Trigonometría

Tutoría Académica de Introducción al Cálculo

Prof. Gustavo Castro P.

Objetivos de la actividad:

Resuelve ecuaciones trigonométricas, utilizando:

2.1. Identidades trigonométricas.
2.2. Ángulos notables.
2.3. Circunferencia unitaria.

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Una ecuación trigonométrica, es una igualdad que contiene una o más funciones trigonométricas, la incógnita es un ángulo, es decir el argumento de las funciones y la solución se expresa en radianes.

En relación a la solución de una ecuación trigonométrica, se distinguen dos casos:

- ✓ ***Solución particular:*** solución limitada a un subconjunto de los números reales.
- ✓ ***Solución general:*** solución válida para el conjunto de los números reales.

MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

¿Cómo resolver ecuaciones trigonométricas?

Paso 1. Despejar la función trigonométrica, si es posible, de lo contrario intentar factorizar e igualar a 0.

Paso 2. Analizar en qué cuadrantes está(n) la(s) solución(es) particular(es).

Paso 3. Determinar el valor de la incógnita (ángulo), ya sea por ángulos notables o con uso de la función inversa y calculadora.

Paso 4. Determinar las soluciones particulares según el dominio dado (se recomienda utilizar la circunferencia unitaria para facilitar el análisis).

Paso 5. Escribir la soluciones de forma correcta, es decir, como un conjunto solución.

Para resolver ecuaciones trigonométricas tener en consideración que:

La función trigonométrica inversa de seno, se denomina **arco seno** *y se define por*

$$y = \arcsin(x) \Leftrightarrow \sin(y) = x\ , \quad \textit{tal que,}$$

$$\begin{aligned} \text{arcsen} \quad : \quad & [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & x \longmapsto y = \text{arcsen}(x) \end{aligned}$$

La función trigonométrica inversa de coseno, se denomina **arco coseno** *y se define por*

$$y = \arccos(x) \Leftrightarrow \cos(y) = x\ , \quad \textit{tal que,}$$

$$\begin{aligned} \text{arccos} \quad : \quad & [-1,1] \longrightarrow [0,\pi] \\ & x \longmapsto y = \text{arccos}(x) \end{aligned}$$

Para resolver ecuaciones trigonométricas tener en consideración que:

La función trigonométrica inversa de tangente, se denomina **arco tangente** *y se define*

$$y = \arctan(x) \Leftrightarrow \tan(y) = x\ , \quad \textit{tal que,}$$

$$\begin{aligned} \text{arctan} \quad : \quad & [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & x \longmapsto y = \text{arctan}(x) \end{aligned}$$

Para resolver una ecuación trigonométrica es necesario aplicar la función inversa, es decir:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

EJEMPLO

Determinar la solución de la siguiente ecuación, si $0 \leq x \leq 2\pi$:

$$2sen(x) - 1 = 0$$

Solución

Paso 1. Despejar:

$$2sen(x) - 1 = 0$$
$$sen(x) = \frac{1}{2}$$

Paso 2. Cuadrantes de soluciones:

Dado que $sen(x) = \frac{1}{2}$ es un valor positivo, las soluciones se encuentran en cuadrante I y II.

EJEMPLO

Paso 3. Valor incógnita:

Por lo ángulos notables, sabemos que el $sen(x) = 1/2$ cuando el ángulo es $\frac{\pi}{6}$. Si lo queremos expresar usando función inversa, debemos utilizar $arcsen(x)$.

