TUTORÍA N°2: ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS Y FUNCIONES SINUSOIDALES

TUTORÍA TIP INTRODUCCIÓN AL CALCULO

PATRICIO SEPÚLVEDA

Inicio

- Introducción del tema: Ecuaciones trigonométricas y ecuaciones sinusoidales

Desarrollo

- Circunferencia unitaria y ángulos notables
- Ejemplo de como desarrollar los problemas
- Pequeño Break
- Actividad principal desarrollo de ejercicios tipo prueba

Cierre

- Conclusiones del tema
- Como tratar la siguiente tutoría
- Retroalimentación

Definición de conceptos

- **ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS**

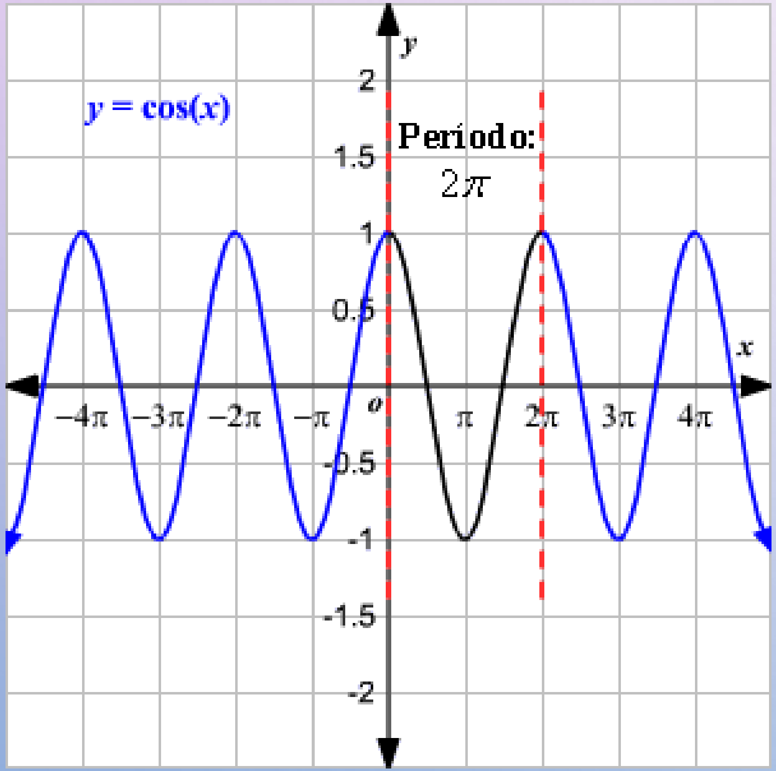
DEFINICIÓN UNA ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA ES UNA IGUALDAD ENTRE EXPRESIONES QUE CONTIENEN FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y ES VÁLIDA SÓLO PARA DETERMINADOS VALORES DEL ÁNGULO EN LOS QUE ESTÁN DEFINIDAS LAS FUNCIONES (Y LAS EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS INVOLUCRADAS).

