Editado por
Verónica Gruenberg Stern

Apuntes de

MAT022 - Cálculo

vs. 2do.sem.2013

Prefacio

Estimados alumnos:

Este texto, en su segunda versión en formato de libro, es el resultado del esfuerzo de muchos colegas del Departamento de Matemática de la Universidad Técnica Federico Santa María, que a lo largo del tiempo han dictado este curso. Varias secciones incluyen, además de los propios, apuntes de profesores del Campus Santiago, especialmente de **Juan Bahamodes, Nelson Cifuentes, Roberto Geraldo, Leonel Guerrero** y **Erick Inda**. En esta versión, éstos también han sido editados por quien suscribe para mantener un enfoque uniforme. Además, nos ha parecido pertinente que su estructura incorpore no solo los contenidos que se espera conozcan en profundidad, sino que también varios ejercicios resueltos y propuestos, que esperamos resuelvan con entusiasmo, para lograr mejores aprendizajes. Hemos optado también por incluir muchas demostraciones de los teoremas que verán en clases. No es el objetivo que todas ellas sean vistas en clases. Más bien, queremos que los alumnos interesados tengan la posibilidad de profundizar en la aprehensión de los conceptos involucrados, y de comprender cómo se realiza la construcción del conocimiento matemático. Esperamos que esta segunda versión, aún preliminar, les sea de utilidad, y que cualquier error que encuentren (por cierto, involuntario), sea informado al mail indicado abajo.

El apunte está estructurado y ordenado en la forma de «clases» correlativas, estimando el tiempo necesario para tratar los temas que comprende el programa, clase a clase. Esto no los debe llevar a equívocos: el número total de clases en un semestre es superior al número de clases que aparecen en este texto. Esto se debe a que no se incluyeron aquí, de manera numerada, las clases de ejercicios que se intercalan en algunos momentos, de acuerdo al calendario de certámenes de cada semestre, aquellas que se programan para subsanar eventuales falencias detectadas y a las necesidades específicas que el profesor de cada curso determine. Además, notarán que algunas clases tienen más páginas que otras, y que, probablemente no verán en clases todos los ejercicios que se mencionan por sesión. Hemos preferido la incorporación de muchos ejercicios para que dispongan de una mayor cantidad de ejemplos para ilustrar los conceptos, y apoyarlos en su estudio personal.

Es importante que tengan presente que este apunte no reemplaza las clases. Para lograr un buen aprendizaje de los conceptos e ideas que considera este curso, es fundamental que asistan a clases, participen activamente en ella, estudien de manera metódica, ojalá estructurando un horario de estudio diario, preparándose siempre para su próxima clase y que planteen a sus profesores cualquier duda conceptual que les surja. Si sus dudas aparecen cuando están resolviendo un problema, revisen los apuntes (éstos y los personales de clases), ya que es posible que haya algún concepto que no ha comprendido cabalmente, reintente, aplique muchas alternativas de solución e intercambie opiniones y métodos con sus compañeros. Esta forma de estudiar les entregará una comprensión más profunda de las ideas y conceptos que estudiaremos en este curso y, por cierto, tendrán un aprendizaje de calidad.

Deseándoles la mejor experiencia de aprendizaje y que su trabajo sistemático rinda los frutos que esperan, los invita a continuar esta aventura de aprender, muy cordialmente,

Verónica Gruenberg Stern

veronica.gruenberg@usm.cl

Índice general

Capítulo 1

La Diferencial

1.1. CLASE 1: La Diferencial y la Linealización

1.1.1. Introducción

Muchas veces, tanto en el ámbito de la ingeniería como en el de la matemática, es necesario realizar estimaciones, determinar la magnitud de los errores al realizar aproximaciones en mediciones, aproximar valores al evaluar una función, o calcular la variación que se produce en la variable dependiente cuando la variable independiente cambia en una cantidad relativamente pequeña. La *diferencial* permite lo anterior. Recordemos que si una función es diferenciable en $x = a$ entonces el límite que define esta derivada existe, es decir

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R}$$

Esto nos dice que para valores de x «cercanos» a a, el cuociente $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ es *aproximadamente igual a* $f'(a)$, lo que escribimos como

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \approx f'(a)$$

De esta forma podemos decir que para valores de x cercanos a a se cumple

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

Esta sencilla observación sugiere una forma de estimar el *cambio* en los valores de salida que produce una función cuando los valores de entrada varían muy poco. Esta estimación, como se vio arriba, depende de la derivada de f e introduce el concepto de *diferencial*.

1.1.2. La diferencial

Considere el punto $P = \big(a, f(a)\big)$ sobre la gráfica de una función diferenciable $f(x)$. La recta tangente al gráfico de f en el punto P está dada por

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Como $f(a)$ y $f'(a)$ son constantes, la función $p(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ es un polinomio de grado ≤ 1.

Considere un pequeño número Δx y como entrada a la función, el valor $a+\Delta x$ (que por lo tanto está cercano a a). Entonces

$$\begin{aligned} p(a+\Delta x) &= f(a)+f'(a)(a+\Delta x-a) \\ &= f(a)+f'(a)\Delta x \end{aligned}$$

Definimos la «variación» de f o el «cambio» en f como

$$\Delta f \equiv f(a+\Delta x)-f(a)$$

de donde

$$f(a+\Delta x)=f(a)+\Delta f$$

OBSERVACIÓN: En clases verá la representación gráfica de las cantidades anteriores para una mejor comprensión.

EJEMPLO 1.1.1 Calcular $f(a+\Delta x)$ y $p(a+\Delta x)$ cuando $f(x)=x^3$, $a=1$, $\Delta x=0,1$.
Solución: Como $a+\Delta x=1{,}1$ se sigue

$$f(1{,}1)=(1{,}1)^3=1{,}331 \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} p(1{,}1) &= f(1)+f'(1)\cdot(0{,}1) \\ &= 1+3(0{,}1) \\ &= 1{,}3 \end{aligned}$$

Notar que $p(a+\Delta x)$ es una «buena» aproximación de $f(a+\Delta x)$.

Las cantidades $p(a+\Delta x)=f(a)+f'(a)\Delta x$ y $f(a+\Delta x)=f(a)+\Delta f$ son parecidas si y solo si $f'(a)\Delta x$ y Δf son parecidas. La expresión $f'(a)\Delta x$ se llama *diferencial* y, como veremos, es una aproximación de Δf.

DEFINICIÓN 1.1.1 Sea $f: A\subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $x\mapsto y=f(x)$ una función diferenciable, y sea $a\in A$. Llamaremos *diferencial* de f en a a la cantidad $f'(a)\Delta x$, que denotaremos por df o dy.

OBSERVACIÓN:

1. En la definición de diferencial hay dos variables independientes: a y Δx.

2. Mostremos que df es, en efecto, una aproximación de Δf:

$$\begin{aligned}\text{Error de aproximación} &= \Delta f - df \\ &= f(a+\Delta x) - f(a) - f'(a)\Delta x \\ &= \left(\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} - f'(a)\right)\Delta x\end{aligned}$$

   Luego, si $\Delta x \to 0$ entonces
$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} - f'(a) \to 0$$
   Se sigue entonces que si Δx es «pequeño», el error en la aproximación tiende a cero.

3. Es frecuente utilizar x en lugar de a en la definición de diferencial, de esta forma se escribe

$$df = f'(x)\Delta x$$

   donde x y Δx son independientes.

4. Note que si se conoce una expresión para la derivada de inmediato conocemos una expresión para la diferencial. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} d\left(x^3\right) &= 3x^2\Delta x \\ d(\tan x) &= \sec^2 x \Delta x \\ d(x) &= \Delta x \end{aligned}$$

   Debido a la última expresión, se acostumbra escribir $dx = \Delta x$ y la diferencial de f se escribe

$$df = f'(x)\,dx \qquad \text{o} \qquad dy = f'(x)\,dx$$

   Note que los símbolos dy y dx tienen un significado propio por lo que tiene sentido dividir por dx; de aquí surge la notación
$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$
   para las derivadas, en donde estamos mirando a dy/dx efectivamente como un cuociente de diferenciales.