$$sen(x) = \frac{1}{2} \quad /arcsen$$

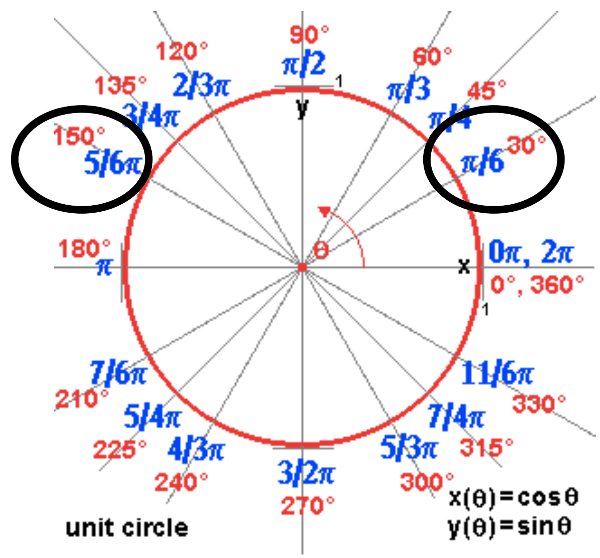
$$arcsen\big(sen(x)\big) = arcsen\left(\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6}$$

Paso 4. Soluciones particulares

Como $0 \leq x \leq 2\pi$, tenemos 2 soluciones;

en el primer cuadrante $x = \frac{\pi}{6}$ y

en el II cuadrante $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$



EJEMPLO

Paso 5. Conjunto solución:

$$S = \left\{ x \in IR, x = \frac{\pi}{6} \ \vee \ x = \frac{5\pi}{6} \right\}$$

Si quisiéramos la soluciones generales, basta con agregar a la solución particular el periodo de la función analizada, en este caso 2π

Solución general (en R):

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \qquad \text{con k} \in \mathbb{Z}$$

¡IMPORTANTE!

*Recordar que **los ángulos medidos en grados no representan un número real**, por lo que se espera que trabajen las ecuaciones trigonométricas en radianes.*

SOLUCIONES GENERALES EN RADIANES

Las soluciones generales en una ecuación trigonométrica real, considerando α como la solución particular y $k \in \mathbb{Z}$, se puede escribir de la siguiente manera:

Sea $sen(x) = y;\ -1 \leq y \leq 1$, las soluciones quedan dadas por:

$$S = \begin{cases} \alpha + 2\pi k \\ (\pi - \alpha) + 2\pi k \end{cases}$$

Sea $cos(x) = y;\ -1 \leq y \leq 1$, las soluciones quedan dadas por:

$$S = \pm\alpha + 2\pi k$$

Sea $tan(x) = y;\ y \in \mathbb{R}$

$$S = \alpha + \pi k$$

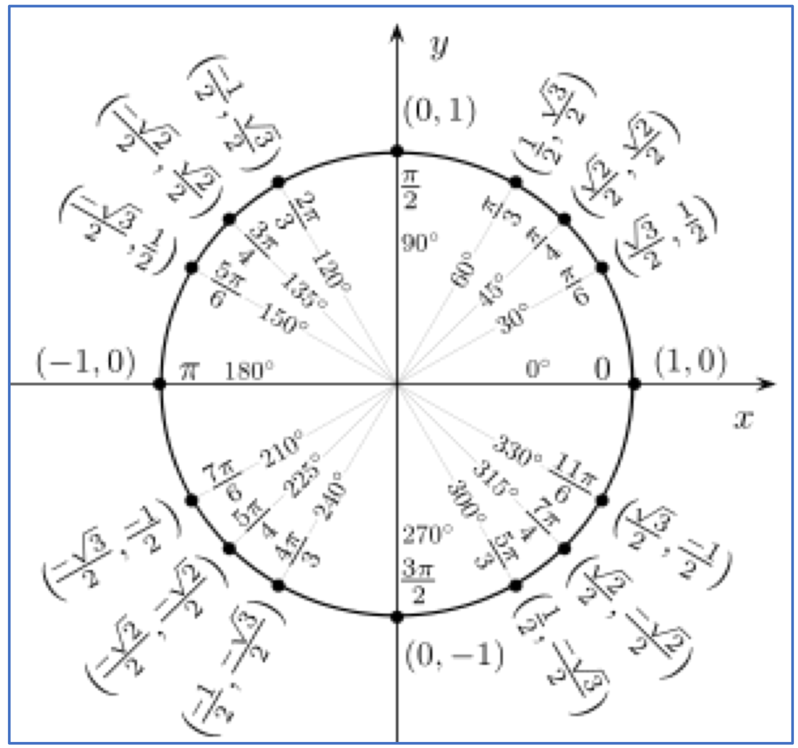
EJERCICIOS

Determinar la solución de las siguientes ecuaciones trigonométricas, determinando las soluciones particulares en $[0\ ,2\pi]$ y las soluciones generales.

