Fecha: / /

PENDIENTE | IMPORTANTE

Pauta Taller Calificado N°7. (1)

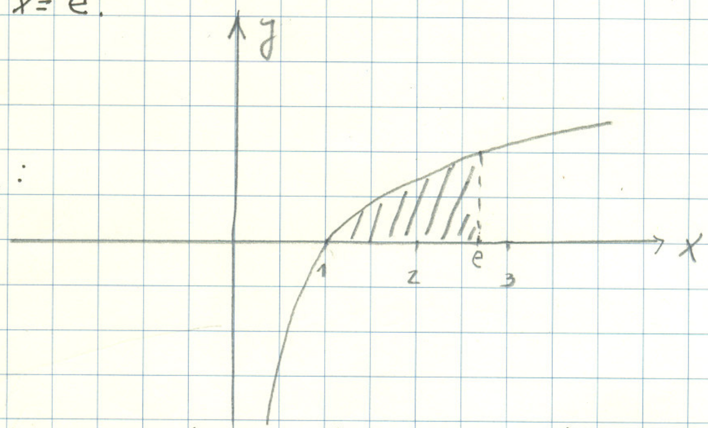
Areas, Volumenes y longitudes de arco.

Problema 1

Calcular el área de la región limitadas por los gráficos de $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$.

Sol:

Graficamente se tiene:



Como $\ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1$, entonces la curva intersecta al eje x en el punto $(1,0)$

El área de la región está dada por:

$$A = \int_1^e \ln(x)\,dx$$

Integrando por partes: $u = \ln(x)$ $\quad dv = dx$

$du = \frac{1}{x}\,dx$ $\quad v = x$

$$A = x\ln(x) - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$$A = \left(x\ln(x) - x\right)\Big|_1^e$$

$$A = e\ln e - e - (\ln 1 - 1)$$

$$A = e - e - 0 + 1$$

$$A = 1\ u^2$$

PENDIENTE

IMPORTANTE

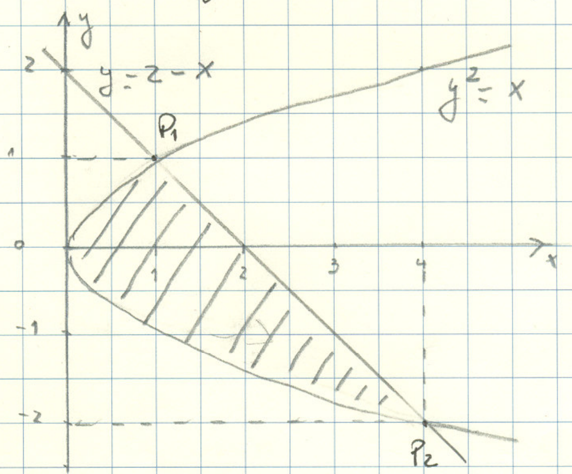
Problema 2.

Hallar el área de la región limitada por los gráficos de las ecuaciones $y^2 = x$; $y = -x + 2$. Bosqueje la gráfica.

a) Integrando con respecto al eje y

Solución:

a) La representación gráfica es la siguiente.



Los gráficos se intersectan en los puntos $(1,1)$ y $(4,-2)$

ya que $y^2 = 4 - 4x - x^2 \Rightarrow x = 4 - 4x - x^2 \Rightarrow 0 = x^2 - 5x + 4$

$(x-4)(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 4$ y $x_2 = 1 \therefore y_1 = -2$ y $y_2 = 1$

$P_1(1,1)$ y $P_2(4,-2)$

Si tomamos "y" como variable de integración. $\Rightarrow$

$$A = \int_{-2}^{1} (2 - y - y^2)\, dy = \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1}$$

$$A = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(2(-2) - 2 + \frac{8}{3}\right) = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 + 2 - \frac{8}{3}$$

$$A = \frac{9}{2}\ u^2$$

Fecha: / /

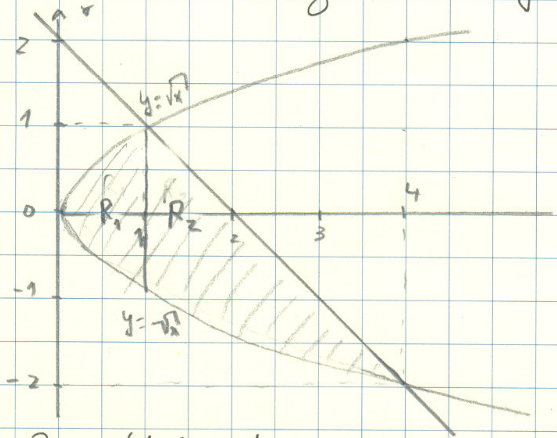
PENDIENTE

IMPORTANTE

Problema 2

3

b) Integrando con respecto a la variable x. En este caso el área se divide en 2 regiones R_1 y R_2



La región R_1, está limitada superiormente por la gráfica $y=\sqrt{x}$ e inferiormente por la de $y=-\sqrt{x}$, lateralmente por $x=1$ y $x=0$
Así:

$$A_{R_1} = \int_0^1 [\sqrt{x} - (-\sqrt{x})]\, dx$$
$$= \int_0^1 2\sqrt{x}\, dx$$
$$= \frac{4}{3}(\sqrt{x})^3 \Big|_0^1$$
$$= \frac{4}{3}$$