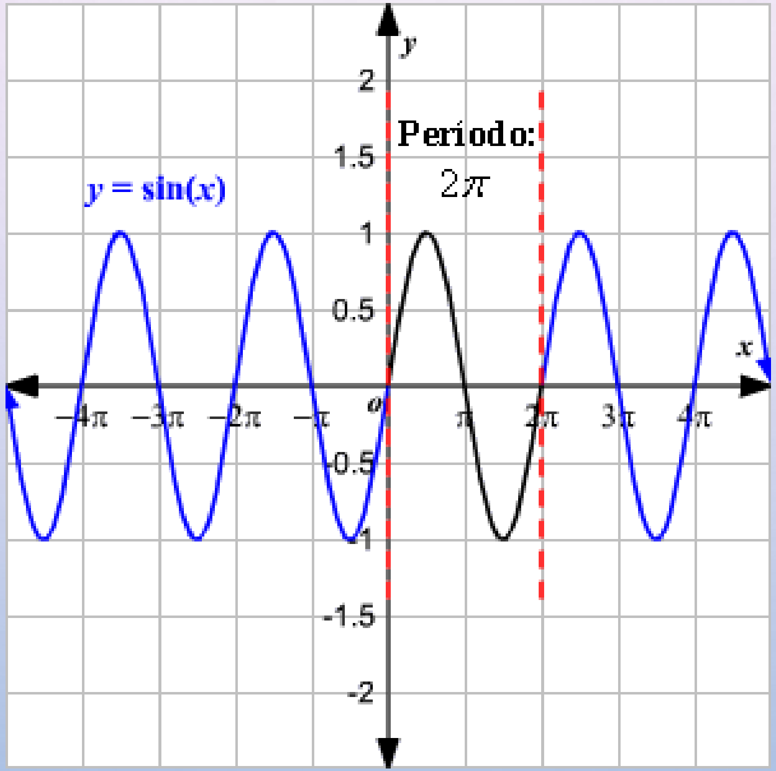
- **FUNCIONES SINUSOIDALES**

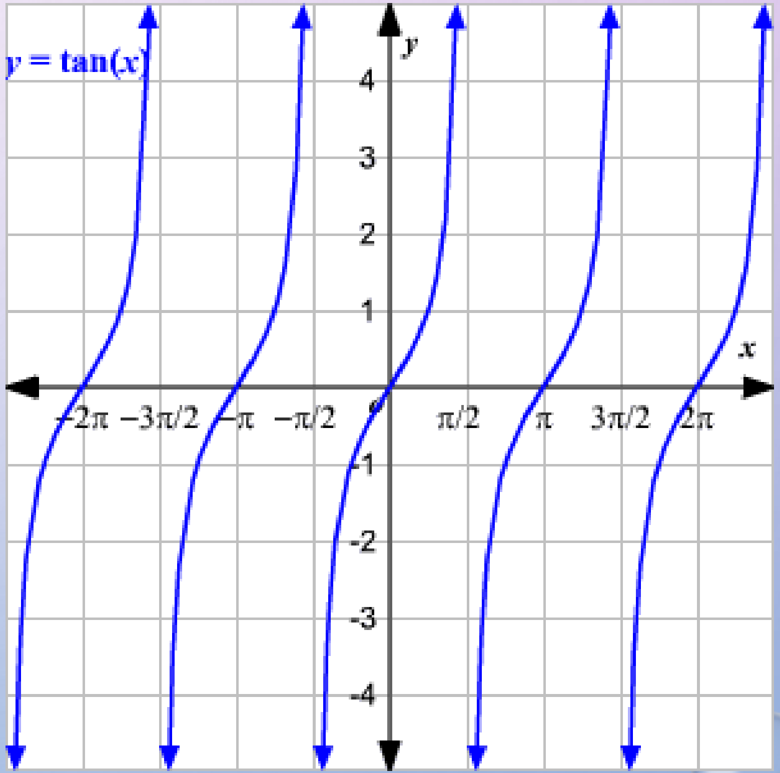
CURVA QUE REPRESENTA GRÁFICAMENTE LA FUNCIÓN DEL SENO O DEL COSENO.

LA FUNCIÓN SENO, F(X)=SENX F (X) = S E N X ES UNA FUNCIÓN DEFINIDA PARA TODOS LOS NÚMEROS REALES Y SUS IMÁGENES SON TAMBIÉN NÚMEROS REALES. SU GRÁFICA ES UNA CURVA LLAMADA SENOIDE O SINUSOIDE QUE SE REPITE EN CADA INTERVALO DE LONGITUD 2PI