TEOREMA 1.1.1 Sean f y g funciones diferenciables; entonces

1. $d(f+g) = df + dg$
2. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $d(\alpha f) = \alpha\, df$
3. $d(fg) = (df)\,g + f\,(dg)$
4. $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(df)g - f(dg)}{g^2}$
5. $d(f \circ g) = f'(g)\,dg$

DEFINICIÓN 1.1.2 El polinomio $p(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ se llama **linealización** de $f(x)$ en a, y representa la mejor aproximación mediante una recta que se puede hacer para f cerca de a.

EJEMPLOS:

1. Encontrar la linealización de $f(x) = \tan x$ en $x = \dfrac{\pi}{4}$.

   Solución: Como $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ y $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$, se tiene que la linealización es

   $$y = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

2. Aproximar el valor de $\sqrt[3]{29}$.

   Solución:

   Utilizando la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 27$ y $\Delta x = 2$, vemos que una buena aproximación para $\sqrt[3]{29}$ es

   $$\begin{aligned} \sqrt[3]{29} &\approx f(27) + f'(27)\Delta x \\ &\approx 3 + \frac{1}{3(3)^2}2 \\ &\approx 3{,}0741 \end{aligned}$$

   El valor aproximado que entrega la calculadora es 3,072317.

1.1.3. Error relativo

Si se comete un error E al aproximar una cantidad Q, el **error relativo** que se comete en la estimación es E/Q. Este error, generalmente, se expresa en forma de porcentaje, en cuyo caso se llama **error porcentual**, y mide qué tan grande es el error comparado con la cantidad que se está midiendo.

EJEMPLO 1.1.2 El error al medir el lado de un cubo es a lo sumo de 1%. ¿Qué porcentaje de error se obtiene al estimar el volumen de un cubo?

Solución: Sea x la longitud del lado del cubo y Δx el error que se comete al aproximar x. Entonces

$$\left|\frac{dx}{x}\right| < 0{,}01$$

Si dV es el error en el volumen del cubo entonces el error relativo al aproximar el volumen es $\left|\dfrac{dV}{V}\right|$.

Pero, como $V = x^3$, entonces $dV = 3x^2\,dx$ de donde $\left|\dfrac{dV}{V}\right| = \left|\dfrac{3x^2\,dx}{x^3}\right| = 3\left|\dfrac{dx}{x}\right| < 0{,}03$

Luego, el error relativo es menor al 3%.

Ejercicios Resueltos

1. El radio de un globo esférico mide 30 [cm] y el error máximo que se comete en su medición es de 0,15 [cm]. *Estimar* el máximo error que se comete al calcular el volumen de la esfera.

   Solución Sea x la medida de la longitud del radio del globo esférico y sea Δx el error que se comete al aproximar x. Entonces
$$\left|\frac{dx}{x}\right| = \frac{0,15}{30} = 0,005$$
   es el error relativo cometido en la medición del radio.

   Como el volumen de la esfera es $V = \frac{4}{3}\pi x^3$ se tiene que
$$\left|\frac{dV}{V}\right| = \left|\frac{4\pi x^2 dx}{\frac{4}{3}\pi x^3}\right| = 3\left|\frac{dx}{x}\right| = 3\frac{0,15}{30} = 0,015$$

   Así, el error máximo que se comete al calcular el volumen de la esfera es de un $1,5\,\%$.

2. Estime los siguientes valores:

   a) $\sqrt{4,002}$

   Solución

   Consideramos $f(x) = \sqrt{x}$, de donde $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\therefore$ $f'(4) = \frac{1}{4}$. En este caso $\Delta x = 0,002$ de donde:
$$\sqrt{4,002} = f(4+0,002) \approx f'(4)\cdot 0,002 + f(4) = \frac{1}{4}\cdot 0,002 + 2 = 2,0005$$

   Notar que $\left|\dfrac{df}{f}\right| = \left|\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right| = \left|\dfrac{dx}{2x}\right| = \dfrac{0,002}{2\cdot 4} = 0,00025$ de donde el error es del orden del $0,025\,\%$. De hecho, es posible ver que una calculadora indica $\sqrt{4,002} = 2,000499937515...$

   b) $\sqrt[3]{28}$

   Solución

   Consideramos $f(x) = \sqrt[3]{x}$, de donde $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

   Como el cubo más cercano a 28 es 27, tomamos $x = 27$ y $\Delta x = 1$ de donde:
$$\sqrt[3]{28} = f(27+1) \approx f'(27)\cdot 1 + f(27) = \frac{1}{27}\cdot 1 + 3 \approx 3,037$$

c) $\operatorname{sen} 61^\circ$

Solución

Primero, transformamos el argumento de la función a *radianes*: $61^\circ = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{180}$. Así, debemos calcular el valor aproximado de: $\operatorname{sen} 61^\circ = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{180}\right)$

Consideramos $f(x) = \operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x,$ con $\Delta x = \dfrac{\pi}{180}$. Luego,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right) \approx f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\frac{\pi}{180} + f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{180} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

¿Qué obtiene si realiza los cálculos con los ángulos en grados?

EJERCICIOS:

1. Una pieza de un equipo de laboratorio tiene forma cúbica y es suministrada por la fábrica con la garantía de que cada una de de sus aristas tiene una longitud de 5 [cm], con una tolerancia de $\pm 0,001$ [cm]. Se desea saber cuáles son los límites de tolerancia aplicables al volumen de dicho cubo.

2. Se desea determinar el área de un círculo con un error porcentual inferior al 1%. Estime el error permisible en la medición del radio.

3. Considere la función $y = f(x)$ definida implícitamente por $y^3 + 2xy\cos x = 8$.
   Si $x = 0 \pm 0,001$ entonces $y = \ldots \pm \ldots$

4. Si en la medición de los lados de un rectángulo de longitud 5 y 7 cm. se comete un error de 0,01 y -0,02 cm. respectivamente, ¿cuál es el error que se comete al medir la diagonal?

5. La pared lateral de un depósito cilíndrico de radio 50 cm y altura 2 m debe rebÁvestirse con una capa de concreto de 3 cm de espesor. ¿Cuál es la cantidad de concreto aproximada que se necesita?

6. Estime, usando diferenciales, los siguientes valores:

   a) $\operatorname{sen} 31^\circ$

   b) $(8,01)^{\frac{4}{3}} + (8,01)^2 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{8,01}}$

   c) $\sqrt{26,1}$

   d) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + 0,01\right)$

7. En los siguientes, use la fórmula de aproximación para establecer que:

   a) $\dfrac{1}{1+h} \approx 1 - h$

b) $(1+h)^{10} \approx 1+10h$

c) $\sqrt{1+h} \approx 1+\frac{h}{2}$

8. Si en la medición del radio y de la altura de un cono, de medidas respectivas 5 y 10 cm., se comete un error de 0,1 y -0,01 cm. respectivamente, determine el error que se comete al calcular su volumen.

9. El lado de un cuadrado se mide con un error a lo sumo de 5 %. Estime el mayor porcentaje de error que se comete al calcular su área.

10. Se desea pintar un tanque cilíndrico abierto que tiene una capa exterior de 1/3 pulgada de espesor. Si el radio interior es de 6 pulgadas y la altura es 10 pulgadas, encontrar, usando diferenciales, la cantidad de pintura que se necesita.

11. Se desea construir una caja de metal en forma cúbica, y que tenga $64[in^3]$ de volumen. Las 6 caras se harán con una placa de metal de $\frac{1}{4}$ pulgada de espesor. Si el costo de la placa es $50 por pulgada cúbica, use diferenciales para estimar el costo del metal en la manufactura de la caja.

12. El período T de un péndulo es proporcional a la raíz cuadrada de su longitud l. Es decir, existe una constante k, tal que $T = k\sqrt{l}$. Si la longitud se mide con un error de p %, use diferenciales para estimar el error al calcular el período.

