

Tutoría N° 4: Linealización de modelos matemáticos y variaciones medias

Patricio Sepúlveda
Tutoría TIP Introducción al cálculo

Cronograma

1

Concepto de variaciones
medias

2

Como linealizar modelo
potencial

3

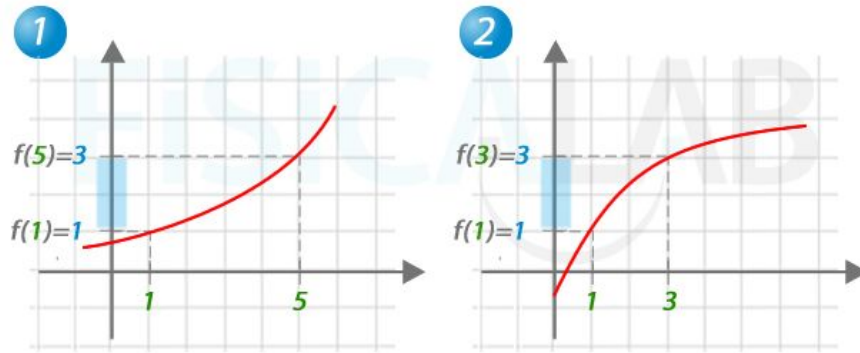
Como linealizar modelo
exponencial

4

Ejercicios aplicados

Variaciones medias

La tasa de variación media de una **función** en un intervalo nos permite estudiar el cambio que experimenta dicha función en el intervalo



La tasa de variación de una función en un intervalo $[a,b]$ nos dice *cuánto cambia la función en dicho intervalo*. En 1, la tasa de variación de la función en el intervalo $[1,5]$ es 2, porque $f(b)-f(a)=f(5)-f(1)=3-1=2$. En 2, la tasa de variación en el intervalo $[1,3]$ también es 2: $f(b)-f(a)=f(3)-f(1)=3-1=2$.

$$T.V.M [a, b] = \frac{\text{Variación de } y}{\text{Variación de } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$T.V.M [a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ejemplo de variaciones medias

Meses	Peso del bebe	Variación media
1	14 kg	$(21-14)/(2-1)=7$
2	21 kg	$(28.2-21)/(3-2)=7.2$
3	28.2kg	$(35.3-28.2)/(4-3)=7.1$
4	35.3 kg	$(42.3-35.3)/(5-4)=7$
5	42.3 kg	$(49.4-42.3)/(6-5)=7.1$
6	49.4 kg	

Linealización modelo potencial. Escala log

$$y = a \cdot x^b$$

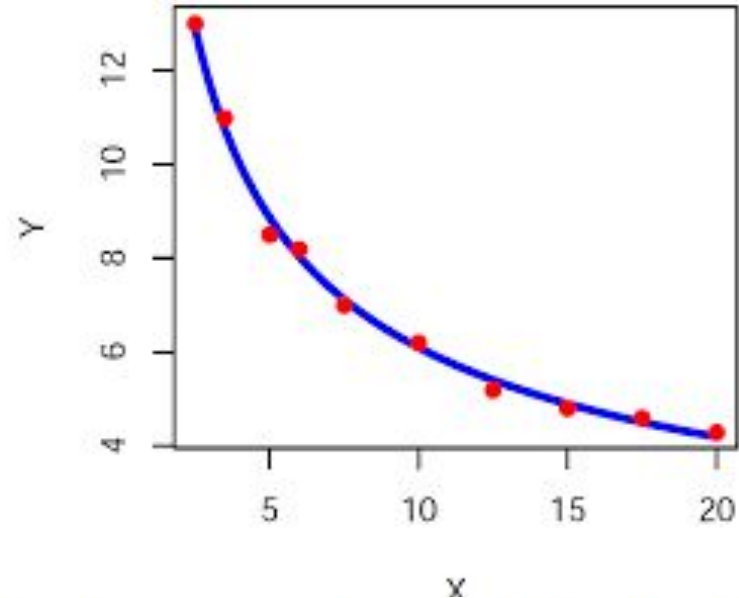
con $a, b > 0$, constantes

$$y = \alpha \cdot x^\beta$$

$$\ln(y) = \ln(\alpha \cdot x^\beta)$$

$$\ln(y) = \ln(\alpha) + \ln(x^\beta)$$

$$\ln(y) = \ln(\alpha) + \beta \ln(x)$$



Con $Z = \ln(y)$, $V = \ln(x)$, $A = \ln(\alpha)$, $B = \beta$, nos queda la **recta de linealización**:

