Universidad de Chile
Florencia Oyarce L.

Ayudantía Extra A2

Otoño 2023 - EAD

En una facultad de ciencias se reunieron 100 alumnos de 4 carreras de manera aleatoria. De acuerdo a la tabla, responda las siguientes preguntas:

	QF	IA	Q	BQ	Altura Promedio	Alumnos con ramos reprobados	Total
Mujer	21	10	6	16	159 cm ± 2 cm	12	53
Hombre	19	3	11	14	174 cm ± 2 cm	13	47
Probabilidad de egresar en 11 sem.	0,32	0,5	0,31	0,4			

Para ejercicio 5, considerar como "Promedio de alumnos c/ramos reprobados por semestre"

1) Si se sacan 2 alumnas al azar, sin repetición, cuál es la probabilidad de que solo 1 haya reprobado un ramo?

2) Se quiere formar un comité para un centro de alumnos; este debe ser de 5 personas donde deben haber al menos 2 hombres y 2 mujeres; de cuantas maneras se puede hacer esta combinación?

3) Cuál es la probabilidad de, si se saca un alumno o alumna al azar de QF, este mida 160 cm? Y la probabilidad de que mida al al menos 160 cm siendo mujer?

4) Considerando los porcentajes de egreso, cuál es la probabilidad de que 3 alumnos de Química aprueben en 11 semestres?

5) En la tabla se muestran la cantidad de alumnos que han reprobado un ramo por semestre (en promedio). Cual es la probabilidad de que en un semestre cualquiera reprueben como máximo 30 alumnos?

1) $$\underbrace{\frac{12}{53} \cdot \frac{41}{52}}_{\times \quad \checkmark} + \underbrace{\frac{41}{53} \cdot \frac{12}{52}}_{\checkmark \quad \times} = 0{,}357$$

2) $$C^n_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$\underset{2H}{\binom{47}{2}} \cdot \underset{y\ 3H}{\binom{53}{3}} + \underset{3H\ y\ 2M}{\binom{47}{3}\binom{53}{2}}$$

$$\boxed{\frac{47!}{2!\ 45!} \cdot \frac{53!}{3!\ 50!} + \frac{47!}{3!\ 44!} \cdot \frac{53!}{2!\ 51!}}$$

→ En este caso lo dejamos expresado porque el resultado es un n° muy grande.

3) Distribución normal

3.1) $P(X = 160) = 0$ $\longrightarrow$ Para variables continuas no podemos calcular una probabilidad de que dicha variable tome un valor exacto!

3.2) $P(x \geq 160)$

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{160 - 159}{2} = 0$$

$$P(z \geq 0{,}5) = 1 - P(Z \leq 0{,}5)$$ $\longrightarrow$ Buscamos en la tabla

TABLA Probabilidades de una Normal Estándar

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	
0, 0	0, 5000	0, 5040	0, 5080	0, 5120	0, 5160	0, 5199	0,
0, 1	0, 5398	0, 5438	0, 5478	0, 5517	0, 5557	0, 5596	0,
0, 2	0, 5793	0, 5832	0, 5871	0, 5910	0, 5948	0, 5987	0,
0, 3	0, 6179	0, 6217	0, 6255	0, 6293	0, 6331	0, 6368	0,
0, 4	0, 6554	0, 6591	0, 6628	0, 6664	0, 6700	0, 6736	0,
0, 5	0, 6915	0, 6950	0, 6985	0, 7019	0, 7054	0, 7088	0,
0, 6	0, 7257	0, 7291	0, 7324	0, 7357	0, 7389	0, 7422	0,
0, 7	0, 7580	0, 7611	0, 7642	0, 7673	0, 7704	0, 7734	0,
0, 8	0, 7881	0, 7910	0, 7939	0, 7967	0, 7995	0, 8023	0,

$$1 - P(z \leq 0{,}5) = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$$

4) Distribución Binomial

$n = 17$

$k = 3$

$p = 0{,}31$

$$P(x = k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Entonces: $X \sim Bin(17;\, 0{,}31)$

$$P(x = 3) = \binom{17}{3} \cdot 0{,}31^3 \cdot 0{,}69^{14} = 0{,}112326$$

5) Distribución de Poisson

$k = 30$

$\lambda = 25$

$X \sim Poisson(\lambda = 25) = P(x \leq 30)$

$$P(x = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

$\longrightarrow$ Puede desarrollarse de 2 formas:

I) Calculando, mediante la fórmula, todas las probabilidades, de 0 a 30, y sumarlas ($P(x=0) + P(x=1) \ldots + P(x=30)$)

II) Recurriendo a la tabla, así:

Tabla D.4: DISTRIBUCIÓN DE POISSON: F(x)

$\lambda=\mu$ / x	20,5	21	21,5	22	22,5	23	23,5	24	24,5	25	25,5	26	26,5	27
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
6	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
7	0,0006	0,0004	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
8	0,0015	0,0011	0,0008	0,0006	0,0004	0,0003	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
9	0,0037	0,0028	0,0020	0,0015	0,0011	0,0008	0,0006	0,0004	0,0003	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001
10	0,0082	0,0063	0,0047	0,0035	0,0027	0,0020	0,0015	0,0011	0,0008	0,0006	0,0004	0,0003	0,0002	0,0002
11	0,0167	0,0129	0,0099	0,0076	0,0058	0,0044	0,0033	0,0025	0,0019	0,0014	0,0011	0,0008	0,0006	0,0004
12	0,0310	0,0245	0,0193	0,0151	0,0118	0,0091	0,0070	0,0054	0,0041	0,0031	0,0024	0,0018	0,0014	0,0010
13	0,0537	0,0434	0,0348	0,0278	0,0221	0,0174	0,0137	0,0107	0,0083	0,0065	0,0050	0,0038	0,0029	0,0022
14	0,0869	0,0716	0,0586	0,0477	0,0386	0,0311	0,0249	0,0198	0,0157	0,0124	0,0097	0,0076	0,0059	0,0046
15	0,1323	0,1111	0,0927	0,0769	0,0634	0,0520	0,0424	0,0344	0,0278	0,0223	0,0178	0,0142	0,0112	0,0088
16	0,1904	0,1629	0,1385	0,1170	0,0983	0,0821	0,0681	0,0563	0,0462	0,0377	0,0307	0,0248	0,0200	0,0160
17	0,2605	0,2270	0,1965	0,1690	0,1445	0,1228	0,1037	0,0871	0,0728	0,0605	0,0500	0,0411	0,0336	0,0274
18	0,3403	0,3017	0,2657	0,2325	0,2022	0,1748	0,1502	0,1283	0,1090	0,0920	0,0773	0,0646	0,0537	0,0445
19	0,4265	0,3843	0,3440	0,3060	0,2705	0,2377	0,2076	0,1803	0,1556	0,1336	0,1140	0,0968	0,0818	0,0687
20	0,5148	0,4710	0,4282	0,3869	0,3474	0,3101	0,2751	0,2426	0,2128	0,1855	0,1608	0,1387	0,1189	0,1015
21	0,6010	0,5577	0,5144	0,4716	0,4298	0,3894	0,3507	0,3139	0,2794	0,2473	0,2176	0,1905	0,1658	0,1436
22	0,6813	0,6405	0,5987	0,5564	0,5141	0,4723	0,4313	0,3917	0,3537	0,3175	0,2835	0,2517	0,2223	0,1952
23	0,7528	0,7160	0,6774	0,6374	0,5965	0,5551	0,5138	0,4728	0,4328	0,3939	0,3565	0,3209	0,2874	0,2559
24	0,8140	0,7822	0,7480	0,7117	0,6738	0,6346	0,5945	0,5540	0,5135	0,4734	0,4341	0,3959	0,3592	0,3242
25	0,8641	0,8377	0,8086	0,7771	0,7433	0,7077	0,6704	0,6319	0,5926	0,5529	0,5132	0,4739	0,4354	0,3979
26	0,9037	0,8826	0,8588	0,8324	0,8035	0,7723	0,7390	0,7038	0,6672	0,6294	0,5908	0,5519	0,5130	0,4744
27	0,9337	0,9175	0,8988	0,8775	0,8537	0,8274	0,7987	0,7677	0,7348	0,7002	0,6641	0,6270	0,5892	0,5509
28	0,9557	0,9436	0,9294	0,9129	0,8940	0,8726	0,8488	0,8225	0,7940	0,7634	0,7309	0,6967	0,6613	0,6247
29	0,9712	0,9626	0,9522	0,9398	0,9253	0,9085	0,8894	0,8679	0,8440	0,8179	0,7896	0,7593	0,7271	0,6935
30	0,9818	0,9758	0,9685	0,9595	0,9487	0,9360	0,9212	0,9042	0,8849	0,8633	0,8395	0,8134	0,7853	0,7553
31	0,9888	0,9848	0,9798	0,9735	0,9657	0,9564	0,9453	0,9322	0,9172	0,8999	0,8805	0,8589	0,8351	0,8092
32	0,9933	0,9907	0,9874	0,9831	0,9777	0,9711	0,9630	0,9533	0,9419	0,9285	0,9132	0,8958	0,8763	0,8546
33	0,9961	0,9945	0,9923	0,9895	0,9859	0,9813	0,9756	0,9686	0,9602	0,9502	0,9385	0,9249	0,9094	0,8918
34	0,9978	0,9968	0,9954	0,9936	0,9913	0,9882	0,9843	0,9794	0,9734	0,9662	0,9574	0,9472	0,9352	0,9213
35	0,9988	0,9982	0,9974	0,9962	0,9947	0,9927	0,9902	0,9868	0,9827	0,9775	0,9713	0,9637	0,9547	0,9441
36	0,9993	0,9990	0,9985	0,9978	0,9969	0,9956	0,9940	0,9918	0,9890	0,9854	0,9810	0,9756	0,9691	0,9612