1.2. Ejercicios de Controles y Certámenes

1. Utilice diferenciales para calcular el valor aproximado de $\sqrt[7]{100} = \sqrt[7]{2^7 - 28}$.

2. Un Ingeniero se encuentra al nivel de la base de un edificio a una distancia de 30 metros de éste, mide el ángulo de elevación a la parte superior del edificio y éste es de 75 grados. ¿Cuál es el máximo error con que se debe medir el ángulo para que el porcentaje de error en la estimación de la altura del edificio sea menor del 4 %?

Capítulo 2

Antiderivadas

2.1. CLASE 2: Antiderivadas o Primitivas de una función

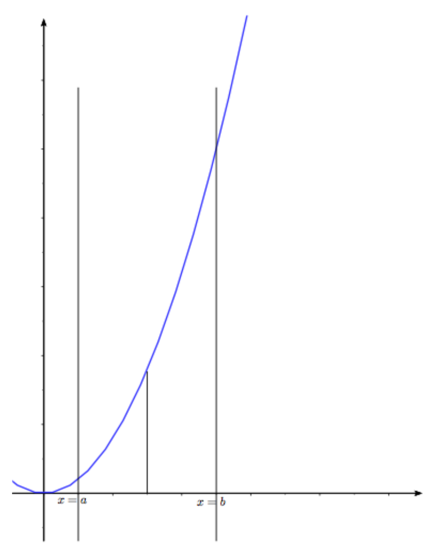
2.1.1. Introducción

El tipo de problemas a los cuales nos hemos enfrentado hasta ahora ha requerido encontrar la derivada de una función. Sin embargo, a veces se necesitará resolver el problema inverso, es decir, dada una función f, deberemos encontrar una función F de modo que $F'(x) = f(x)$. Este es el tipo de problemas que nos plantea el **cálculo integral**.

Veamos, en primer lugar, una situación que ilustra cómo surge el concepto de *antiderivada*.

Problema Encontrar el **área** de la región en $\mathbb{R}^2$ acotada por la parábola $y = x^2$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, $0 < a < b$.

Para resolver este problema usando el cálculo, pensemos en la región como generada por una línea vertical que se mueve continuamente hacia la derecha, desde a hasta b, y consideremos la razón en la cual el área de la región cambia (crece).



Más precisamente, sea A una «función de área» definida en el intervalo $[0,\infty[$ del siguiente modo: si $x_0 \geq 0$ entonces $A(x_0)$ será el área de la región del plano dada por:

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \quad 0 \leq x \leq x_0 \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq x_0^2\right\}$$

Así, el área de la región buscada será $A(b)-A(a)$. El problema consiste entonces en **determinar** la función A. Para ello, consideraremos primero su derivada.

Sea $x_0 \geq 0$, $h>0$; entonces, la diferencia $A(x_0+h)-A(x_0)$ representa el área bajo la parábola y sobre el eje, en la franja comprendida entre x_0 y x_0+h. Esta cantidad es claramente menor que el área del rectángulo de altura x_0+h y ancho h, es decir:

$$A(x_0+h)-A(x_0) < h(x_0+h)^2$$

Análogamente, esta diferencia es mayor que el área del rectángulo de altura x_0 y ancho h, es decir:

$$hx_0^2 < A(x_0+h)-A(x_0)$$

de donde

$$hx_0^2 < A(x_0+h)-A(x_0) < h(x_0+h)^2$$

Dividiendo por h:

$$x_0^2 < \frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h} < (x_0+h)^2$$

Haciendo tender $h \to 0^+$:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h} = x_0^2$$

Análogamente si $x_0 \geq 0$, $h<0 \quad \wedge \quad x_0+h>0$, en cuyo caso se obtiene

$$x_0^2 > \frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h} > (x_0+h)^2$$

de donde finalmente

$$\lim_{h\to 0} \frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h} = x_0^2$$

Así, nos damos cuenta que A debiera tener las siguientes propiedades:

- A continua en $[0,\infty[$ y diferenciable en $]0,\infty[$.
- $A'(x)=x^2 \qquad \forall x>0$.
- $A(0)=0$ (es decir, no hay «área» bajo un solo punto.)

Luego, el problema se reduce esencialmente a encontrar la **antiderivada** de x^2. Notamos que **cualquier** función de la forma $\dfrac{1}{3}x^3+C$, $C=$ cte., satisface las 2 primeras condiciones; la tercera condición implica que $C=0$.

2.1.2. Antiderivada o Primitiva

Definimos ahora de manera formal el concepto de **antiderivada** o **primitiva** de una función.

DEFINICIÓN 2.1.1 Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Una primitiva (o antiderivada) de f en A es una función $g : A \to \mathbb{R}$ continua, tal que $g'(x) = f(x)\ \forall x \in A$, excepto a lo más en un número finito de puntos.

EJEMPLOS:

1. Una primitiva para la función $f(x) = \text{sen}(x)$ es $g(x) = -\cos(x)$. Otra primitiva para esta función es $h(x) = -\cos(x) + k$ cualquiera sea $k \in \mathbb{R}$.

   En efecto, basta derivar y comprobar: $(-\cos(x) + k)' = -(-\text{sen}(x)) = \text{sen}(x)$

2. Una primitiva para la función $f(x) = 2x$ es $g(x) = x^2 + C$.

3. Una primitiva para la función $f(x) = 2x + 3$ es $g(x) = x^2 + 3x + C$.

4. Sea I un intervalo en $\mathbb{R}$. Para encontrar una primitiva para la función $\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in I \\ 0 & \text{si} \quad x \notin I \end{cases}$ notamos que no hay ninguna función cuya derivada sea igual a χ_I, $\forall x \in \mathbb{R}$.

   Sin embargo, esta función posee una antiderivada: $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ x - a & \text{si} \quad a \leq x \leq b \\ b - a & \text{si} \quad x > b \end{cases}$

   Vemos que g es continua en $\mathbb{R}$, y que es diferenciable allí, excepto en $x = a \quad \wedge \quad x = b$.

5. Considerar la función

   $$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \leq 0 \\ x^2 - 3 & x > 0 \end{cases}$$

   Una primitiva para $f(x)$ es la función

   $$g(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & x \leq 0 \\ \dfrac{x^3}{3} - 3x + 1 & x > 0 \end{cases}$$

   Otra primitiva es

   $$g_2(x) = \begin{cases} x^2 + x + 5 & x \leq 0 \\ \dfrac{x^3}{3} - 3x + 5 & x > 0 \end{cases}$$

   Observar que ni $g_1(x)$ ni $g_2(x)$ son derivables en $x = 0$.

OBSERVACIÓN:

Es claro, de los ejemplos anteriores, que las primitivas no son únicas. Más aún, si g es una antiderivada de f, entonces $g+C$, $C=$ cte. también es una antiderivada de f, es decir:

PROPOSICIÓN 2.1.1 Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si g es una primitiva de f en A entonces $g(x)+C$ es una primitiva de f.

Recíprocamente, se debe ser un poco más cuidadoso:

PROPOSICIÓN 2.1.2 Si A es un **intervalo** y g, h son primitivas de f entonces $h(x) = g(x)+C$ para algún $C \in \mathbb{R}$.

Dem. Basta probar que la función $j = h - g$ es constante en el intervalo A. Como h y g son antiderivadas, en particular son continuas, $\therefore$ j es continua en A.

Por el mismo motivo, $j'(x) = h'(x) - g'(x) = f(x) - f(x) = 0$ excepto, a lo más, en un número finito de puntos.

Sean $a, b \in A$ arbitrarios, y denotemos por $x_1, \cdots, x_{n-1}$ a los puntos ordenados en $]a, b[$ donde h, g no son derivables. Sea $x_0 = a \wedge x_n = b$.