1) $\tan(x) + \cot(x) = 2\sec(x)$

2) $\cos(\theta) + 1 = sen(\theta)$

3) $2\cos^2(\theta) - 7\cos(\theta) + 3 = 0$



SOLUCIONES

1) $\tan(x) + \cot(x) = 2\sec(x)$

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{sen(x)} = \frac{2}{\cos(x)}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)}{\cos(x)\, sen(x)} - \frac{2}{\cos(x)} = 0$$

$$\frac{1 - 2sen(x)}{\cos(x)\, sen(x)} = 0$$

Notar que sen(x) y cos(x) deben ser distintos de cero, porque están en el denominador.

$$1 - 2sen(x) = 0$$

$$\frac{1}{2} = sen(x)$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} \ \wedge \ x_2 = \frac{5\pi}{6}$$

Soluciones particulares:

$$S = \left\{x \in IR, x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}\right\}$$

Soluciones generales:

$$S = \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}$$

SOLUCIONES

Resolución de la ecuación en el intervalo $[0,2\pi[$ como se pide en el enunciado.

2)

$\cos\theta + 1 = \operatorname{sen}\theta$		Ecuación dada
$\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = \operatorname{sen}^2\theta$		Eleve al cuadrado ambos lados
$\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 1 - \cos^2\theta$		Identidad pitagórica
$2\cos^2\theta + 2\cos\theta = 0$		Simplifique
$2\cos\theta(\cos\theta + 1) = 0$		Factorice
$2\cos\theta = 0$ o	$\cos\theta + 1 = 0$	Iguale a 0 cada uno de los factores
$\cos\theta = 0$ o	$\cos\theta = -1$	Despeje $\cos\theta$
$\theta = \frac{\pi}{2}, \boxed{\frac{3\pi}{2}}$ o	$\theta = \pi$	Despeje θ en $[0, 2\pi)$

¿Es este valor correcto?