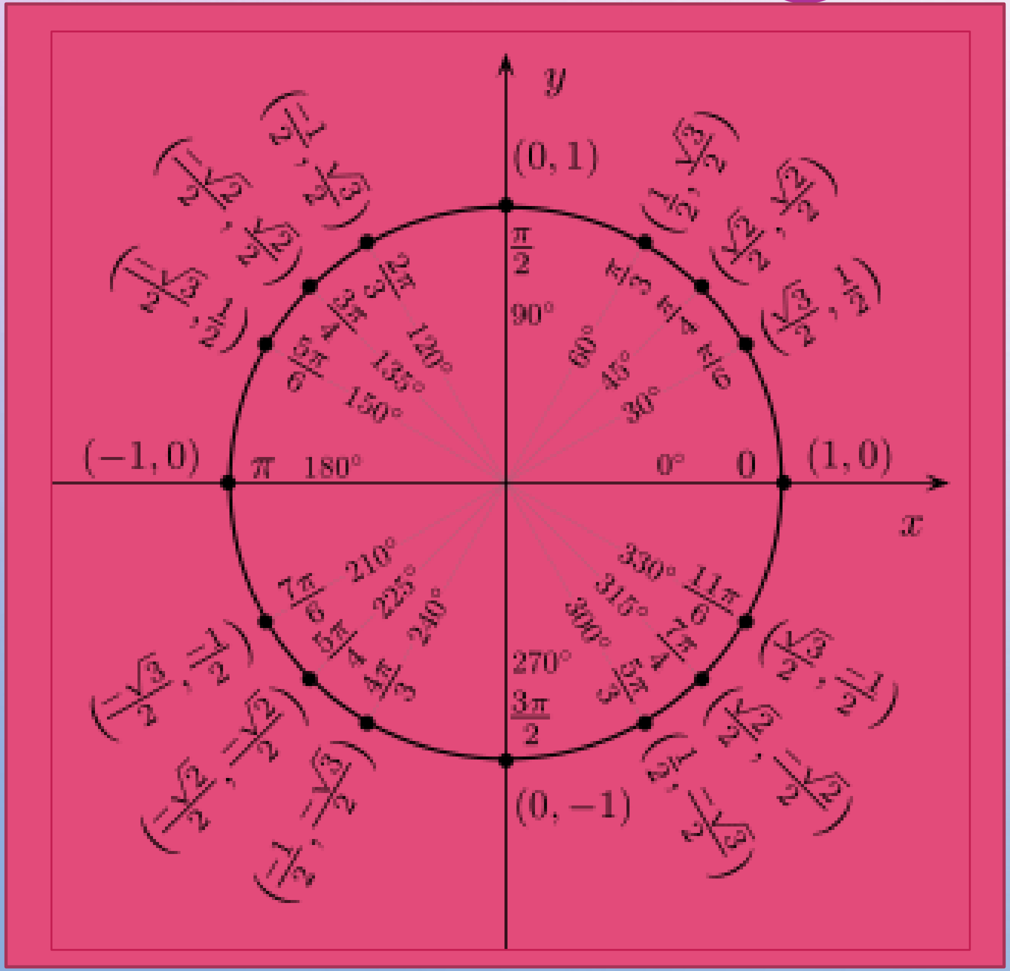
Función seno y coseno







Circunferencia unitaria y ángulos notables



Situación evaluativa 2 (12 puntos):

Determine los valores de x que satisfacen la ecuación trigonométrica en el intervalo $[0, \pi]$

$$3\,\text{sen}(x) - 4\,\text{sen}^3(x) = 0$$

<u>Solución:</u>

$$\sin(x) \cdot [3 - 4\sin^2(x)] = 0$$ Factoriza la expresión **(3 puntos)**

Como se trata de un producto igual a cero, se tienen dos casos:

$$\sin(x) = 0$$ Escribe la condición necesaria **(2 puntos)**

$$3 - 4\sin^2(x) = 0$$ Escribe la condición necesaria **(1 punto)**

El primer caso se cumple solo para $x = 0$ **(1 punto)** y $x = \pi$ **(1 punto)** dentro del intervalo dado. Mientras que en el segundo caso se tiene:

$$\sin(x) = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como el intervalo considerado es solo entre $[0, \pi]$ se descarta el valor negativo:

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ Despeja el seno correctamente **(1 punto)**

Por lo que esta condición solo se cumple para $x = \pi/3$ **(1 punto)** y $x = 2\pi/3$ **(1 punto)**. En base a lo anterior, los valores de x que satisfacen la ecuación son tal que:

$$x \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}$$ Escribe la solución final **(1 punto)**

BREAK DE 5 MINUTOS

Ejercicio tipo prueba

1

$$h(x) = 1.5\cos\left(\frac{4}{3}x + \frac{2\pi}{3}\right) - 1$$

Determine amplitud, periodo, desfase, eje de desarrollo y recorrido. Realice la gráfica respectiva a un periodo de la función.

2

(30 minutos) Un electrón de valencia ligado por un campo eléctrico a un átomo describe una trayectoria oscilatoria de **tipo sinusoidal.** Un científico, mediante experimentos, determina que la frecuencia con la cual viaja esta partícula es de $\frac{1}{\pi}$ Hertz y que, en un sistema referencial de coordinadas, viene con un desfase de $-\frac{\pi}{3}$. Además, se pudo determinar que la trayectoria de la partícula oscila entre 5 y -5 unidades.

En base a esto, determine:

a) La función dependiente del tiempo t, de la forma $s(t) = A \cdot sen(Bt - C) + D$, con $B > 0$ representada por los datos del experimento.

b) Para qué valores de $t \in \mathbb{R}$, la función se anula.

c) Para qué valores de $t \in \mathbb{R}$, se alcanza el máximo y el mínimo.

d) Gráfico de la función.

