Tutoria 3: Modelación de Funciones

Funciones polinómicas y exponenciales

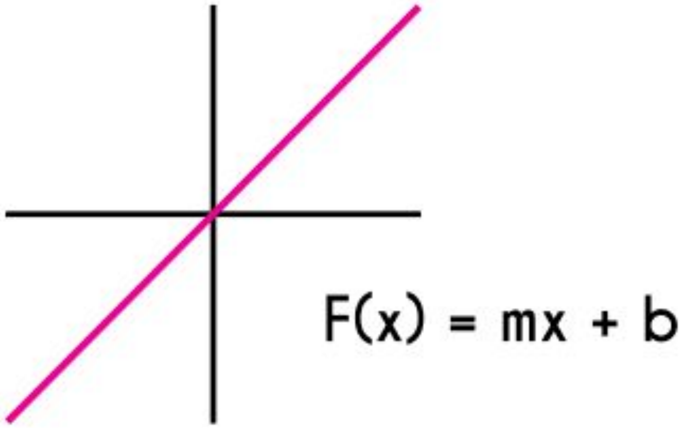
Patricio Sepúlveda

Desarrollo de la tutoría

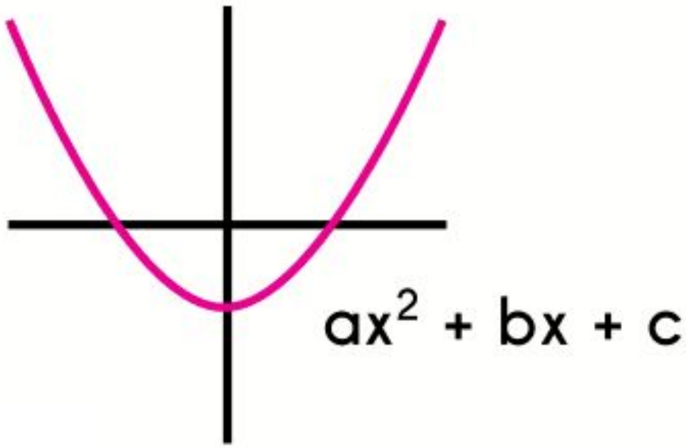
1. Conversarcion
2. Introducción de funciones
3. Función polinómica
4. Función Exponencial
5. Como usar la calculadora
6. Break
7. Ejercicios