La Región R_2 está limitada superiormente por la gráfica de $y=-x+2$, inferiormente por la de $y=-\sqrt{x}$, lateralmente por $x=1$
Así:

$$A_{R_2} = \int_1^4 [-x+2-(-\sqrt{x})]\, dx$$
$$= \int_1^4 (2-x+\sqrt{x})\, dx$$
$$= \left(2x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^{3/2}}{3}\right)\Big|_1^4 = \frac{19}{6}\, u^2$$

Fecha: / /

✓ PENDIENTE	✓ IMPORTANTE
Problema 2:- b) continuación.	Problema 3. ④

Por tanto:

$$\text{Area de } R = \text{Area de } R_1 + \text{Area de } R_2$$

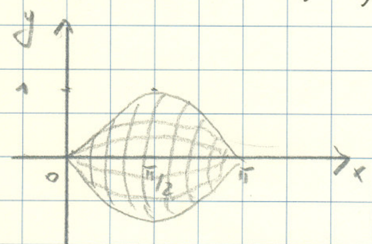
$$= \frac{4}{3} + \frac{19}{6}$$

$$= \frac{27}{6}\ u^2.$$

Problema 3.- Hallar el volumen engendrado cuando la superficie limitada por la curva $y = \operatorname{sen} x$ y las rectas con ecuaciones $y=0$, $x=0$, $x=\pi$ gira en torno al eje X. Bosqueje la gráfica.

Solución:

La representación gráfica es la siguiente.



Ayuda: $(\operatorname{sen} x)^2 = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

El volumen del sólido está dado por:

$$V = \int_0^{\pi} \pi (\operatorname{sen} x)^2\, dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx$$

$$V = \frac{\pi}{2}\left(\pi - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)\Big|_0^{\pi}$$

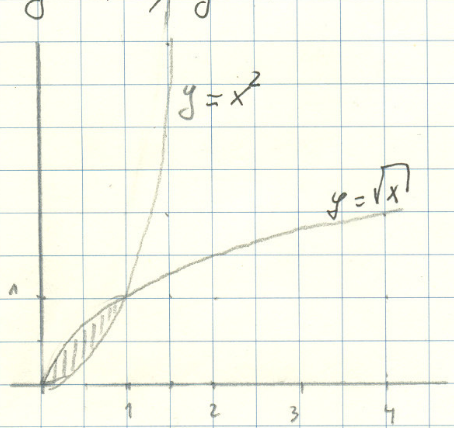
$$V = \frac{\pi^2}{2}\ u^3$$

Fecha: / /

PENDIENTE | IMPORTANTE

Problema 4

4.- Hallar el volumen engendrado al girar alrededor del eje X, la superficie comprendida entre las parábolas con ecuación $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ entre $x=0$ y $x=1$. Bosqueje la gráfica.



$$V = \int_0^1 \pi \left[(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2 \right] dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x - x^4)\, dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) - 0$$

$$= \frac{3}{10} \pi \; u^3$$

Fecha: ___/___/___

✓	PENDIENTE	✓	IMPORTANTE
☐		☐	
☐		☐	(6)
☐	Problema 5	☐	

5.- Calcular la longitud de arco de la curva definida por $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$. desde $x=0$ hasta $x=3$.

Solución:

Designemos la longitud del arco con L.

Como $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2} \Rightarrow y' = x\sqrt{x^2+2}$ (Regla de la cadena)

luego:

$$L = \int_0^3 \sqrt{1+\left[x\sqrt{x^2+2}\right]^2}\, dx$$

$$L = \int_0^3 \sqrt{1+x^2(x^2+2)}\, dx.$$

$$L = \int_0^3 \sqrt{x^4+2x^2+1}\, dx$$

$$L = \int_0^3 \sqrt{(x^2+1)^2}\, dx$$

$$L = \int_0^3 (x^2+1)\, dx$$

$$L = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_0^3$$

$$L = 12 \text{ u.}$$

Fecha: / /

✓	PENDIENTE	✓	IMPORTANTE
☐		☐	
☐	Problema 6	☐	7
☐		☐	

6.- Calcular la longitud del arco de la curva definida por $(y+1)^2 = 4x^3$ desde $x=0$ hasta $x=1$

Solución:

Obtengamos $\frac{dy}{dx}$ por medio de derivación implícita.

$$2(y+1)\cdot y' = 12x^2 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{y+1}$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{6x^2}{y+1}\right)^2}\, dx.$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{36x^4}{(y+1)^2}}\, dx \quad \text{pero } (y+1)^2 = 4x^3$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{36x^4}{4x^3}}\, dx$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+9x}\, dx.$$ Integrando por sustitución

$u = 1+9x$

$du = 9\,dx$

$\frac{du}{9} = dx$

$$L = \frac{1}{9}\int u^{1/2}\, du = \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3} u^{3/2} = \frac{2}{27}(1+9x)^{3/2}\Big|_0^1$$

$$L = \frac{2}{27}(10)^{3/2} - \frac{2}{27}$$

$$L = \frac{2}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)\ u.$$