* La tabla subida a material docente no incluye valores de λ superiores a 20, por eso se utilizó esta, sin embargo, es lo mismo.

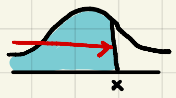
$$P(X \leq 30) = 0{,}8633$$

Resumen : Distribuciones Probabilísticas

1) Distribución Normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Fórmula : $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \rightarrow Z \sim N(0,1)$

↳ NO se puede calcular una probabilidad exacta (ya que es para V.A. continuas)

↳ La tabla entrega Probabilidades acumuladas 

↳ La notación "<" o ">", es igual a "≤" o "≥" (ej: $P(a \leq x \leq b) = P(a < x < b)$)

Pasos para lectura de tabla:

I) Identificar x, μ y σ e ingresarlos a la fórmula. Resolver. (ej: $X \sim N(15, 25)$; Probabilidad que la var. sea menor a 12)

$P\left(z < \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{12-15}{5}\right) = P(z < -0{,}6) \rightarrow 1 - P(z < 0{,}6)$

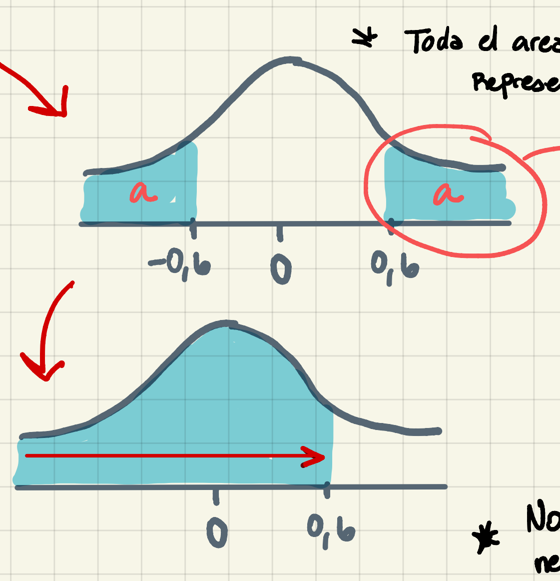
II) El valor obtenido, 0,6, se busca de la sig. manera:

0,6|00

TABLA Probabilidades de una Normal Estándar

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,

* Toda el area bajo la curva representa 1



se busca esto porque no se pueden encontrar Prob. negativas en la tabla

$1 - P(z < 0{,}6) =$

* No existen valores negativos de probabilidad, este ejemplo es para ilustrar la prob. acumulada

III) Ya que la probabilidad es $1 - P(z < 0{,}6)$, entonces:

$1 - P(0{,}7257) = 0{,}2743$ ∴ la Prob. de que V.A. sea menor a 12 es de 0,2743.