Como j es continua en el intervalo $[x_0, x_1]$ y diferenciable en $]x_0, x_1[$, tenemos, por el Teorema del Valor Medio que:

$$\exists\, c \in]x_0, x_1[: \quad j(x_1) - j(x_0) = j'(c)(x_1 - x_0)$$

Como $j'(c) = 0$, se tiene que $j(x_1) = j(x_0)$. Aplicando el mismo razonamiento a todos los intervalos $[x_1, x_2], [x_2, x_3], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$, obtenemos

$$j(a) = j(x_0) = j(x_1) = \cdots = j(x_n) = j(b)$$

Como a, b se eligieron arbitrariamente en el intervalo A, se tiene que j es constante en A.

OBSERVACIÓN: La hipótesis que la función esté definida en un **intervalo** es muy importante. Considere $D = \mathbb{R} - \{0\}$ y las funciones $g, h : D \to \mathbb{R}$ dadas por

$$g(h) = \frac{1}{x} \qquad \text{y} \qquad h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + 5 & \text{si} \quad x > 0 \\ \frac{1}{x} - 8 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Claramente, g y h son antiderivadas de $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. Pero,

$$g(x) - h(x) = \begin{cases} -5 & \text{si} \quad x > 0 \\ 8 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

que **no** es una función constante. Esto sucede porque D **no** es un intervalo.

Notación: Escribimos $\displaystyle\int f(x)\,dx = g(x) + C$ para indicar la «familia» de todas las primitivas de f.

Tabla de Primitivas

Presentamos a continuación una lista de algunas primitivas elementales:

1.- $\displaystyle\int dx = x + C$

2.- $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad \forall\, a \neq -1$

3.- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C$

4.- $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$

5.- $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$

6.- $\displaystyle\int \tan x\,dx = -\ln(|\cos x|) + C$

7.- $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x\,dx = \ln(|\operatorname{sen} x|) + C$

8.- $\displaystyle\int \sec^2(x)\,dx = \tan(x) + C$

9.- $\displaystyle\int \sec(x)\tan(x)\,dx = \sec(x) + C$

10.- $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$

11.- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen}(x) + C$

12.- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C$

PROPOSICIÓN 2.1.3 Sean $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Entonces:

- $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

- $\displaystyle\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$

EJEMPLOS:

1. Para calcular $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(x)\,dx$, usamos una identidad trigonométrica y la propiedad anterior:

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\,dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos(2x))\,dx = \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \cos(2x)\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\right) + M$$

2. Para calcular $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$, multiplicamos por un «1» adecuado:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx &= \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1+x}}\, dx \\
&= \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\
&= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\
&= \operatorname{Arcsen}(x) - \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\, dx \\
&= \operatorname{Arcsen}(x) - \sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}$$

3. Para calcular $\displaystyle\int \frac{x}{x+1}\, dx$, transformamos la fracción impropia en propia:

$$\int \frac{x}{x+1}\, dx = \int \frac{x+1-1}{x+1}\, dx = \int 1 - \frac{1}{x+1}\, dx = x - \ln|x+1| + C$$

4. Calcular la antiderivada de la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leq -1 \\ 3 & \text{si} \quad -1 < x < 2 \\ 2-x & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Solución: Notar que en el intervalo $x \leq -1$ la función es $f_1(x) = x$. Se sigue que las primitivas de f en el intervalo $x \leq -1$ son de la forma

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + C_1$$

De manera similar, en el intervalo $-1 < x < 2$ las primitivas son de la forma

$$F(x) = 3x + C_2$$

y en el intervalo $x \geq 2$ las primitivas son de la forma

$$F(x) = 2x - \frac{x^2}{2} + C_3$$

Luego, la primitiva de f es de la forma

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + C_1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ 3x + C_2 & \text{si} \quad -1 < x < 2 \\ 2x - \frac{x^2}{2} + C_3 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Pero, la definición de primitiva requiere que F sea continua, por lo que

$$\lim_{x \to -1^-} \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) = \frac{1}{2} + C_1 = \lim_{x \to -1^+} (3x + C_2) = -3 + C_2$$

y

$$\lim_{x \to 2^-} (3x + C_2) = 6 + C_2 = \lim_{x \to 2^+} \left(2x - \frac{x^2}{2} + C_3 \right) = 2 + C_3$$

de donde

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{7}{2} + C_2 \\ C_3 &= 4 + C_2 \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} F(x) &= \begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{7}{2} + C_2 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ 3x + C_2 & \text{si} \quad -1 < x < 2 \\ 2x - \frac{x^2}{2} + 4 + C_2 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{7}{2} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ 3x & \text{si} \quad -1 < x < 2 \\ 2x - \frac{x^2}{2} + 4 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases} \qquad + C_2 \end{aligned}$$

Notar que $F(x)$ es continua y $F'(x) = f(x)$, salvo en una cantidad finita de puntos.

PROPOSICIÓN 2.1.4 Sean $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si g es una primitiva de f y $a \neq 0$, entonces $\dfrac{1}{a} g(ax+b)$ es una primitiva de $f(ax+b)$.

Dem. $\left(\dfrac{1}{a} g(ax+b) \right)' = \dfrac{1}{a} g'(ax+b) \cdot a = g'(ax+b) = f(ax+b)$

EJEMPLO 2.1.1 $\displaystyle\int \cos(3x+1)\, dx = \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3x+1) + C$

En efecto $\quad \left(\dfrac{1}{3} \operatorname{sen}(3x+1) \right)' = \dfrac{1}{3} (\operatorname{sen}(3x+1))' = \dfrac{1}{3} \cos(3x+1) \cdot 3 = \cos(3x+1)$.

PROPOSICIÓN 2.1.5 Sea $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable y tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathrm{A}$. Entonces:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx \;=\; \ln(|f(x)|) + C$$

EJEMPLO 2.1.2 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\, dx = \ln(\mathrm{e}^x+1) + C\,.$

En efecto, si derivamos el lado derecho de la igualdad, queda:

$$\big(\ln(\mathrm{e}^x+1) + C\big)' = \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\cdot(\mathrm{e}^x+1)' = \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\cdot \mathrm{e}^x$$

EJERCICIOS:

1. Determine las siguientes antiderivadas

a) $\displaystyle\int (|x-1|+|x-3|)\, dx$ *b)* $\displaystyle\int |x-|x-2||\, dx$

2. Encuentre las siguientes antiderivadas:

a) $\displaystyle\int \left(x^{1/2}+x\right)^2\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+1}{x}\, dx$

c) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos^4 x\, dx$

d) $\displaystyle\int (\cos x + \operatorname{sen} x)\, dx$

e) $\displaystyle\int (e^x - 1)\, dx$

f) $\displaystyle\int (1-10x+9x^2)\, dx$

g) $\displaystyle\int \left(3\sec^2 x + \frac{4}{x}\right)\, dx$

h) $\displaystyle\int (x^{-5} + \frac{1}{\sqrt{x}})\, dx$

i) $\displaystyle\int (x\sqrt{x} + x^{\sqrt{2}})\, dx$

j) $\displaystyle\int \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx$

k) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\, dx$

l) $\displaystyle\int \left(\frac{3+5x-6x^2-7x^3}{2x^2}\right) dx$

m) $\displaystyle\int \sqrt{x}(x^2+x+1)dx$

n) $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

ñ) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{1+x^2}\, dx$

o) $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\operatorname{sen} x \cos x}\, dx$

3. Separe las fracciones para determinar

a) $\displaystyle\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x+2\sqrt{x-1}}{2x\sqrt{x-1}}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{2-8x}{1+4x^2}\,dx$

4. Multiplique por una forma de 1 adecuado para determinar

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sec x+\tan x}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{cosec} x+\operatorname{cotg} x}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{1-\sec x}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{1-\operatorname{cosec} x}\,dx$

5. Determine

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{2x^3}{x^2-1}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{4x^2-7}{2x+3}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{4x^3-x^2+16x}{x^2+4}\,dx$

2.2. CLASE 3: Métodos para determinar Antiderivadas

Las antiderivadas que hemos visto hasta aquí son aquellas que pueden ser determinadas por simple inspección o por algún método elemental, como los anteriores. Sin embargo, existen métodos más complejos, algunos de los cuales revisaremos a continuación. Estos se conocen habitualmente con el nombre de *métodos de integración*.