EJERCICIO 1

$$h(x) = 1.5\cos\left(\frac{4}{3}x + \frac{2\pi}{3}\right) - 1$$

Solución:

Considere "p", el período $p = \frac{3\pi}{2}$

Pasos para la gráfica:

1) Amplitud: $a = |A| = 1.5$

2) Periodo: $p = \frac{2\pi}{|B|} = \frac{2\pi}{\frac{4}{3}} = \frac{3\pi}{2}$

3) Desfase (traslación horizontal): $x = \frac{C}{B} = -\frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{4}{3}} = -\frac{\pi}{2}$

4) Eje de desarrollo (traslación vertical): $y = D = -1$

5) Recorrido:

$[D - |A|, D + |A|] = [-1 - 1.5, -1 + 1.5] = [-2.5, 0.5]$

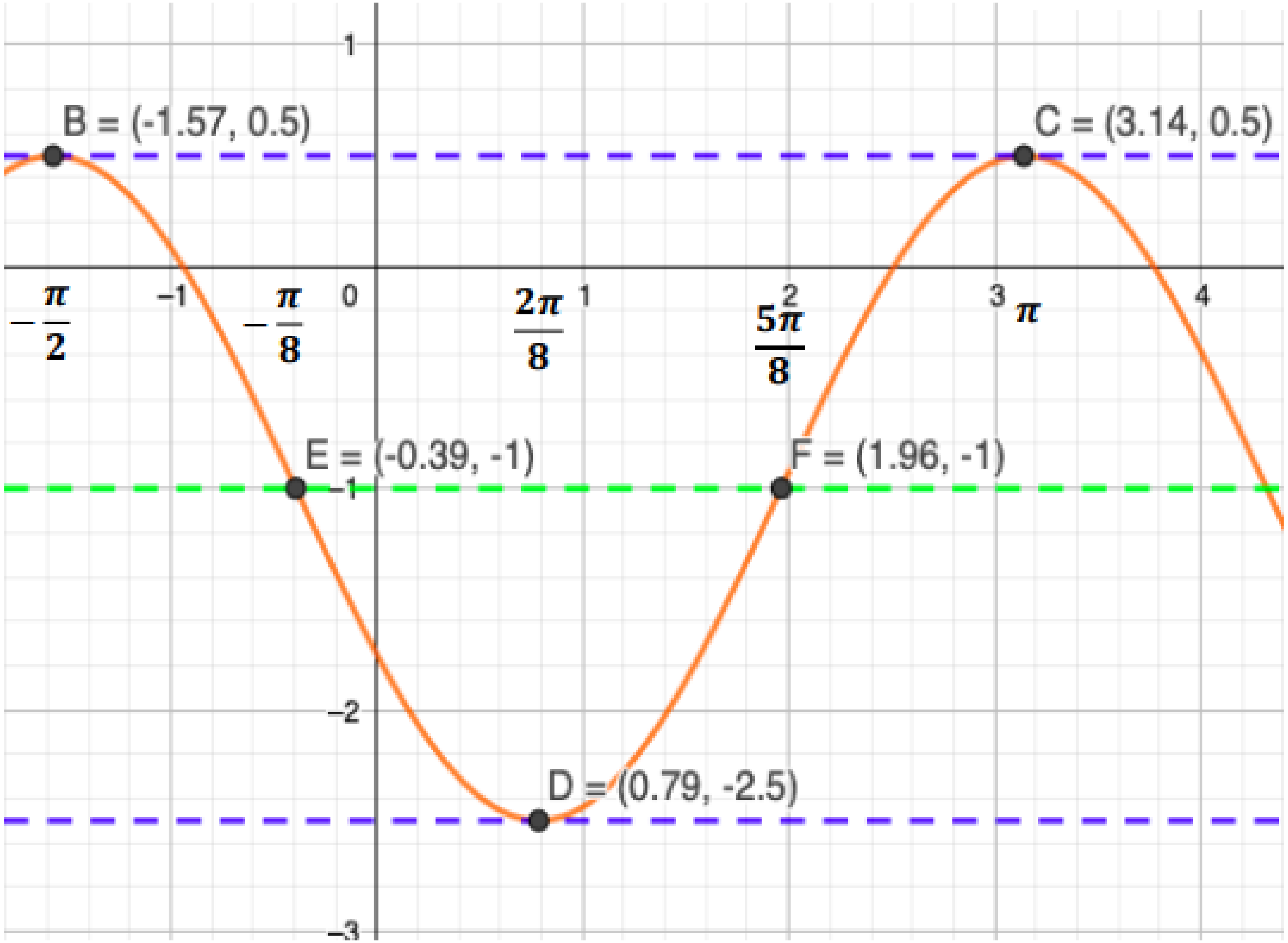
6) Coordenadas de los 5 puntos del gráfico