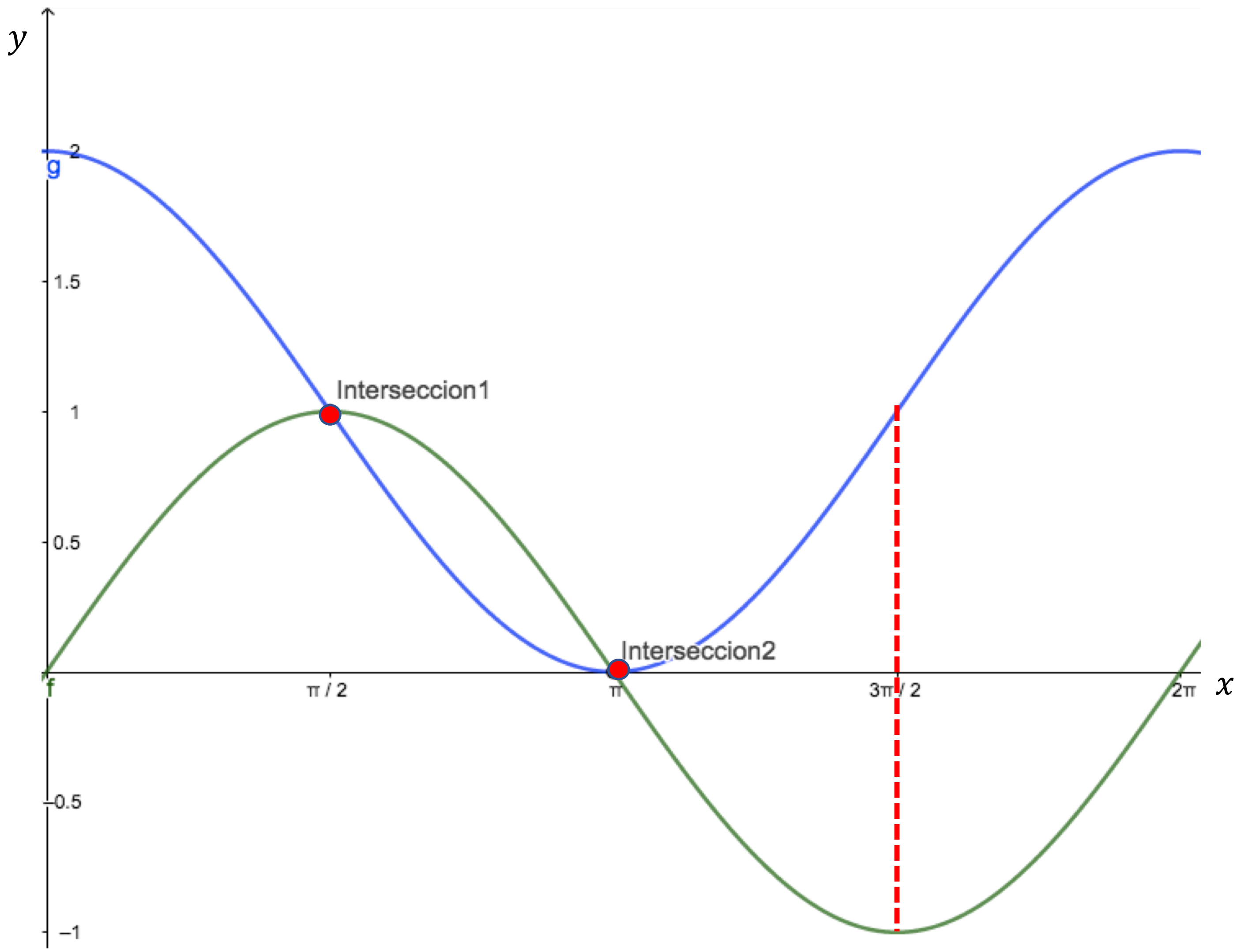
SOLUCIONES

Dado que elevamos al cuadrado ambos lados, necesitamos comprobar si hay soluciones extrañas. *Verifique sus respuestas* vemos que las soluciones de la ecuación dada son $\pi/2$ y π.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$	$\theta = \dfrac{3\pi}{2}$	$\theta = \pi$
$\cos\dfrac{\pi}{2} + 1 = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}$	$\cos\dfrac{3\pi}{2} + 1 = \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2}$	$\cos\pi + 1 = \operatorname{sen}\pi$
$0 + 1 = 1$ ✔	$0 + 1 \stackrel{?}{=} -1$ ✗	$-1 + 1 = 0$ ✔