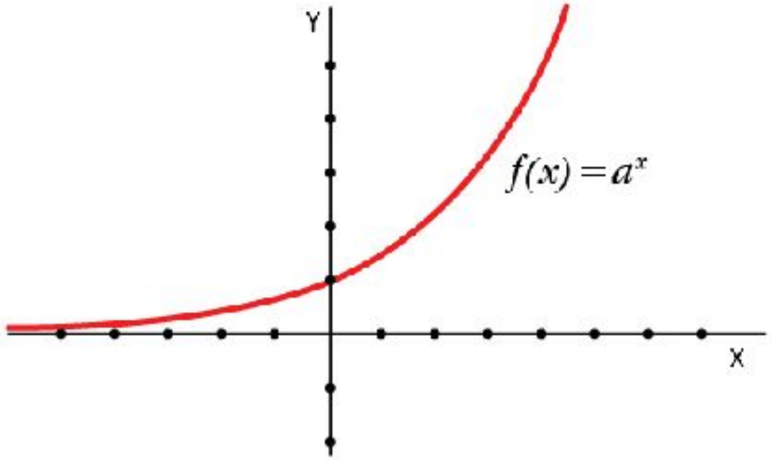
Funciones

Función lineal



Función cuadrática

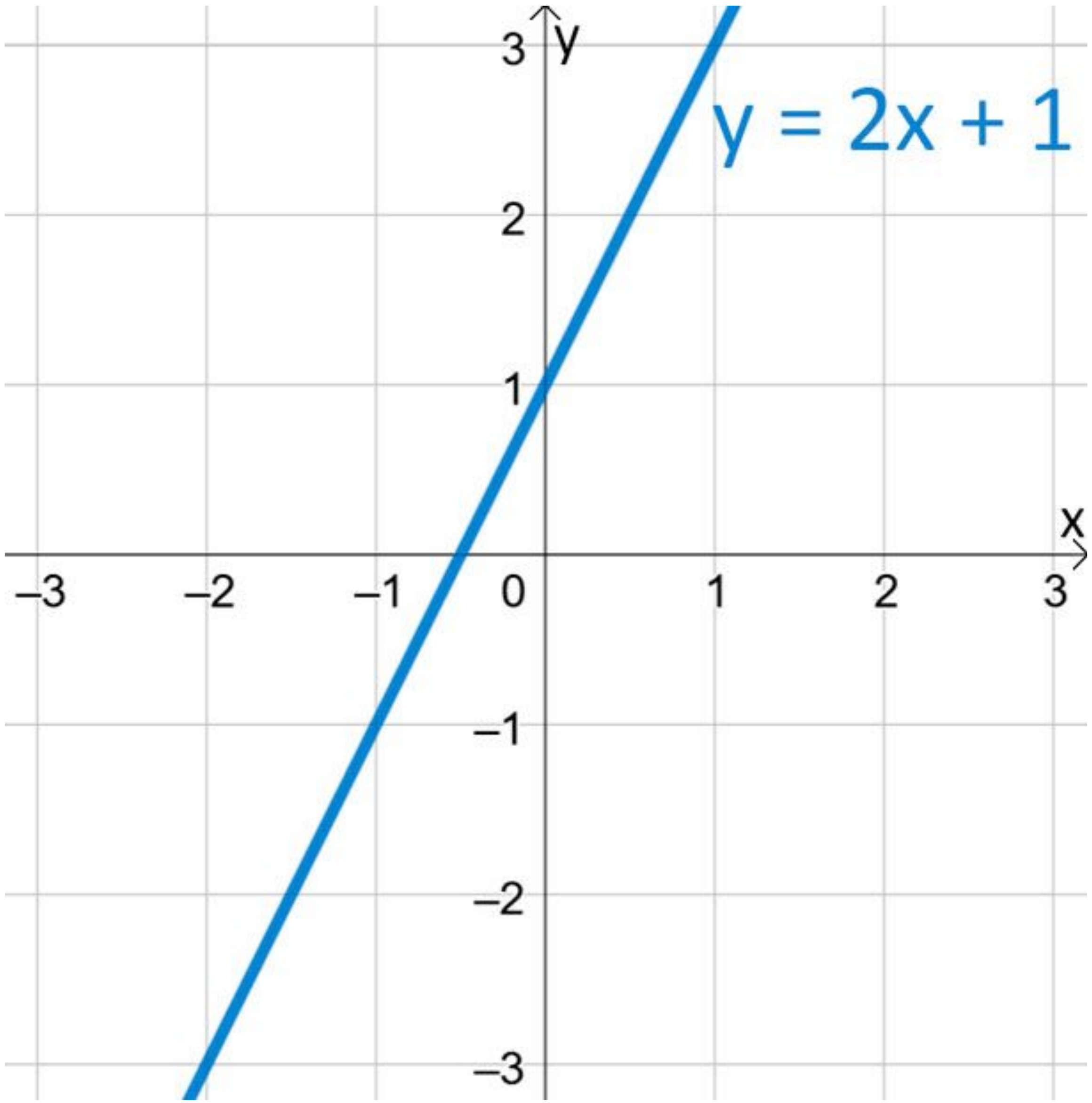




Función Exponencial

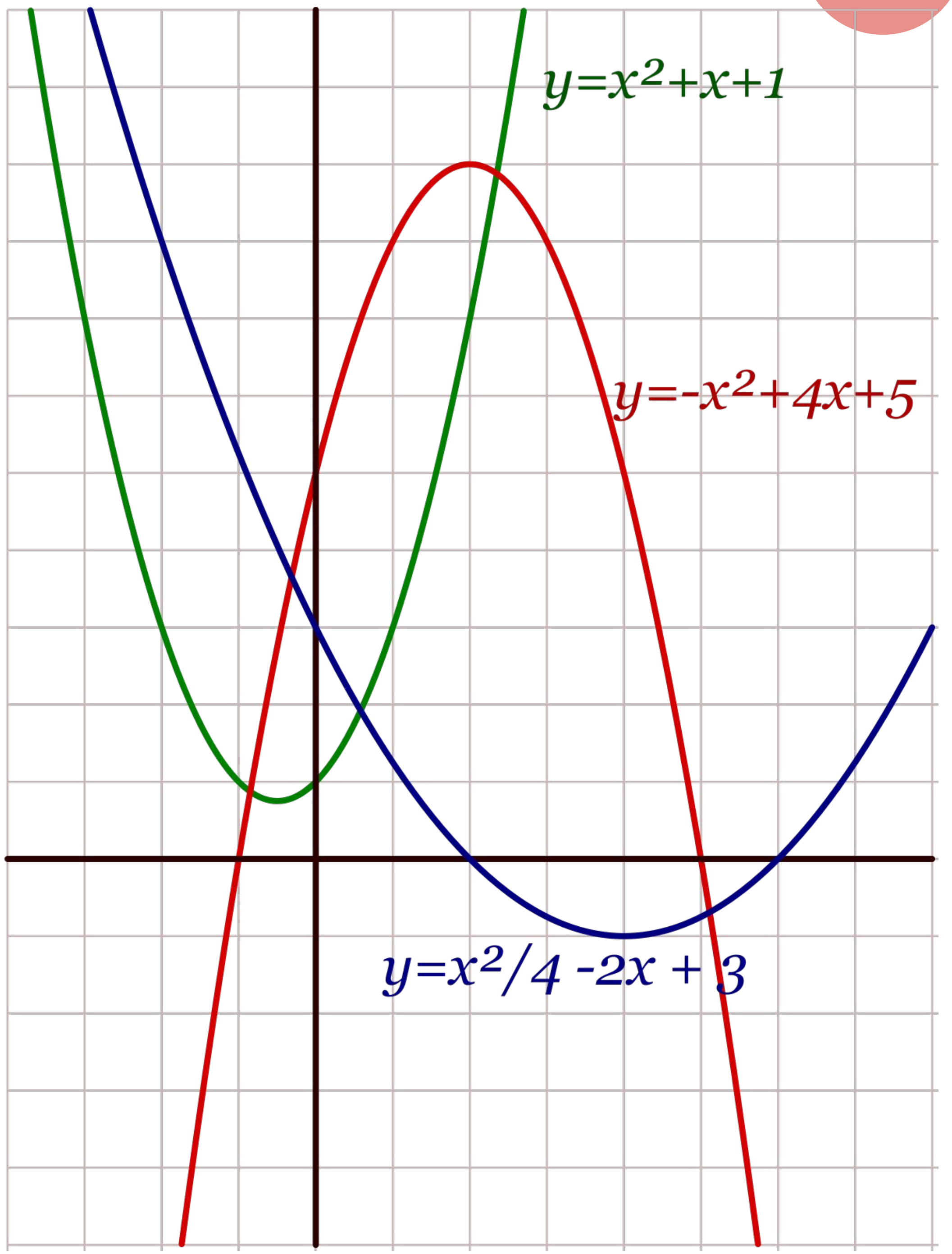
Función lineal

$$y - y_1 = \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)(x - x_1)$$

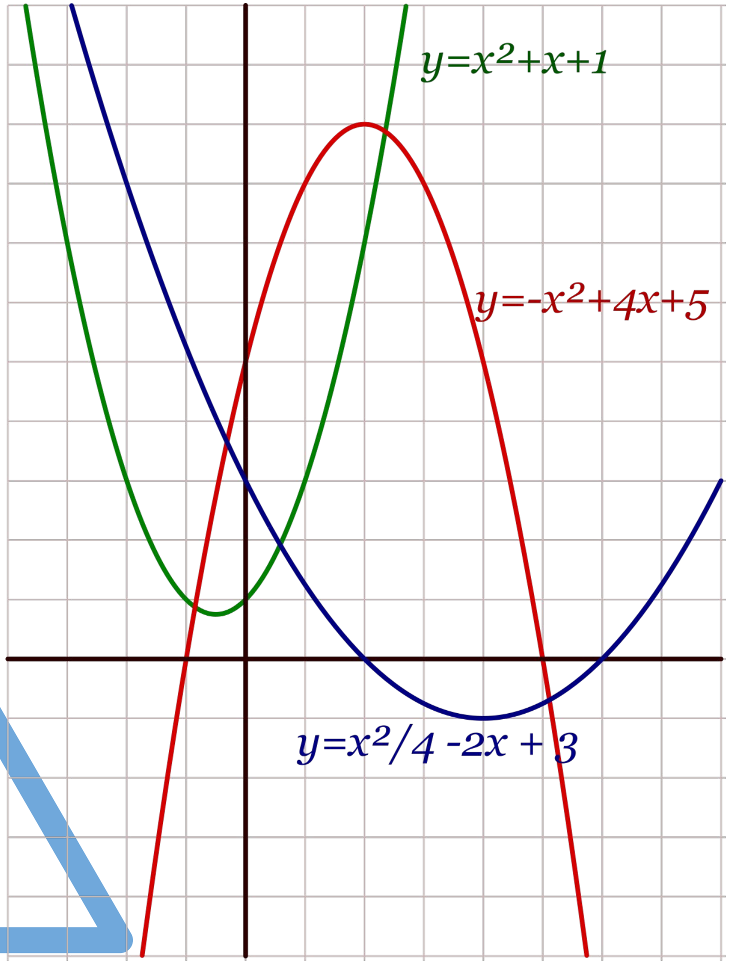


Función Cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Función Cuadrática