2.2.1. Método de sustitución

El método de sustitución para el cálculo de primitivas es un método basado en la regla de la cadena y nos permite obtener primitivas de ciertas funciones a través de primitivas de funciones más sencillas.

Recordemos la *regla de la cadena*: La derivada de una composición del tipo $F\left(g(x)\right)$ está dada por la expresión

$$\left[F\left(g(x)\right)\right]' = F'\left(g(x)\right)g'(x)$$

Entonces, si se busca una primitiva de la forma:

$$\int F'\left(g(x)\right)g'(x)\,dx$$

ésta sería una función cuya derivada es $F'\left(g(x)\right)g'(x)$. Luego

$$\int F'\left(g(x)\right)g'(x)\,dx = F\left(g(x)\right) + C$$

Ahora, suponga que la expresión a la cual queremos encontrar una primitiva es del tipo $f\left(g(x)\right)g'(x)$. Entonces, si podemos encontrar una función F tal que $F' = f$ se seguiría que

$$f\left(g(x)\right)g'(x) = F'\left(g(x)\right)g'(x) = \left[F\left(g(x)\right)\right]'$$

En resumen, encontrar una primitiva de $f\left(g(x)\right)g'(x)$ se reduce a encontrar una primitiva de f, digamos F y luego la antiderivada de $f\left(g(x)\right)g'(x)$ será $F\left(g(x)\right)$.

TEOREMA 2.2.1 Suponga que g es una función derivable con recorrido un intervalo I. Suponga también que f es continua en I; entonces

$$\int f\left(g(x)\right)g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

donde $u = g(x)$.

Dem: Si F es una antiderivada de f entonces $F\left(g(x)\right)$ es una antiderivada de $f\left(g(x)\right)g'(x)$. Haciendo la sustitución $u = g(x)$ se tiene

$$\begin{aligned}\int f\left(g(x)\right)g'(x)\,dx &= \int \frac{d}{dx}F\left(g(x)\right)dx\\ &= F\left(g(x)\right)+C\\ &= F(u)+C\\ &= \int F'(u)\,du\\ &= \int f(u)\,du\end{aligned}$$

OBSERVACIÓN: Desde el punto de vista de las diferenciales

$$\int f\left(g(x)\right)g'(x)\,dx = \int f(u)\frac{du}{dx}dx = \int f(u)\,du$$

EJEMPLOS:

1. Calcular $\displaystyle\int x^2\cos\left(x^3+7\right)dx$

   Solución: Ponemos $u = x^3+7$ entonces $du = 3x^2dx$ de donde $\dfrac{du}{3} = x^2dx$.

   Luego

$$\begin{aligned}\int x^2\cos\left(x^3+7\right)dx &= \int \frac{\cos u}{3}du &&= \frac{1}{3}\int \cos u\,du\\ &= \frac{1}{3}\operatorname{sen}u+C &&= \frac{1}{3}\operatorname{sen}\left(x^3+7\right)+C\end{aligned}$$

2. Calcular $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$

   Solución: Haciendo $u = \sqrt{x}$ entonces $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$; luego $2du = \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$

   Se sigue, por el teorema de sustitución, que

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx &= \int \operatorname{sen}u\,2du\\ &= \int 2\operatorname{sen}(u)\,du = -2\cos(u)+C\end{aligned}$$

   Pero $u = \sqrt{x}$, de donde obtenemos

$$\int \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx = -2\cos\left(\sqrt{x}\right)+C$$

3. Calcular
$$\int \frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}\,dx$$

Solución: Haciendo $u(x)=1-2x^2$ se tiene $du=-4x\,dx$ de donde $-\dfrac{du}{4}=x\,dx$

Entonces
$$\int \frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}\,dx = \int \frac{-du}{4\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}u^{1/2}+C = -\frac{1}{2}\sqrt{1-2x^2}+C$$

4. Calcular
$$\int \frac{4}{(1+2x)^3}\,dx$$

Solución: Poniendo $u(x)=1+2x$ se sigue $du=2dx$. Entonces
$$\int \frac{4}{(1+2x)^3}\,dx = \int \frac{2}{u^3}\,du = \frac{-1}{u^2}+C = -\frac{1}{(1+2x)^2}+C$$

EJERCICIOS:

1. Determine:

   a) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$
   b) $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+1}\,dx$
   c) $\displaystyle\int \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx$
   d) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-4}}\,dx$
   e) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$
   f) $\displaystyle\int (x^2-x-1)^3(2x-1)\,dx$
   g) $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx$
   h) $\displaystyle\int (1-\cos x)^3 \operatorname{sen} x\,dx$
   i) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$
   j) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$
   k) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$
   l) $\displaystyle\int (3x+1)^7\,dx$
   m) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{16-2^{2x}}}\,dx$
   n) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+3)^3}{\sqrt{x}}\,dx$
   ñ) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+9}\,dx$

2. Utilice sustituciones básicas para determinar

   a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$
   b) $\displaystyle\int \frac{6\,dx}{x\sqrt{25x^2-1}}$
   c) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$
   d) $\displaystyle\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$
   e) $\displaystyle\int x\sec(x^2-5)\,dx$
   f) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$
   g) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)}$
   h) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$
   i) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\operatorname{sen}^2 x+3\cos^2 x}$

3. Utilice completación de cuadrados para determinar

   a) $\displaystyle\int \frac{8\,dx}{x^2-2x+2}$

   b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$

   c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

   d) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}$

   e) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$

4. Use identidades trigonométricas para determinar

   a) $\displaystyle\int (\sec x+\operatorname{cotg} x)^2\,dx$

   b) $\displaystyle\int (\operatorname{cosec} x-\tan x)^2\,dx$

   c) $\displaystyle\int \operatorname{cosec} x\ \operatorname{sen}(3x)\,dx$

   d) $\displaystyle\int (\operatorname{sen}(3x)\ \cos(2x)-\cos(3x)\ \operatorname{sen}(2x))\,dx$

2.2.2. Sustituciones trigonométricas

Primitivas de funciones que involucran expresiones del tipo $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$ y $\sqrt{x^2+a^2}$ pueden ser calculadas en algunas ocasiones mediante sustituciones trigonométricas. La siguiente tabla indica el cambio adecuado en cada caso:

Expresión	Sustitución	Identidad
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\operatorname{sen}\theta,\ \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$1-\operatorname{sen}^2\theta=\cos^2\theta$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan\theta,\ \theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$	$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec\theta,\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$	$\sec^2\theta-1=\tan^2\theta$

Por ejemplo, al considerar $\sqrt{a^2-x^2}$ y hacer $x=a\operatorname{sen}\theta$ con $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ entonces

$$\sqrt{a^2-x^2}\ =\ \sqrt{a^2-a^2\operatorname{sen}^2\theta}\ =\ |a|\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}\ =\ |a|\sqrt{\cos^2\theta}\ =\ |a||\cos\theta|$$

Pero, sabemos que si $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ entonces $\cos\theta\geq 0$, de donde

$$\sqrt{a^2-x^2}=|a|\cos\theta$$

Análogamente en los otros casos.

EJEMPLOS:

1. Calcular

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$$

Solución: Hacemos $x = 3\operatorname{sen}\theta$ entonces $dx = 3\cos\theta\, d\theta$; así:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx &= \int \frac{3\cos\theta}{9\operatorname{sen}^2\theta} 3\cos\theta\, d\theta \\
&= \int \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta = \int \operatorname{cotg}^2\theta\, d\theta \\
&= \int \left(\operatorname{cosec}^2\theta - 1\right) d\theta \\
&= -\operatorname{cotg}\theta - \theta + C
\end{aligned}$$

Para retornar a la variable original notar que

$$\operatorname{sen}\theta = x/3 \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

y así

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

2. Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$

Solución: Hacemos $x = 2\tan\theta$ entonces $dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$; así:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} &= \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{4\tan^2\theta\sqrt{4\tan^2\theta+4}} \\
&= \int \frac{\sec\theta\, d\theta}{4\tan^2\theta} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} \quad = \quad -\operatorname{cosec}\theta + C
\end{aligned}$$

3. Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$

Solución: Hacemos $x = 2\sec\theta$ entonces $dx = 2\sec\theta\,\tan\theta\, d\theta$; así:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} &= \int \frac{2\sec\theta\,\tan\theta\, d\theta}{\sqrt{4\sec^2\theta - 4}} \\
&= \int \sec\theta\, d\theta
\end{aligned}$$

OBSERVACIÓN: No siempre que aparecen las expresiones $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$ y $\sqrt{x^2+a^2}$ las sustituciones anteriores son el camino más conveniente; por ejemplo, para calcular la integral

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

es más rápido usar la sustitución $u=x^2+1$ en lugar de una sustitución trigonométrica.