$$\boxed{Z = A + BV}$$

Linealización modelo exponencial. Escala semi Log

$$y = \alpha \cdot e^{\beta x}$$

con $\alpha > 0$ y $\beta \in \mathbb{R} - \{0\}$

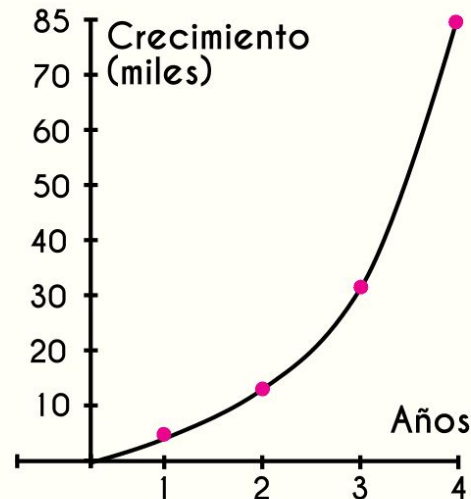
$$y = \alpha \cdot e^{\beta x}$$

$$\ln(y) = \ln(\alpha \cdot e^{\beta x})$$

$$\ln(y) = \ln(\alpha) + \ln(e^{\beta x})$$

$$\ln(y) = \ln(\alpha) + \beta x \cdot \ln(e)$$

$$\ln(y) = \ln(\alpha) + \beta x$$



Con $Z = \ln(y)$, $V = x$, $A = \ln(\alpha)$, $B = \beta$, nos queda la **recta de linealización**:

$$\boxed{Z = A + BV}$$

Linealizar los siguientes modelos

Modelo exponencial

$$y = 5e^{4.5x}$$

Modelo potencial

$$y = 2x^{3,2}$$

BREAK

Ejercicios Aplicados

La siguiente tabla se basa en una relación funcional entre w y r que puede ser de carácter exponencial o potencial:

w	$r(w)$
-1	39.8
-0.5	12.585
0	3.98
0.5	1.2585
1	0.398

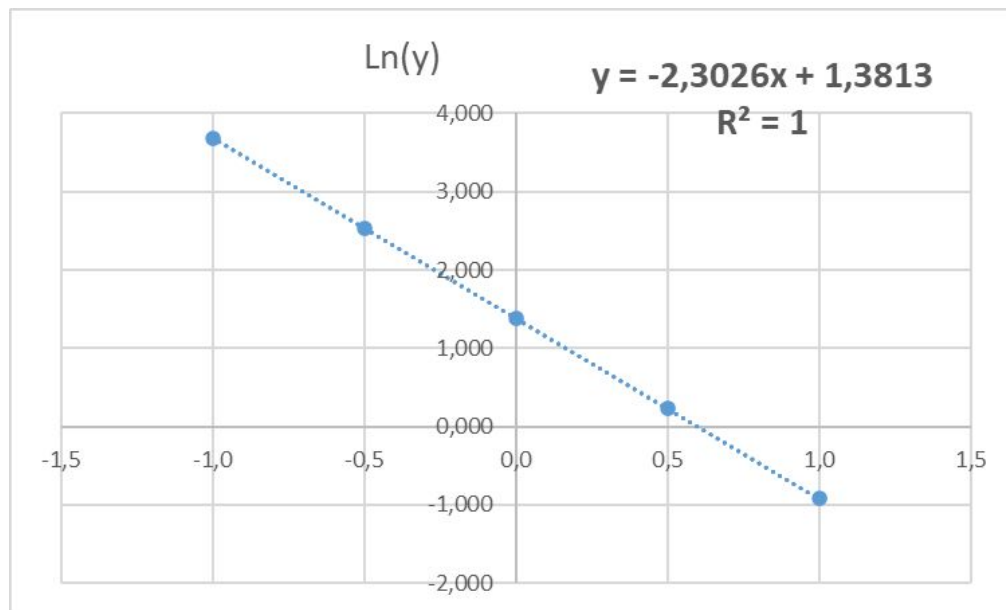
Use una transformación logarítmica adecuada para decidir si los datos se ajustan a un modelo potencial o exponencial:

Desarrollo

$\ln(w)$	$\ln(r(w))$	V.M
Error	3,68386691	Error
Error	2,53250563	Error
Error	1,38128182	Error
0	0,22992054	1,66086488
-0,69314718	-0,92130327	1,32915966

r	$\ln(r(w))$	V.M
-1,0	3,684	-2,303
-0,5	2,533	-2,302
0,0	1,381	-2,303
0,5	0,230	-2,302
1,0	-0,921	

r	$\ln(r(w))$	V.M
-1,0	3,684	-2,303
-0,5	2,533	-2,302
0,0	1,381	-2,303
0,5	0,230	-2,302
1,0	-0,921	



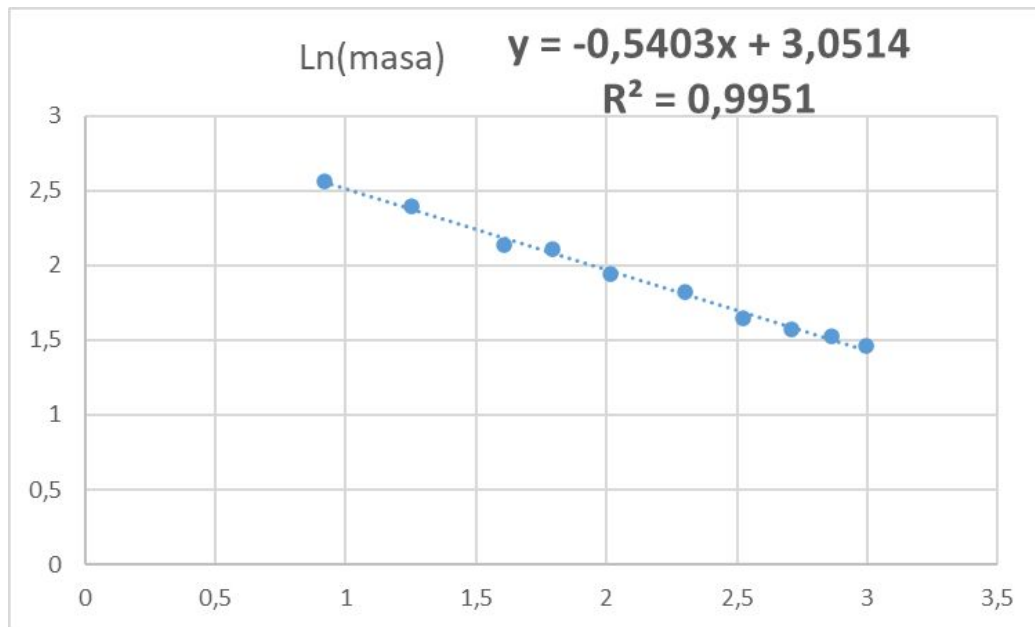
Ejercicio 2

En una industria farmacéutica se necesitan cristalizar, cristales de carbonato de calcio, por cristalización en frío y luego pasarlos por una filtración al vacío para utilizarlos en un preparado magistral. Se tomaron datos a distintas temperaturas medidas en grados celsius de cuanta cantidad de carbonato de calcio era cristalizada medida en miligramos. En base a los datos determinar su linealización sabiendo que es en base logaritmica, su modelo original y en base a este determinar qué masa de carbonato de calcio se obtendria a una temperatura de 271 Kelvin.

