A = \frac{qL}{96}(L+b)\left(5-\frac{b^2}{L^2}\right)$$

$$M_B = \frac{qL}{96}(L+b)\left(5-\frac{b^2}{L^2}\right)$$



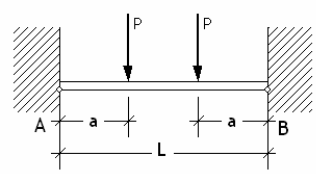
$$M_A = \frac{P\,ab^2}{L^2}$$

$$M_B = \frac{P\,a^2 b}{L^2}$$



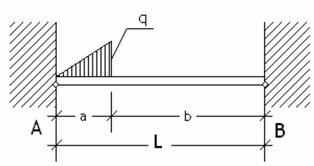
$$M_A = \frac{qL^2}{30}$$

$$M_B = \frac{qL^2}{20}$$



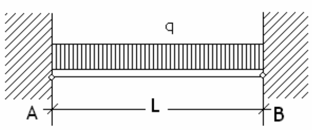
$$M_A = \frac{Pa\,(L-a)}{L^2}$$

$$M_B = \frac{Pa\,(L-a)}{L^2}$$



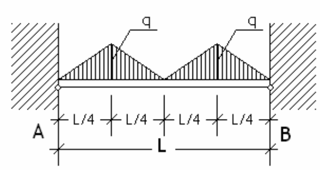
$$M_A = \frac{qa^2}{30}\left[10-\frac{a}{L}\left(15-6\frac{a}{L}\right)\right]$$

$$M_B = \frac{qa^3}{20L}\left(5-4\frac{a}{L}\right)$$



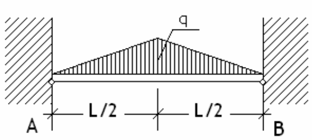
$$M_A = \frac{qL^2}{12}$$

$$M_B = \frac{qL^2}{12}$$



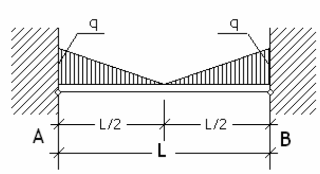
$$M_A = \frac{17qL^2}{384}$$

$$M_B = \frac{17qL^2}{384}$$



$$M_A = \frac{5qL^2}{96}$$

$$M_B = \frac{5qL^2}{96}$$



$$M_A = \frac{qL^2}{32}$$

$$M_B = \frac{qL^2}{32}$$

BIBLIOGRAFÍA

METODO DE CROSS
Prof. Raúl Véliz Montoya
Apunte del Departamento de Ciencias de la Construcción

HORMIGÓN ARMADO
P. Jimenez Montoya
Tablas

Apuntes
Personales del Autor

INDICE