EJERCICIOS:

Determine:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{49-x^2}}$
2. $\displaystyle\int \sqrt{x^8-9x^6}\,dx$
3. $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^2+x^4}}$
4. $\displaystyle\int \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{5}{2}}}\,dx$
5. $\displaystyle\int e^x\sqrt{1-e^{2x}}\,dx$
6. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{y}}\,dy$
7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^4-3x^2}}{x^2}\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{z^3+z+1}{z^4+2z^2+1}\,dz$
9. $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{t^2+4t+13}}\,dt$

2.2.3. Integración por partes

De MAT021 sabemos que la derivada de un producto de funciones $f(x)\,g(x)$ está dado por

$$\big(f(x)\,g(x)\big)' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

Si usamos la notación de primitivas tenemos

$$\int \big(f(x)\,g(x)\big)'\,dx = \int f'(x)\,g(x)\,dx + \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

así

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

Esta igualdad es conocida como la fórmula de **integración por partes** y da lugar a una nueva técnica para encontrar primitivas

Para calcular una primitiva de la forma $\int k(x)\,dx$ usando la fórmula anterior se han de encontrar dos funciones f y g de manera que $k(x)$ se pueda escribir en la forma $f(x)\,g'(x)$. Si esto es posible, se tendrá

$$\int k(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

de manera que el cálculo de la primitiva se traslada a calcular $\int f(x)g'(x)\,dx$. Para que el método sea eficaz se han de elegir f y g adecuadamente para que la integral $\int f(x)g'(x)\,dx$ sea más fácil de calcular que la original.

En ocasiones se utiliza una notación abreviada para expresar esta fórmula en términos de diferenciales, poniendo

$$\begin{aligned} u = g(x) \quad &\Rightarrow \quad du = g'(x)\,dx \\ dv = f'(x)\,dx \quad &\Rightarrow \quad v = f(x) \end{aligned}$$

se sigue

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

EJEMPLO 2.2.1 Calcular $\int x\cos x\,dx$

Solución: Se elige $f(x) = x$ y $g'(x) = \cos x$ de donde obtenemos $f'(x) = 1$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$; aplicando la fórmula de integración por partes se sigue

$$\begin{aligned} \int x\cos x\,dx &= x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx \\ &= x\operatorname{sen} x - (-\cos x) + C \\ &= x\operatorname{sen} x + \cos x + C \end{aligned}$$

Observar que la segunda integral es fácil de calcular. El mismo cálculo con la otra notación es

$$\begin{aligned} u = x \quad &\Rightarrow \quad du = dx \\ dv = \cos x\,dx \quad &\Rightarrow \quad v = \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} \int u\,dv &= uv - \int v\,du \\ \int x\cos x\,dx &= x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx \\ &= x\operatorname{sen} x + \cos x + C \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 1 En el ejemplo anterior puede mostrar que la mala elección de las funciones lleva a una integral mas complicada que la primera.

EJEMPLOS:

1. Calcular $\displaystyle\int \ln x \, dx$

   Solución: Pongamos

$$\begin{aligned} u = \ln x &\quad\Rightarrow\quad du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx &\quad\Rightarrow\quad v = x \end{aligned}$$

   se sigue

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln x - \int dx \\ &= x \ln x - x + C \end{aligned}$$

2. Calcular $\displaystyle\int x^2 e^x \, dx$

   Solución: Pongamos

$$\begin{aligned} u = x^2 &\quad\Rightarrow\quad du = 2x \, dx \\ dv = e^x dx &\quad\Rightarrow\quad v = e^x \end{aligned}$$

   se sigue

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

   podemos volver a aplicar inegración por partes para calcular $\displaystyle\int x e^x dx$

$$\begin{aligned} u = x &\quad\Rightarrow\quad du = dx \\ dv = e^x dx &\quad\Rightarrow\quad v = e^x \end{aligned}$$

   se sigue

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + C \end{aligned}$$

   se sigue

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2\left(x e^x - e^x + C\right) \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C \end{aligned}$$

3. Calcular la integral

$$\int e^x \cos x\, dx$$

Solución: Aplicamos integración por partes

$$\begin{aligned} u = e^x &\quad\Rightarrow\quad du = e^x\, dx \\ dv = \cos x\, dx &\quad\Rightarrow\quad v = \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

se sigue

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

volvemos a aplicar integración por partes pero a la integral $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$

$$\begin{aligned} u = e^x &\quad\Rightarrow\quad du = e^x\, dx \\ dv = \operatorname{sen} x\, dx &\quad\Rightarrow\quad v = -\cos x \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \int e^x \operatorname{sen} x\, dx &= -e^x \cos x - \int e^x(-\cos x)\, dx \\ &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx \end{aligned}$$

se sigue

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx\right)$$

entonces

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx$$

de donde obtenemos

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x}{2} + C$$

4. Encuentre una fórmula de reducción (o de recursión) para:

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\, dx$$

Solución: Notar que

$$I_{n-1} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}\, dx = \int \frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^n}\, dx = \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\, dx \,+\, a^2 I_n$$

Usamos integración por partes en la integral de la derecha:

$$u = x \quad \wedge \quad dv = \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n} \qquad \text{de donde} \qquad du = dx \quad \wedge \quad v = -\frac{1}{2n-2}(x^2+a^2)^{1-n}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx &= -\frac{x}{(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} \\ &= -\frac{x}{(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{I_{n-1}}{2n-2}\end{aligned}$$

Luego:

$$I_{n-1} = -\frac{x}{(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{I_{n-1}}{2n-2} + a^2 I_n$$

y ordenando:

$$I_n = \frac{1}{a^2}\,\frac{x}{(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$$

que es la fórmula de reducción buscada, válida para $n > 1$.

En el caso $n = 1$, es fácil ver que $I_1 = \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right) + C$.

Usemos esta fórmula para calcular:

a) $$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+4)^3} \underbrace{=}_{n=3} \frac{1}{2^2}\,\frac{x}{4(x^2+4)^2} + \frac{3}{4} I_2 &= \frac{1}{2^2}\,\frac{x}{4(x^2+4)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\,\frac{x}{2(x^2+4)} + \frac{1}{2} I_1\right) \\ &= \frac{1}{16}\,\frac{x}{(x^2+4)^2} + \frac{3}{32}\,\frac{x}{(x^2+4)} + \frac{3}{8}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C\end{aligned}$$

b) $$\int (x^2+1)^{-3/2}\,dx \underbrace{=}_{n=\frac{3}{2}} \frac{x}{(x^2+1)^{1/2}} + C$$