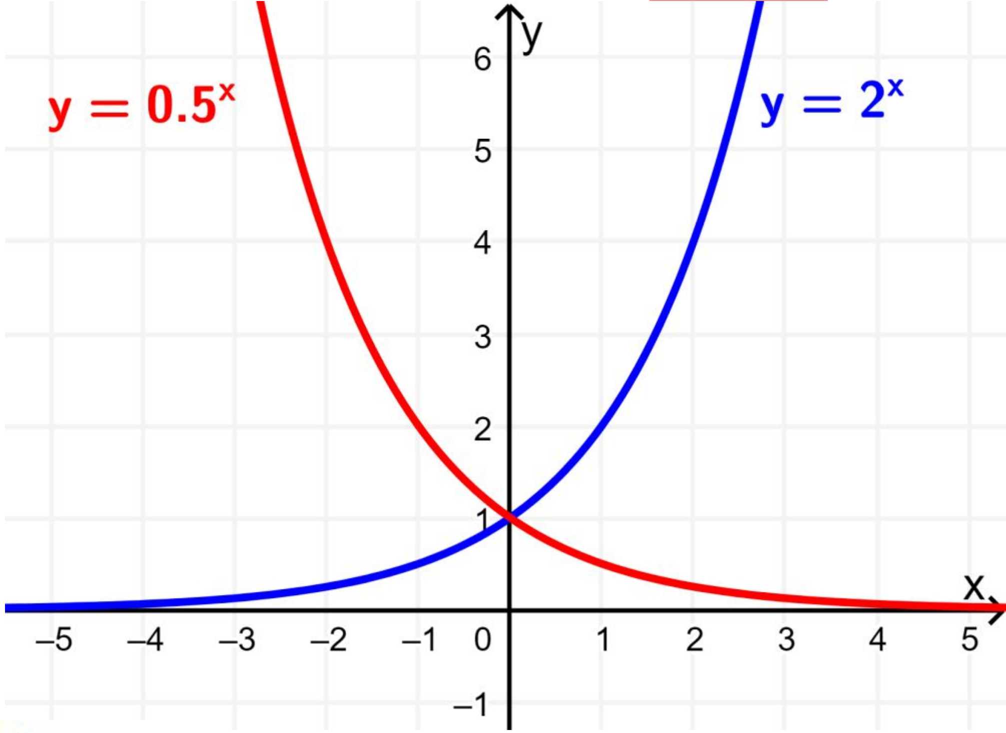
Si $a < 0$ es una parábola **cóncava**, mientras que si $a > 0$ es una parábola **convexa**.

El parámetro c nos indica la intersección de la parábola con el eje de las ordenadas.

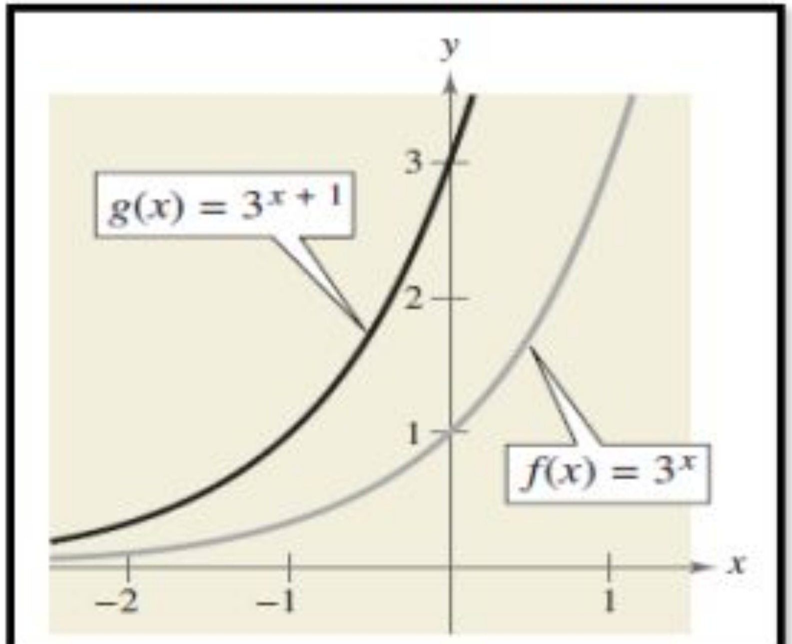
El **discriminante** de la función que se calcula como: $\Delta = b^2 - 4ac$ nos entrega información sobre los **ceros/soluciones/raíces de la función**.

Si $\Delta > 0$, entonces existen dos ceros de la función, es decir, tiene **dos soluciones reales y distintas**.
Si $\Delta = 0$, entonces existe un único cero de la función, es decir, tiene **dos soluciones reales e iguales**.
Si $\Delta < 0$, no existen ceros en la función, es decir, **no tiene soluciones reales**.