Temperatura	Masa
2.5	13
3.5	11
5	8.5
6	8.2
7.5	7
10	6.2
12.5	5.2
15	4.8
17.5	4.6
20	4.3

Ln(temperatura)	Ln(masa)
0,916290732	2,56494936
1,252762968	2,39789527
1,609437912	2,14006616
1,791759469	2,10413415
2,014903021	1,94591015
2,302585093	1,82454929
2,525728644	1,64865863
2,708050201	1,56861592
2,862200881	1,5260563
2,995732274	1,45861502

Desarrollo



$$y = -0,5403x + 3,0514 \quad \text{-----} \rightarrow \ln(y) = B\ln(x) + \ln(A)$$

$$Y = A * X^B$$

$$y = e^{3.0514} * x^{-0.5403}$$

$$Y = e^{3.0514} * x^{-0.5403}$$

Ejercicio 3

Se ha observado el peso en miligramos de un tumor y el tiempo en meses después de ser detectado para establecer si existe alguna relación entre ambas variables. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

t [meses]	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$P(t)$ [mg]	0,45	1,20	3,20	8,54	22,80

En base al contexto, se requiere: [para todos sus cálculos, utilice 5 decimales, sin aproximar]

- Describa las variables (dependiente e independiente)
- Determine si la función representada por las observaciones, se ajustan a un modelo potencial o exponencial. Justifique matemáticamente su respuesta
- Escriba la fórmula que representa al modelo.
- ¿Cuál será el peso del tumor a los 4 meses si éste no se extirpa?

Desarrollo

A- Variable independiente : t , el tiempo en meses

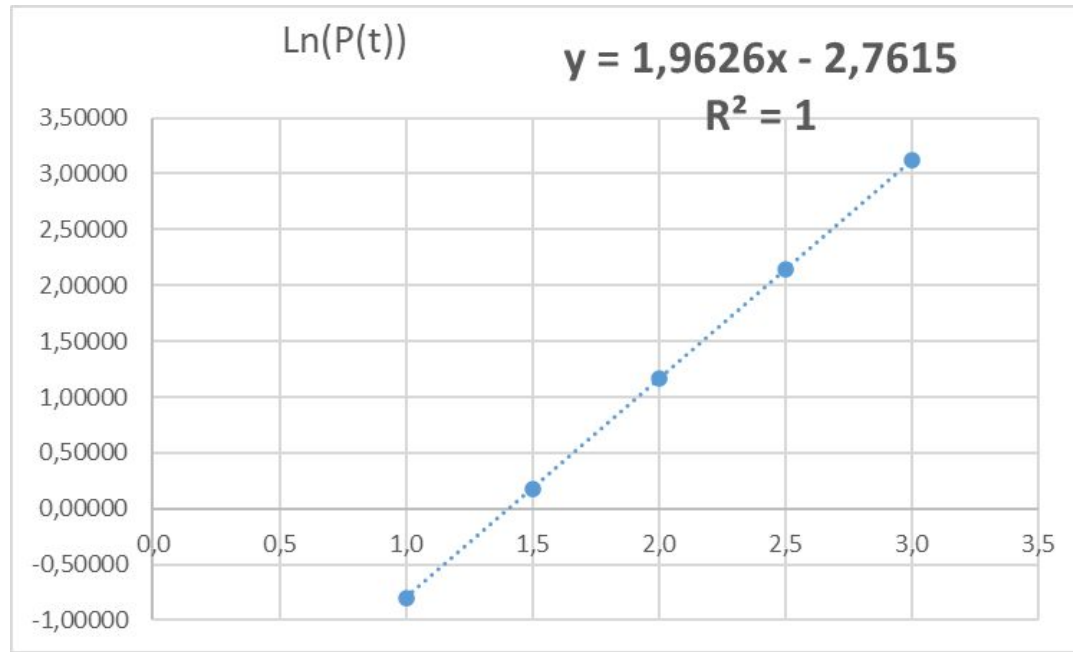
*Variable dependiente : $p(t)$, el peso del tumor en mg

B-

$\ln(t)$	$\ln(p(t))$	VM
0,000000	-0,798508	2,419023
0,405465	0,182322	3,409421
0,693147	1,163151	4,399008
0,916291	2,144761	5,386086
1,098612	3,126761	

t	$\ln(P(t))$	VM
1,0	-0,79851	1,96166
1,5	0,18232	1,96166
2,0	1,16315	1,96322
2,5	2,14476	1,96400
3,0	3,12676	

C-



D- $Y = 1.9626 \cdot 4 - 2.7615$

$Y = 5,0898 \text{ mg}$

$\ln(y) = 5.0898 \longrightarrow e^{5.0898} = 162.35738 \text{ mg}$