Ejercicios propuestos

1. Encuentre:

a) $\displaystyle\int 5x\,\cos x\,dx$

b) $\displaystyle\int x\,\operatorname{sen} x\,dx$

c) $\displaystyle\int x\,\cos 2x\,dx$

d) $\displaystyle\int x\,\ln x\,dx$

e) $\displaystyle\int 2x\,\operatorname{sen}\frac{x}{2}\,dx$

f) $\displaystyle\int x^2\,e^x\,dx$

g) $\displaystyle\int 5x^2\,\cos x\;dx$

h) $\displaystyle\int x\,(\ln x)^2\,dx$

i) $\displaystyle\int x^3\,e^{-x}\,dx\;=$

j) $\displaystyle\int x^2\,\operatorname{sen}\frac{x}{2}\,dx$

2. Calcular $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$

3. Encontrar una fórmula para calcular para todo $n\in\mathbb{N}$ la primitiva $\displaystyle\int x^n e^x\,dx$.

4. Use integración por partes para obtener las fórmulas de reducción

a) $\displaystyle\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1}x\operatorname{sen}x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$

b) $\displaystyle\int x^n\cos x\,dx = x^n\operatorname{sen}x - n\int x^{n-1}\operatorname{sen}x\,dx$

c) $\displaystyle\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx$

d) $\displaystyle\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$

5. Integración de las funciones inversas: Suponga que deseamos calcular

$$\int f^{-1}(x)\,dx$$

Hacemos la sustitución $u=f^{-1}(x)$, entonces $f(u)=x$ y así $dx=f'(u)\,du$ de donde

$$\int f^{-1}(x)\,dx = \int u\,f'(u)\,du$$

Si además aplicamos integración por partes

$$\int f^{-1}(x)\,dx = x\,f^{-1}(x) - \int f(u)\,du$$

a) Calcular $\displaystyle\int \arctan x\,dx$

b) Calcular $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\,dx$

2.3. CLASE 4: Más Métodos de Integración

2.3.1. Recuerdo: Fracciones Parciales

DEFINICIÓN 2.3.1 Una **función racional** es una función que se escribe como un cuociente de polinomios. Se dice que una función racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es una **fracción propia**, si el grado del polinomio $P(x)$ es menor que el grado del polinomio $Q(x)$. En caso contrario, es decir, si el grado de $P(x)$ es mayor o igual al de $Q(x)$, la fracción se llama **impropia**.

Toda fracción impropia se puede expresar, efectuando la división, como la suma de un polinomio más una fracción propia. Es decir, si $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es impropia, entonces

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{N_1(x)}{Q(x)}, \qquad \text{donde} \quad M(x) \quad \text{es un polinomio y } \frac{N_1(x)}{Q(x)} \text{ es propia.}$$

El siguiente teorema proporciona un método para descomponer cualquier fracción propia como suma de fracciones propias más sencillas.

TEOREMA 2.3.1 (Descomposición en fracciones parciales)

Cualquier fracción propia $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se puede descomponer en la suma de fracciones parciales del siguiente modo:

- Si $Q(x)$ tiene un factor lineal de la forma $ax+b$, no repetido, entonces la descomposición de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ contiene un término de la forma $\dfrac{A}{ax+b}$, $A =$cte.
- Si $Q(x)$ tiene un factor lineal de la forma $ax+b$, repetido k veces, entonces la descomposición de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ contiene términos de la forma $\dfrac{A_1}{ax+b}+\dfrac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\dfrac{A_k}{(ax+b)^k}$, $A_i =$cte., $\forall i = 1, \cdots, k$.
- Si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático irreducible de la forma ax^2+bx+c, no repetido, entonces la descomposición de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ contiene un término de la forma $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, $A, B =$ctes.
- Si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático irreducible de la forma ax^2+bx+c, repetido k veces, entonces la descomposición de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ contiene términos de la forma
$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}, \quad A_i, B_i = \text{ctes.}, \forall i = 1, \cdots, k.$$

Veremos a continuación ejemplos de cada uno de estos casos.

Caso 1 El denominador $Q(x)$ es un producto de factores lineales distintos.

Esto significa que podemos escribir

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_kx + b_k)$$

en donde no hay factor que se repita. En este caso, existen constantes $A_1, \cdots, A_k$ tal que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

EJEMPLOS: Descomponer en fracciones parciales las siguientes funciones racionales:

1. $f(x) = \dfrac{7x + 3}{x^2 + 3x - 4}$

   Solución El denominador de la función racional se puede descomponer en factores lineales en la forma:

   $$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$$

   Luego la descomposición en fracciones parciales es:

   $$\frac{7x + 3}{x^2 + 3x - 4} = \frac{7x + 3}{(x + 4)(x - 1)} = \frac{A}{x + 4} + \frac{B}{x - 1}$$

   Para encontrar los valores de A y B, multiplicamos la igualdad por $(x + 4)(x - 1)$, obteniendo

   $$7x + 3 = A(x - 1) + B(x + 4)$$

   Desarrollando se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

   $$\left.\begin{array}{rcl} A + B & = & 7 \\ -A + 4B & = & 3 \end{array}\right| \qquad \Longrightarrow \qquad A = 5, \qquad B = 2$$

   Luego, la función original queda:

   $$\frac{7x + 3}{x^2 + 3x - 4} = \frac{5}{x + 4} + \frac{2}{x - 1}$$

2. $g(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}$

   Solución El denominador se puede factorizar como sigue:

   $$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2 = x(2x - 1)(x + 2)$$

   Luego, la descomposición en fracciones parciales es:

   $$\frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad por el denominador común, y luego resolviendo la ecuación, se obtiene

$$x^2+2x-1=A(2x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(2x-1)$$

Construyendo el sistema de ecuaciones análogamente al caso anterior, obtenemos

$$A=\frac{1}{2}, \qquad B=\frac{1}{5} \qquad \text{y} \qquad C=-\frac{1}{10}$$

de donde

$$\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}=\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{1}{5}}{2x-1}+\frac{-\frac{1}{10}}{x+2}$$

Caso 2 El denominador $Q(x)$ es un producto de factores lineales, algunos de los cuales se repiten.

Si $Q(x)$ tiene un factor lineal repetido k veces de la forma $(a_1x+b_1)^k$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene k términos de la forma:

$$\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(a_1x+b_1)^k}$$

donde $A_1, A_2, \cdots, A_k$ son constantes.

EJEMPLOS: Descomponer en fracciones parciales las siguientes funciones racionales:

1. $f(x)=\dfrac{5x^2-36x+48}{x(x-4)^2}$

Solución La descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{5x^2-36x+48}{x(x-4)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-4)}+\frac{C}{(x-4)^2}$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por el denominador común:

$$5x^2-36x+48=A(x-4)^2+Bx(x-4)+Cx$$

se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcr} A+B &=& 5\\ -8A-4B+C &=& -36\\ 16A &=& 48 \end{array}\right| \qquad \text{de donde} \qquad A=3, \quad B=2, \quad C=-4$$

Luego:

$$\frac{5x^2-36x+48}{x(x-4)^2}=\frac{3}{x}+\frac{2}{(x-4)}-\frac{4}{(x-4)^2}$$

2. $h(x) = \dfrac{7x+3}{(x+4)^2(x-1)^2}$

   Solución La descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{7x+3}{(x+4)^2(x-1)^2} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{(x+4)^2} + \frac{C}{(x-1)} + \frac{D}{(x-1)^2}$$

   Para encontrar los valores de A, B, C y D, procedemos análogamente, obteniendo

$$A = \frac{-3}{25}, \qquad B = -1, \qquad C = \frac{3}{25}, \qquad D = \frac{2}{5} \qquad \textbf{(Ejercicio)}$$

Caso 3 El denominador $Q(x)$ contiene factores cuadráticos irreducibles, ninguno de los cuales se repite.

Si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático no repetido de la forma $ax^2 + bx + c$, en donde, $b^2 - 4ac < 0$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene un término de la forma:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

donde A y B son constantes.

EJEMPLOS: Descomponer en fracciones parciales:

1. $f(x) = \dfrac{4x^2-8x+1}{x^3-x+6}$

   Solución: Tenemos que

$$\frac{4x^2-8x+1}{x^3-x+6} = \frac{4x^2-8x+1}{(x+2)(x^2-2x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+3}$$

   Multiplicando por el común denominador:

$$4x^2-8x+1 = A(x^2-2x+3) + (Bx+C)(x+2)$$

   obtenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} A+B & = & 4 \\ -2A+2B+C & = & -8 \\ 3A+2C & = & 1 \end{array}\right| \qquad \text{de donde} \qquad A=3, \quad B=1, \quad C=-4$$

   Por lo tanto,

$$\frac{4x^2-8x+1}{x^3-x+6} = \frac{3}{x+2} + \frac{x-4}{x^2-2x+3}$$

2. $g(x) = \dfrac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}$

   Solución: La fracción se puede descomponer de la siguiente forma:

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

   Procediendo análogamente se obtiene

$$A + B = 2, \quad C = -1, \quad 4A = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad A = 1, \quad B = 1 \ \text{ y } \ C = -1$$

   de donde $\dfrac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x - 1}{x^2 + 4}$

Caso 4 El denominador $Q(x)$ contiene un factor irreductible repetido.