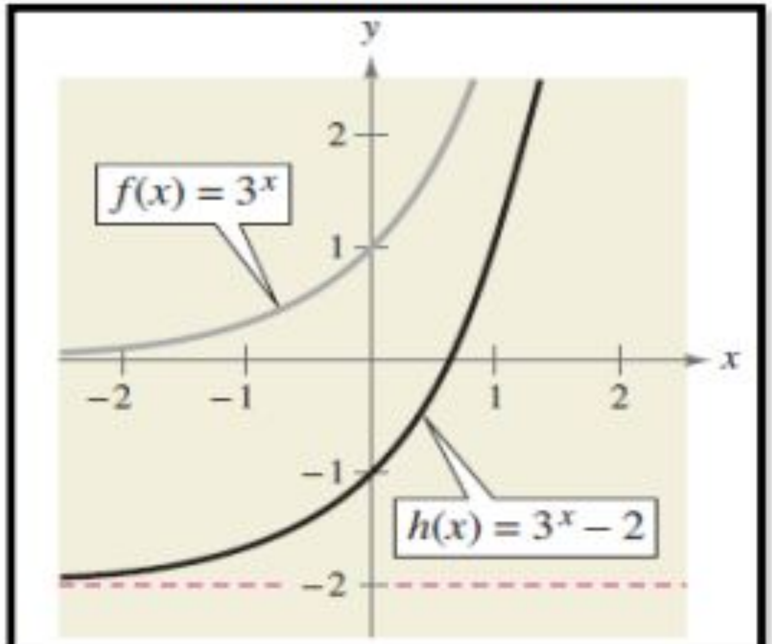
Función Exponencial



Desplazamiento **horizontal**



Desplazamiento **vertical**



Como usar la calculadora

BREAK

Ejercicio 1

1. (20 minutos) Se estima que la cantidad de desperdicios arrojados a un río durante el tiempo sigue un modelo de la forma

$$D(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$$

Se sabe que antes de que comenzara este proceso de contaminación, no había basura en el río. A los 5 días habían 11.5 toneladas de basura y al octavo día 20.8 toneladas.

En función al contexto del problema, determine:

a) El modelo $D(t)$, utilizando la calculadora científica e indicando claramente el valor de a_2, a_1, a_0.
b) Determine la forma canónica del modelo encontrado en el punto anterior.
c) Según $D(t)$ ¿Qué cantidad de desperdicio hay a los 7 días?
d) Grafique la función

Desarrollo

a) El modelo $D(t)$, utilizando la calculadora científica e indicando claramente el valor de $a_2,\ a_1,\ a_0$.

Primero que todo, definimos y describimos las variables involucradas:

t: Tiempo en que se arrojan desperdicios al río [días] (variable independiente)

$D(t)$: Desperdicios arrojados al río [ton] (variable dependiente)

Como sabemos que el modelo se ajusta a la forma cuadrática, procedemos de la siguiente manera:

Con los puntos (0,0) ; (5, 11.5) ; (8, 20.8) o el uso de tabla:

t [días]	D(t) [ton]
0	0
5	11.5
8	20.8

Utilizamos la calculadora y obtenemos que $a_2 = 0.1, \; a_1 = 1.8, \; a_0 = 0.$

Por lo tanto, el modelo es: $D(t) = 0.1t^2 + 1.8t$

b) Determine la forma canónica del modelo encontrado en el punto anterior.