- Punto 1: $-\frac{\pi}{2}$ (desfase o punto inicial)
- Punto 2: $-\frac{\pi}{2} + \frac{p}{4} = -\frac{\pi}{8}$
- Punto 3: $-\frac{\pi}{8} + \frac{p}{4} = \frac{\pi}{4}$
- Punto 4: $\frac{\pi}{4} + \frac{p}{4} = \frac{5\pi}{8}$
- Punto 5: $\frac{5\pi}{8} + \frac{p}{4} = \pi$ (punto final)

Solución:

$$h(x) = 1.5\cos\left(\frac{4}{3}x + \frac{2\pi}{3}\right) - 1$$

Gráfica:



EJERCICIO 2

Solución:

Variables:

$s(t)$: trayectoria de la partícula en [u] relativas

t: tiempo, en unidades adecuadas, desde $t = 0$

Datos extraídos del contexto:

Frecuencia: $f = \frac{1}{\pi}$

Desfase: $d = -\frac{\pi}{3}$

Valor Máximo: $V_{máx} = 5$

Valor Mínimo: $V_{min} = -5$

Solución a):

a) Función dependiente del tiempo

1) Valor Medio o traslación vertical: $D = \frac{V_{máx}+V_{mín}}{2} = \frac{5-5}{2} = 0$

2) Amplitud: $\frac{V_{máx}-V_{mín}}{2} = \frac{5+5}{2} = 5 \Rightarrow |A| = 5$

3) Periodo: $p = \frac{1}{f} = \frac{1}{1/\pi} = \pi$ y además, $p = \frac{2\pi}{|B|} \Rightarrow |B| = 2$

4) Desfase o traslación horizontal: $d = \frac{C}{B} = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow C = -\frac{B\pi}{3}$

5) Recorrido: [-5, 5]

Con estos valores de los parámetros, tenemos 2 posibilidades, ya que B>0 y no especifica A:

Caso 1: $A = 5, \;\; B = 2, \;\; C = -\frac{2\pi}{3}, \;\; D = 0$

$$s(t) = 5 \cdot sen\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Caso 2: $A = -5, \;\; B = 2, \;\; C = -\frac{2\pi}{3}, \;\; D = 0$

$$s(t) = -5 \cdot sen\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Solución b):

b) Valores de t para los que el modelo se anula

Caso 1: $s(t) = 5 \cdot sen\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right)$

$$0 = 5 \cdot sen\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 0 = sen\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \left(2t + \frac{2\pi}{3}\right) = 0 + 2k\pi \wedge \left(2t + \frac{2\pi}{3}\right) = \pi + 2k\pi, \quad con\ k \in \mathbb{Z}_0^+$$

$$\Rightarrow t = -\frac{\pi}{3} + k\pi \ \wedge \ t = \frac{\pi}{6} + k\pi\,, \qquad con\ k \in \mathbb{Z}_0^+$$

Caso 2: $s(t) = -5 \cdot sen\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right)$

$$0 = -5 \cdot sen\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 0 = sen\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \left(2t + \frac{2\pi}{3}\right) = 0 + 2k\pi \wedge \left(2t + \frac{2\pi}{3}\right) = \pi + 2k\pi, \quad con\ k \in \mathbb{Z}_0^+$$

$$\Rightarrow t = -\frac{\pi}{3} + k\pi \ \wedge \ t = \frac{\pi}{6} + k\pi\,, \qquad con\ k \in \mathbb{Z}_0^+$$

Solución c):

c) Valores de t en que se alcanza el máximo y mínimo.

Caso 1: $s(t) = 5 \cdot sen\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right)$

Máximos

$$5 = 5 \cdot sen\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow 1 = sen\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 2t + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow t = -\frac{\pi}{12} + k\pi \text{, con } k \in \mathbb{Z}_0^+$$

Mínimos

$$-5 = 5 \cdot sen\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow -1 = sen\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 2t + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow t = \frac{5\pi}{12} + k\pi, con\ k \in \mathbb{Z}_0^+$$

Caso 2: $s(t) = -5 \cdot sen\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right)$

Máximos

$$5 = -5 \cdot sen\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow -1 = sen\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 2t + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow t = \frac{5\pi}{12} + k\pi, con\ k \in \mathbb{Z}_0^+$$

Mínimos

$$-5 = -5 \cdot sen\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow 1 = sen\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 2t + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow t = -\frac{\pi}{12} + k\pi \quad con\ k \in \mathbb{Z}_0^+$$

Solución d):

La curva en **azul para el caso 1** y la curva en **naranjo para el caso 2**.