2) Distribución Binomial $X \sim Bin(n, p)$

Fórmula: $P(X = k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}} \cdot p^k \cdot \underbrace{(1-p)}_{\text{Puede escribirse como "q"}}{}^{n-k}$

$n \rightarrow$ n° de ensayos
$k \rightarrow$ "exitos"
$p \rightarrow$ Probabilidad de que ocurra k
$q \rightarrow (1-p) \rightarrow$ Prob. de que no ocurra k.

↳ Para V.A. discretas que involucren proporciones o conteos acotados

↳ Situaciones donde la variable es dicotómica, es decir, solo hay dos resultados para el evento: éxito o fracaso, Ausencia o presencia (de una caract.), etc...

↳ La tabla entrega prob. acumuladas; se recurre a ésta cuando se habla de probabilidades que involucren "≤" o "≥", no así cuando se pide un valor determinado (=).

Pasos para lectura de tabla:

1) Identificar n, k y p (ej: la probabilidad de que un alumno repruebe FQ 1 es de 0,4 ; si 20 alumnos rinden FQ este semestre, cuál es la probabilidad de que al menos aprueben 10?)

$X \sim Bin(20, 0{,}4) = P(x \geq 10) \longrightarrow 1 - P(x \leq 9)$

II) Una vez identificado eso, vamos a la tabla:

Probabilidad de éxito

n° de ensayos

n° de éxitos (k)

n	X	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.5
20	5	1.0000	0.9997	0.9887	0.9327	0.8042	0.6172	0.4164	0.2454	0.1256	0.0553	0.02
	6	1.0000	1.0000	0.9976	0.9781	0.9133	0.7858	0.6080	0.4166	0.2500	0.1299	0.05
	7	1.0000	1.0000	0.9996	0.9941	0.9679	0.8982	0.7723	0.6010	0.4159	0.2520	0.13
	8	1.0000	1.0000	0.9999	0.9987	0.9900	0.9591	0.8867	0.7624	0.5956	0.4143	0.25
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9974	0.9861	0.9520	0.8782	0.7553	0.5914	0.41
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9961	0.9829	0.9468	0.8725	0.7507	0.58
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9949	0.9804	0.9435	0.8692	0.74
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987	0.9940	0.9790	0.9420	0.86
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9935	0.9786	0.94
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9936	0.97
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.99
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.99
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.99
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.00
	19	1.0001	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.00
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.00
25	0	0.7778	0.2774	0.0718	0.0172	0.0038	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.00
	1	0.9742	0.6424	0.2712	0.0931	0.0274	0.0070	0.0016	0.0003	0.0001	0.0000	0.00

* Nota: en este caso, se utilizó $k=9$ dado que la prob. se escribe con "$\geq$" inicialmente; en caso de haber sido $P(X \leq 10)$, se hubiese buscado $k=10$.

III) ya que la probabilidad es $1-P(x \leq 9)$:

$$1-P(X \leq 9) = 1-0{,}9974 = 0{,}0026$$

3) Distribución de Poisson $X \sim Poisson(\lambda)$

Formula: $P(X=k) = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$

$\lambda \longrightarrow$ Promedio de ocurrencia de un evento en det. período de tiempo

$k \longrightarrow$ Ocurrencia del evento que se busca (usualmente poco frecuente).

↳ Se especializa en probabilidades de sucesos extraños (baja ocurrencia) en un período de tiempo.

↳ Al igual que la distribución Binomial, y como fue demostrado en el ej. n° 5, existen 2 formas de determinar esta probabilidad; a diferencia de $X \sim Bin$, ésta se puede utilizar sin necesidad de haber un "$\leq$" ó "$\geq$"

Ejemplo y pasos en ejercicio 5