$$D(t) = 0.1t^2 + 1.8t$$

$$D(t) = 0.1\left(t^2 + \frac{1.8}{0.1}t\right)$$

$$D(t) = 0.1(t^2 + 18t)$$

$$D(t) = 0.1(t^2 + 18t + 81 - 81)$$

$$D(t) = 0.1(t^2 + 18t + 9^2) - 0.1 \cdot 81$$

$$D(t) = 0.1(\mathrm{t} + 9)^2 - 8.1$$

Encontramos el término

$$2tb = 18t$$

$$b = \frac{18t}{2t}$$

$$b = 9$$

$$b^2 = 81$$

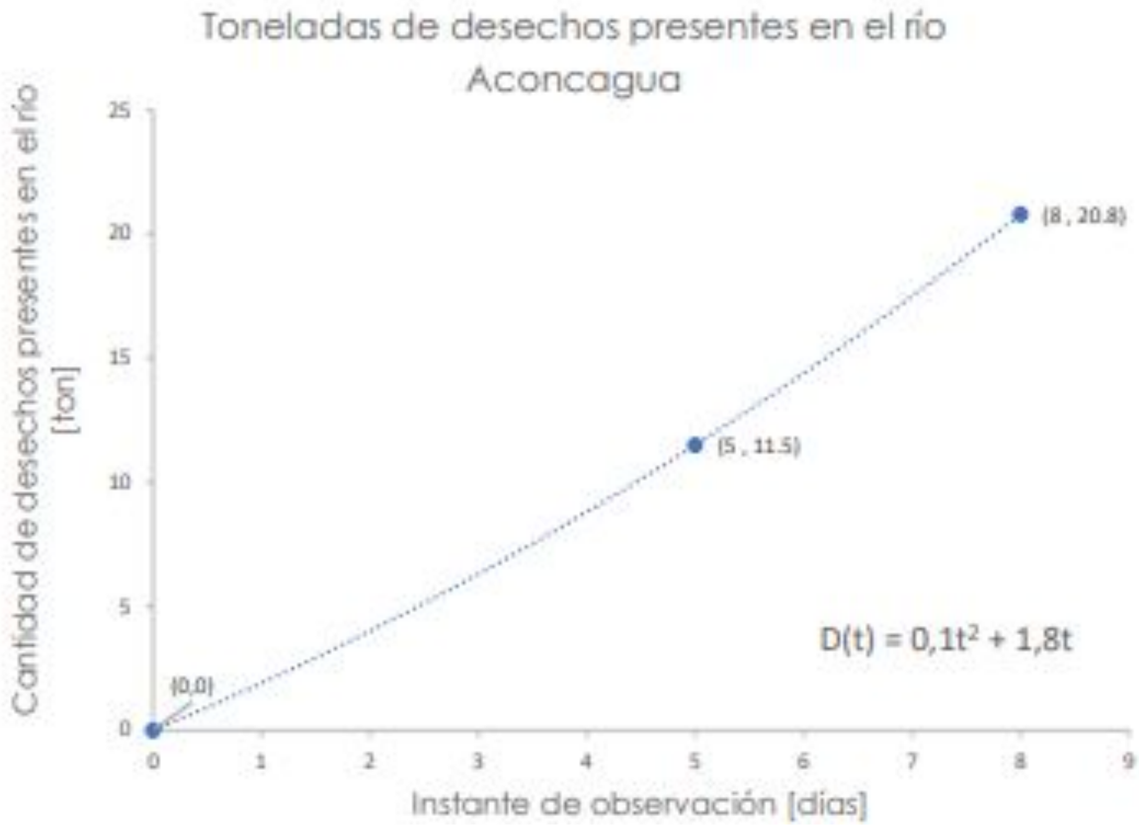
Por lo tanto la forma canónica es $D(t) = 0.1(\mathrm{t} + 9)^2 - 8.1$

c) Según $D(t)$ ¿qué cantidad de desperdicio hay a los 7 días?

$$D(7) = 0.1(7+9)^2 - 8.1 = 17.5$$

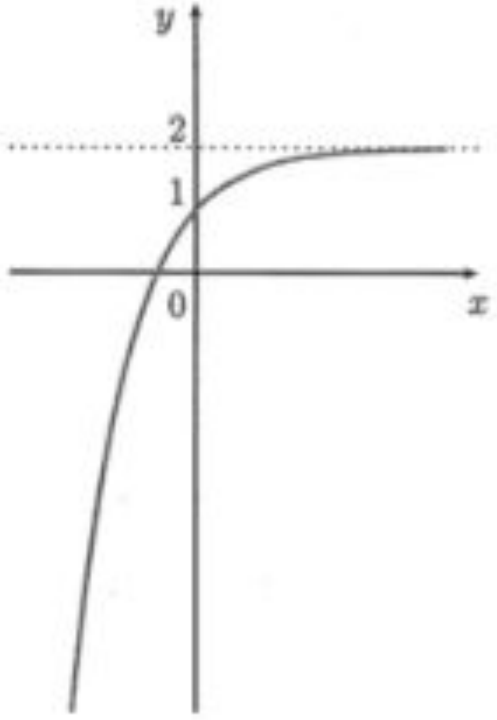
Por lo tanto, a los 7 días hay 17.5 toneladas de desechos.

d) Grafique la función.



Ejercicio 2

Analice el siguiente modelo gráfico y establezca cuál de las siguientes opciones representa el modelo algebraico asociado a dicha curva:



(a) $y(x) = -3^{-x}$

(b) $y(x) = 2 + 3^{x}$

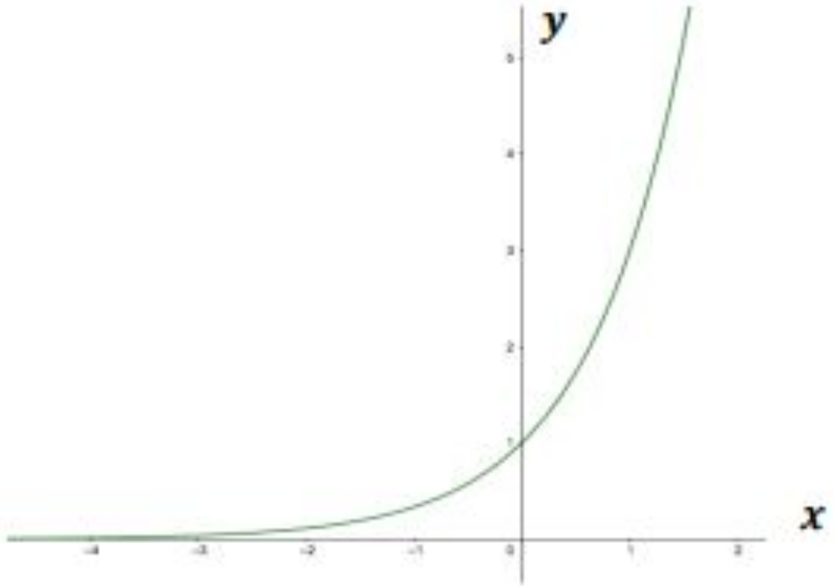
(c) $y(x) = 2 - 3^{x}$

(d) $y(x) = 2 + 3^{-x}$

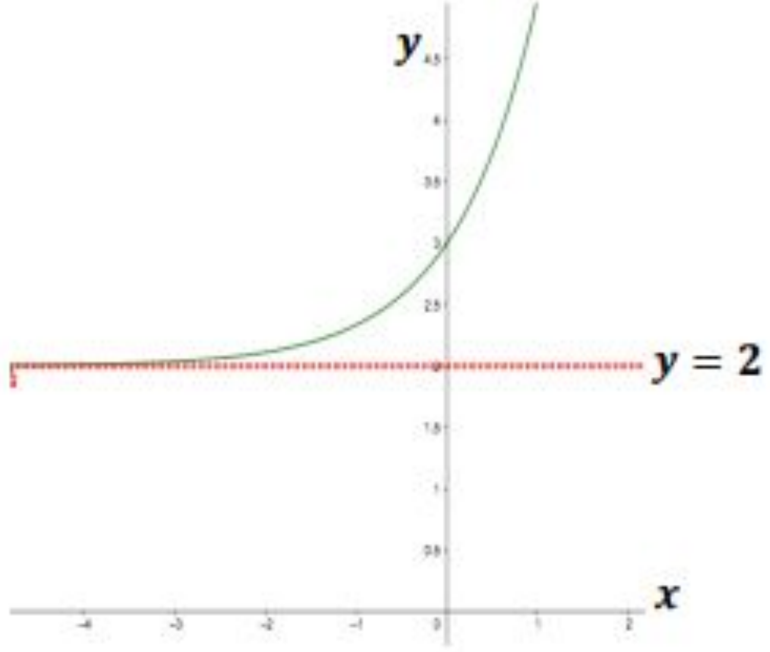
(e) $y(x) = 2 - 3^{-x}$

Desarrollo

Primer paso.
A partir de las opciones que se nos muestran, el modelo se origina de una función original del tipo:
$y(x) = 3^x$. Por cuanto, esta imagen la debemos tener muy clara en nuestra mente:



Segundo paso.
Observamos una **asíntota horizontal en** $y = 2$. Por cuanto, **se descarta la alternativa "a"** $y(x) = -3^{-x}$
Así entonces, la curva quedaría de la siguiente manera: $y(x) = 3^x + 2$

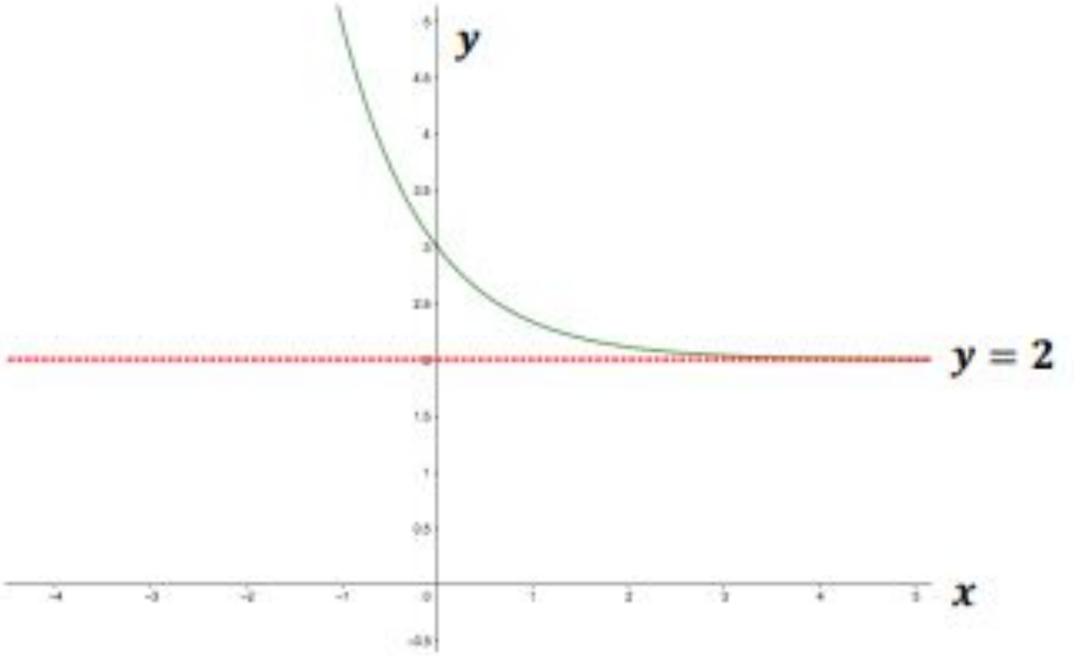


Tercer paso.