SOLUCIONES



SOLUCIONES

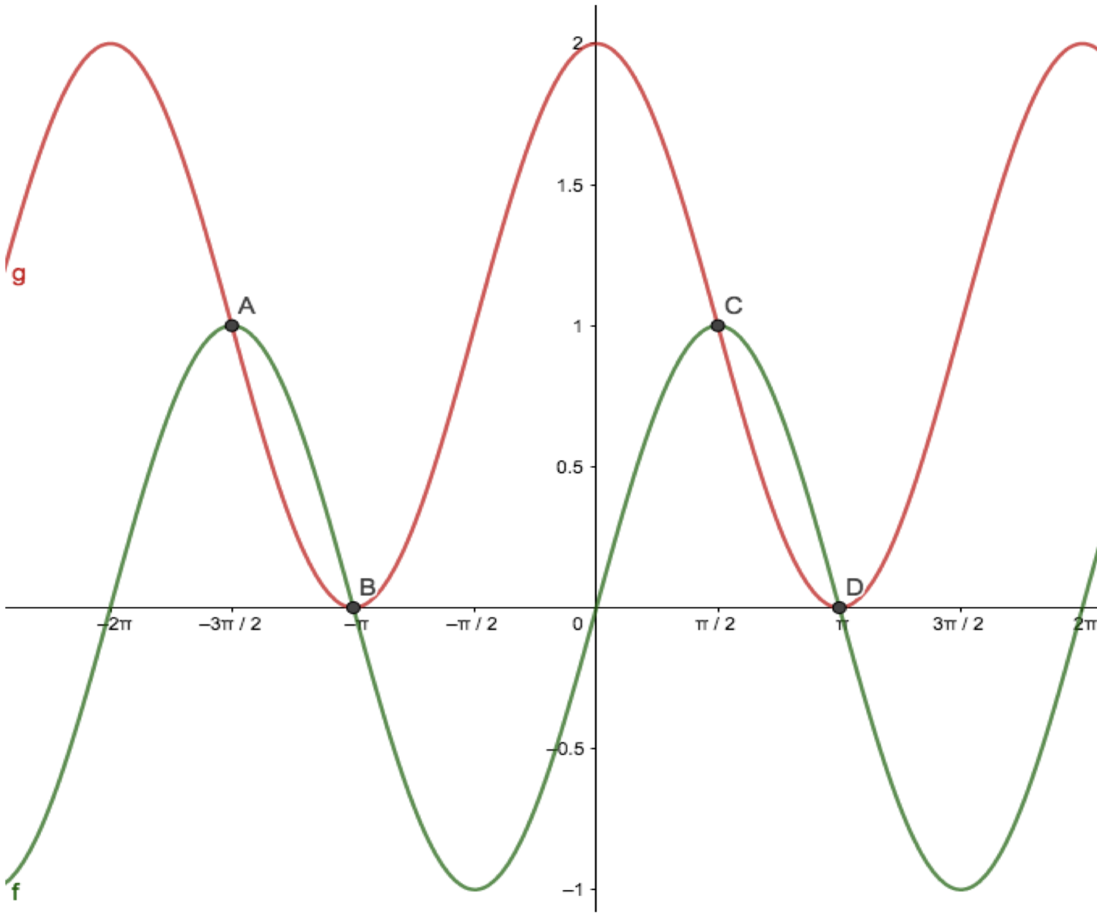
Si nos pidieran las soluciones en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$, tendríamos más soluciones

$$A = \theta_1 = \left(\frac{-3\pi}{2}, 1\right)$$

$$B = \theta_2 = (-\pi, 0)$$

$$C = \theta_3 = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$$

$$D = \theta_3 = (\pi, 0)$$



$$\boldsymbol{f(\theta) = g(\theta)}$$

$$\cos\theta + 1 = \operatorname{sen}\theta$$

SOLUCIONES

3) $2\cos^2\theta - 7\cos\theta + 3 = 0$ Ecuación dada

Ecuación de tipo cuadrático

$$2C^2 - 7C + 3 = 0$$

$$(2C - 1)(C - 3) = 0$$

Podemos factorizar directamente o utilizar un cambio de variable, pero siempre debemos volver a la variable original para determinar el ángulo.

$$2\cos^2\theta - 7\cos\theta + 3 = 0$$

$$(2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 3) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$2\cos\theta - 1 = 0 \quad \text{o} \quad \cos\theta - 3 = 0 \qquad \text{Iguale a 0 cada factor}$$

