Sesión 12

Intervalo de confianza para proporciones y para la razón de varianzas.

Estadística II

Equipo Docente: Iris Gallardo - Andrés Antivilo – Francisco Marro

IC para una proporción poblacional

- ¿Qué proporción de adolescentes presenta problemas de delincuencia en una comunidad determinada?
- Se obtiene una muestra, se calcula la proporción y se hace una estimación de la proporción poblacional.
- Sabemos que la media de la distribución muestral de proporciones calculada a partir de todas las muestras posibles de tamaño n, es igual a P.
- Sabemos que la distribución muestral de proporciones es aproximadamente normal cuando n es grande y cuando P ni Q están demasiado cerca de 0 o 1.

Estas condiciones se satisfacen cuando *np* y *nq* son >5.

La σ^2_p = PQ/n, pero se estima con los valores de la muestra σ^2_p = pq/n si P es desconocido

IC para proporciones

Si el muestreo se hace en una población infinita, el IC está dado por:

$$I.C\left(\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \leq P \leq \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \right) = 1 - \alpha$$

Si el muestreo se hace sin reemplazo como es usual en una población finita, aplicamos el factor de corrección:

$$I.C\left(\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq P \leq \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \right) = 1 - \alpha$$

No olvidar: Si n/N es $\leq$ 0,05 omitimos el f.c.

Ejercicio

- En un estudio acerca de las razones que dan los estudiantes suspendidos en el colegio, un investigador tomó una muestra de 200 estudiantes de una población de 1500 que habían sido suspendidos.
- De los 200 estudiantes que fueron suspendidos, se encontró que 140 fallaron por problemas económico familiares. El investigador desea construir el IC del 95% para la verdadera proporción de jóvenes que habían fallado por esta razón.
- Calcular ***p***.
- Decidir si hay que usar el f.c.
- Construir el intervalo.

- ***Resultado:*** IC[0,64≤ P ≤ 0,76] = 0,95

Tamaño de muestra para estimar P

Si el muestreo se hace en una población infinita o en un muestreo con reemplazo en población finita

$$n = \frac{z^2pq}{e^2}$$

Si el muestreo es sin reemplazo en población finita

$$n = \frac{Npqz^2}{(N-1)e^2 + z^2pq}$$

Si no tenemos una estimación de P en base a estudios anteriores y no es práctico tomar una muestra piloto, podemos obtener el valor máximo de n, haciendo que p = 0,5

Ejercicio

- Un especialista en mercadotecnia desea calcular el tamaño de muestra de hogares requerido para determinar la proporción de hogares en que se ve un programa de TV. Determinado.
- En la comunidad hay 500 hogares.
- El analista desea que su estimación esté a 0,04 de la proporción verdadera con un 90% de confianza.
- En una muestra piloto de 15 hogares, el 35% de los entrevistados indicaron que alguien veía el programa:

$$n = \frac{500*0,35*0,65*1,645^2}{4,99*0,04^2 + 1,645^2 *0,35*0,65} = 217,68$$

La muestra es de 218 hogares

IC para la razón entre dos varianzas poblacionales

- Hay muchas situaciones en que se desea saber si las varianzas de dos poblaciones son iguales o no lo son.
- Si las varianzas de dos poblaciones son iguales, su razón es igual a 1. Si la razón entre dos S^2 muestrales es muy distinta de 1, ponemos en tela de juicio la igualdad de las varianzas poblacionales.
- Podemos construir el IC para σ^2_1/σ^2_2 cuando las poblaciones se distribuyen normalmente, utilizando la distribución F.
- Sabemos que si S^2_1 y S^2_2 son las varianzas calculadas a partir de m.a.s. i. de tamaño n1 y n2 tomadas de poblaciones que se distribuyen normalmente con varianzas σ^2_1 y σ^2_2, entonces la razón $\dfrac{(S^2_1/\sigma^2_1)}{(S^2_2/\sigma^2_2)}$

Sigue la distribución F con n1-1 y n2-1 grados de libertad

$$IC[\ S^2_1 / S^2_2 * F_{\alpha/2\ ;\ gl2,\ gl1} \leq \sigma^2_1/\sigma^2_2 \leq S^2_1 / S^2_2 * F_{1-\alpha/2\ ;\ gl2,\ gl1}\ ]= 1-\alpha$$

IC para la razón de varianzas

- Como la tabla contiene los percentiles de la cola superior de la distribución F, o sea $F_{1-\alpha/2}$, hay que resolver como obtener $F_{\alpha/2.}$
- Para eso usamos la identidad:

$$F_{\alpha/2.\, gl1,\, gl2} = \frac{1}{F_{1-\alpha/2\, ;\, gl2,\, gl1}}$$

- Donde gl1 y gl2 son los grados de libertad del numerador y del denominador:

Si gl1 = 15, gl2 = 20 y $\alpha = 0{,}05$

$F_{1-\alpha/2\, ,\, gl2,\, gl1} = F_{0{,}975,\, 20,\, 15} = 2{,}76$ y

$F_{\alpha/2.\, gl1,\, gl2} = 1/\, F_{1-\alpha/2\, ,\, gl2,\, gl1} = 1/\, 2{,}76 = 0{,}36$

Ejercicio

- Un equipo de profesores de educación física administró a dos grupos de universitarios pruebas de resistencia física después de un programa de ejercicios. El grupo 1 constaba de 16 sujetos y arrojaron una varianza muestral de 4685,40. El grupo 2 que constaba de 25 sujetos arrojó una varianza muestral de 1193,70. Los grupos constituyen m.a.s.i. de poblaciones que se distribuyen normalmente.
- Los profesores desean saber si las varianzas poblacionales son iguales.
- Eligen trabajar con un nivel de confianza del 95%

$$IC\left[\frac{4685,40}{1193,70} * \frac{1}{2,4374} \leq \sigma^2_1/\sigma^2_2 \leq \frac{4685,40}{1193,70} * 2,6894\right] = 0,95$$

$IC \; [\, 1,61 \leq \sigma^2_1/\sigma^2_2 \leq 10,56 \,]$ El IC no contiene al 1, luego las varianzas no son iguales