Considerando el modelo gráfico, se observa que la curva es decreciente. Por tal motivo, la función adopta el siguiente modelo algebraico

$$y(x) = 3^{-x} + 2.$$

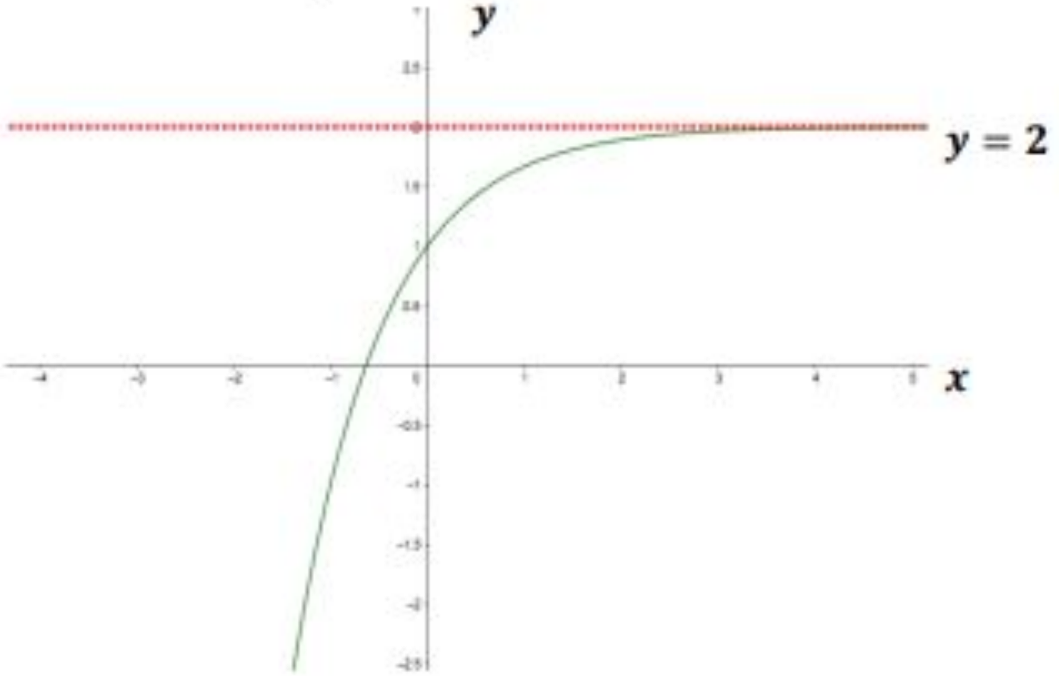
Esto permite descartar las alternativas "b" , "c"



Cuarto paso.

Con los antecedentes que manejamos, las alternativas correctas podrían ser "d" o "e". Sin embargo, se observa que la curva se refleja en torno a su asíntota, por cuanto el modelo algebraico respectivo es:

$\boldsymbol{y(x) = -3^{-x} + 2.}$ Así las cosas, se descarta la alternativa "d" y **la correcta es la alternativa "e"**



Ejercicio 3

La población de cierta comunidad era 10 000 en el año 1980. En el año 2000, se encontró que había crecido y era 20 000. Forma una función exponencial para modelar a la población de la comunidad P que cambia a través del tiempo t.

A- Determine el modelo matemático que más se acomode a los datos.
B- Cuál sería la población al paso de 150 meses.

Desarrollo

Cuando tenemos crecimiento poblacional continuo, podemos modelar a la población con la fórmula general $P = P_0(e^{\lambda t})$, en donde P_0 representa a la población inicial, λ es la constante de crecimiento exponencial y *t* es el tiempo.

Usando la información dada, tenemos que encontrar la constante λ para completar la fórmula. Entonces, tenemos:

$$P = P_0(e^{\lambda t})$$

$$20000 = 10000(e^{20\lambda})$$

$$\frac{20000}{10000} = e^{20\lambda}$$

$$2 = e^{20\lambda}$$

$$\ln(2) = 20\lambda$$

$$\frac{\ln(2)}{20} = \lambda$$

$$0.0347 = \lambda$$

Entonces, podemos modelar al crecimiento poblacional de la comunidad con la fórmula:

$$P = 10000(e^{0.0347t}).$$

B-Reemplazar en la función encontrada t =150 meses

$$P = 10000(e^{0.0347t}).$$

150/12 =12.5 años

$$P=10000(e^{0.0347*12.5}) = 15430$$

Al paso de 150 meses o 15 años y medio el numero de la poblacion alcanzara las 15430 personas