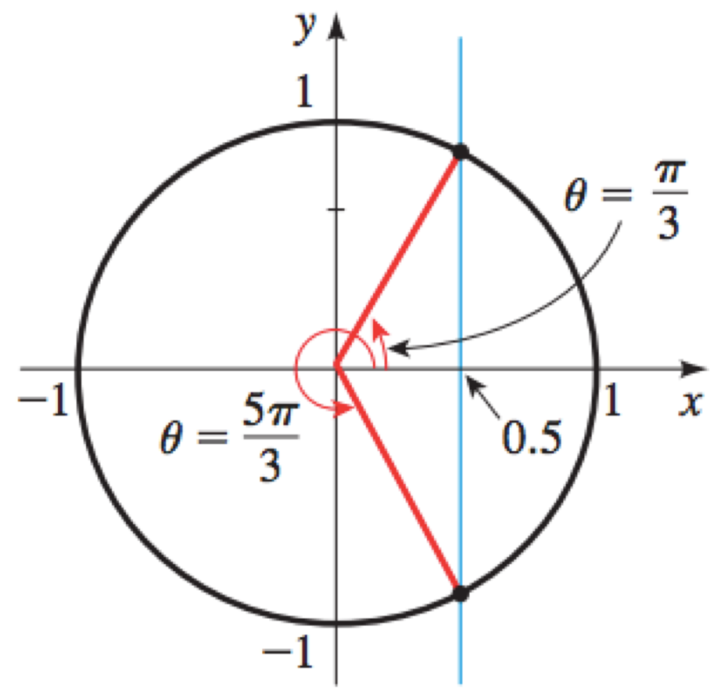
$$\cos\theta = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad \cos\theta = 3 \qquad \text{Despeje } \cos\theta$$

SOLUCIONES

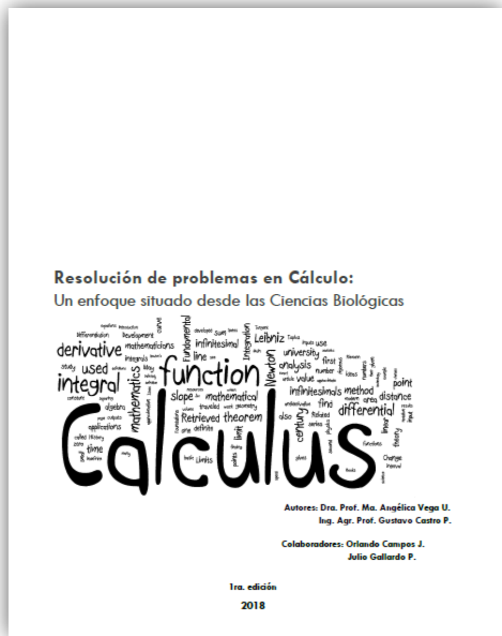
Como el coseno tiene período 2π, primero hallamos las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$. Para la primera ecuación las soluciones son $\theta = \pi/3$ y $\theta = 5\pi/3$ (vea Figura 7). La segunda ecuación no tiene solución porque $\cos\theta$ nunca es mayor a 1. Entonces las soluciones son

$$\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{o} \quad \theta = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

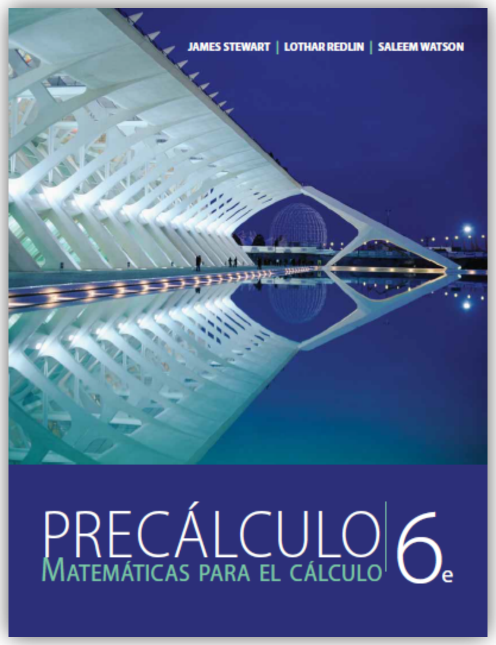
donde k es cualquier entero.



Bibliografía



Capítulo 4.
Páginas: 98 a 104



Capítulo 7.
Páginas: 493 a 529