Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas
Unidad de Matemática, Física y Bioestadística

Cálculo Diferencial e Integral

Semana 4 — Actividad Autónoma

0.1. Estudie la monotonía y concavidad de las siguientes funciones, identificando valores críticos y puntos de inflexión. Defina el dominio de las funciones y verifique sus resultados con la gráfica en GeoGebra.

1. $y = x^2 - x - 4$
2. $y = \sqrt{2x+1}$
3. $y = (x^2+1)^{1/3}$
4. $y = \dfrac{1}{(1+x)^2}$
5. $y = \sin(x), \qquad 0 \leq x \leq 2\pi$
6. $y = e^{-x^2}$
7. $y = (3x-1)^{1/3}$
8. $y = \frac{x^2}{x^2+1}$
9. $y = xe^{-x}$
10. $y = \frac{5}{x-2}$

0.2. Problemas contextualizados.

1. Agregar fertilizante nitrogenado al suelo generalmente aumenta el rendimiento de los cultivos. La dependencia del rendimiento del cultivo Y sobre el nivel de nitrógeno del suelo N se describe por una función de la forma:
$$Y(N) = Y_{max} \cdot \frac{N}{K+N}, \qquad N \geq 0$$
Esta función tiene dos coeficientes desconocidos: Y_max y K. Puede suponer que $Y_max > 0$ y $K > 0$. Determine la Monotonía y concavidad de la función. ¿Cómo interpretaría estos hechos para un agricultor tratando de maximizar el rendimiento de su cultivo?

2. La ecuación de Hill para la saturación de oxígeno de la sangre establece que el nivel de saturación de oxígeno (fracción de moléculas de hemoglobina que están unidas al oxígeno) en la sangre se puede representar mediante una función:
$$f(P) = \frac{P^n}{P^n + 30^n}$$
donde P es la concentración de oxígeno en la sangre ($P \geq 0$) y n es un parámetro definido por las diferentes especies en estudio.
   a) Suponga que $n = 1$. Determine si $f(P)$ es una función creciente o decreciente. ¿Qué ocurre a lo largo de mucho tiempo?
   b) Suponiendo que $n = 1$ ¿$f(P)$ tiene puntos de inflexión? Determine la concavidad de la curva.
   c) ¿podría deducir en qué dirección se dobla la curva sin calcular $f(P)$?
   d) Si $n = 3$, determine si $f(P)$ admite puntos de inflexión y estudie su concavidad y Monotonía.
   e) Esboce las gráficas para $n = 1$ y $n = 3$. ¿Qué diferencias observa?

3. Un modelo popular para las interacciones entre dos moléculas es el potencial Leonard-Jones 6-3. Según este modelo, la energía de interacción entre dos moléculas que están a una distancia r viene dada por una función:

$$V(r) = \frac{1}{r^6} - \frac{A}{r^3}, \qquad r > 0$$

   Las moléculas se atraerán o repelerán hasta alcanzar una distancia que minimice la función $V(r)$. El coeficiente A es una constante positiva.

   a) ¿Qué ocurre con $V(r)$ cuando $r \to \infty$?

   b) ¿Qué ocurre con $V(r)$ cuando $r \to 0$?

   c) Explica por qué esperas que haya un valor de r que minimice $V(r)$ y, a continuación, calcule ese valor de r (puede ser útil para su argumento determinar el signo de $V(r)$ para r grande).

   d) ¿Seguirías esperando que hubiera un espaciado que minimizara $V(r)$ si A fuera un número negativo? Justifica tu respuesta.

4. Para el almacenaje de ciertos productos alimenticios, se debe construir una caja con un volumen de $32{,}000[cm^3]$, de base cuadrada y con su respectiva parte superior abierta. Con estos datos encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material utilizado para almacenar productos alimenticios.

5. Un vaso sanguíneo tiene un radio R y transporta un flujo sanguíneo total, F (F mide el volumen de sangre que pasa por el vaso en un segundo. Suele medirse en $[mL/s]$). El vaso sanguíneo se ramifica en dos vasos hijos cuyos radios son r_1 y r_2. Para que la red minimice los costes de transporte y metabólicos, ¿cómo deben relacionarse r_1 y r_2 con R?