Si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático repetido k veces de la forma $(ax^2 + bx + c)^k$, donde $b^2 - 4ac < 0$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene k términos de la forma:

$$\frac{A_1 x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_k x + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

donde $A_1, A_2, \cdots, A_k$ y $B_1, B_2, \cdots B_k$ son constantes.

Ejemplo Descomponer en fracciones parciales $\dfrac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}$

Solución La forma de descomponer esta división de polinomios en fracciones parciales es

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2+1)^2}$$

Multiplicando por $x(x^2+1)^2$, y luego igualando coeficientes, se obtiene el siguiente sistema:

$$A + B = 0, \quad C = -1, \quad 2A + B + D = 2, \quad C + E = -1, \quad A = 1$$

cuya solución es (**Ejercicio**): $A = 1, \quad B = -1, \quad C = -1, \quad D = 1 \quad \text{y} \quad E = 0.$ Entonces

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x + 1}{x^2 + 1} + \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

EJERCICIOS: Descomponer en fracciones parciales:

1. $f_1(x) = \dfrac{5x + 7}{x^2 + 2x - 3}$
2. $f_2(x) = \dfrac{x^2 + 11x + 15}{(x-1)(x+2)^2}$
3. $f_3(x) = \dfrac{7x^2 - 11x + 6}{(x-1)(2x^2 - 3x + 2)}$
4. $f_4(x) = \dfrac{3x^3 - 6x^2 + 7x - 2}{(x^2 - 2x + 2)^2}$

2.3.2. Integración por Fracciones Parciales

La integración por fracciones parciales es una técnica de integración que se utiliza para integrar funciones racionales, es decir, cuocientes de polinomios. Para poder aplicar la técnica, es necesario que el grado del polinomio del numerador sea *estrictamente* menor que el grado del polinomio en el denominador.

Caso 1 El denominador $q(x)$ es un producto de factores lineales distintos.

Ejemplo: Determine $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$

Solución: El denominador se puede factorizar como sigue:

$$2x^3+3x^2-2x = x(2x^2+3x-2 = x(2x-1)(x+2)$$

Luego, la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{x+2}$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad por el factor común, y luego resolviendo la ecuación, se tiene

$$x^2+2x-1 = A(2x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(2x-1)$$

con $A = \dfrac{1}{2}$, $B = \dfrac{1}{5}$ y $C = -\dfrac{1}{10}$. Así:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx &= \int \left[\frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{10}\frac{1}{x+2}\right] dx \\ &= \tfrac{1}{2}\ln|x| + \tfrac{1}{10}\ln|2x-1| - \tfrac{1}{10}\ln|x+2| + C\end{aligned}$$

Caso 2 El denominador $q(x)$ es un producto de factores lineales, algunos de los cuales se repiten.

Ejemplo: Determine $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}dx$

Solución: La fracción es impropia, por lo que comenzaremos por dividir los polinomios:

$$\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1} = x+1+\frac{4x}{x^3-x^2-x+1}$$

Luego, factorizando el polinomio $q(x) = x^3-x^2-x+1$ se obtiene

$$x^3-x^2-x+1 = (x-1)^2(x+1)$$

Por lo tanto, su descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}$$

del cual de obtiene: $A=1$, $B=2$ y $C=-1$, de modo que

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx &= \int\left[x+1+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x+1}\right]dx\\ &= \frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}-\ln|x+1|+C\\ &= \frac{x^2}{2}+x+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{2}{x-1}+C\end{aligned}$$

Caso 3 El denominador $q(x)$ contiene factores cuadráticos irreductibles, ninguno de los cuales se repite.

Ejemplo: Encuentre $\displaystyle\int\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\,dx$

Solución: La fracción se puede descomponer de la siguiente forma:

$$\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}=\frac{2x^2-x+4}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

de donde se obtiene

$$A+B=2,\quad C=-1,\quad 4A=4\quad\Longrightarrow\quad A=1,\quad B=1\quad\text{y}\quad C=-1$$

por lo cual

$$\begin{aligned}\int\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\,dx &= \int\left[\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x^2+4}\right]dx\\ &= \int\frac{1}{x}\,dx+\int\frac{x}{x^2+4}\,dx-\int\frac{1}{x^2+4}\,dx\\ &= \ln|x|+\frac{1}{2}\ln(x^2+4)-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+K\end{aligned}$$

Caso 4 El denominador $q(x)$ contiene un factor irreductible repetido.

Ejemplo: Determine $\displaystyle\int\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx$

Solución: La forma de descomponer esta división de polinomios en fracciones parciales es

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

Multiplicando por $x(x^2+1)^2$, y luego igualando coeficientes, se obtiene el siguiente sistema

$$A+B=0, \quad C=-1, \quad 2A+B+D=2, \quad C+E=-1, \quad A=1$$

cuya solución es:

$$A=1, \quad B=-1, \quad C=-1, \quad D=1 \quad \text{y} \quad E=0.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}\right)dx \\
&= \int \frac{dx}{x}-\int \frac{x}{x^2+1}\,dx-\int \frac{dx}{x^2+1}+\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} \\
&= \ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\arctan(x)-\frac{1}{2(x^2+1)}+K
\end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

1. Encuentre:

   a) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx$

   b) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2+x}\,dx$

   c) $\displaystyle\int \frac{5x+6}{x^2+3x+2}\,dx$

   d) $\displaystyle\int \frac{x+1}{(1-x)(x-2)}\,dx$

   e) $\displaystyle\int \frac{9x+25}{x^2+10x+9}\,dx$

   f) $\displaystyle\int \frac{5x-11}{x^2+10x+9}\,dx$

   g) $\displaystyle\int \frac{4x}{4-x^2}\,dx$

   h) $\displaystyle\int \frac{15x+51}{x^2+7x+10}\,dx$

   i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$

2. Exprese los integrandos como fracciones parciales y determine las siguientes:

   a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-2x+1}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{4x+6}{(x+1)^2}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int \frac{7x-23}{x^2-6x+9}\,dx$

2.3.3. Sustitución tangente del ángulo medio

Este método se utiliza para integrales de la forma

$$\int R(\operatorname{sen}(x), \cos(x))\, dx$$

donde R es una función racional. Utilizamos la sustitución $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, de donde

$$2\arctan t = x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2dt}{1+t^2} = dx$$

Además,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \wedge \qquad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x) &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

de donde

$$\int R(\operatorname{sen}(x), \cos(x))\, dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R(t)\, dt$$

EJEMPLOS: Calcular la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}$.

Solución: Usamos la sustitución $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ entonces

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x+\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|t+1|+C = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right|+C$$

EJERCICIOS:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{3+2\cos x}$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x+\cos x}$
3. $\displaystyle\int \frac{\cos x\, dx}{1+\cos x}$

2.4. CLASE 5: Problemas de valor inicial

Una ecuación diferencial es una ecuación en la que aparecen derivadas de una función desconocida, expresada en forma de derivadas o de diferenciales. Resolver una tal ecuación es encontrar la o las funciones que satisfacen la igualdad.

EJEMPLOS:

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$
2. $\dfrac{dy}{dx} + xy = y^2$
3. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - \dfrac{dy}{dx} - xy = \cos(yx)$

Como aplicación del cálculo de primitivas y la utilidad de la constante de integración, vamos a resolver algunos problemas asociados a fenómenos físicos. En estos problemas aparecen ecuaciones del tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$$

que llamamos ecuaciones diferenciales **de variables separables**. Note lo siguiente: si $G(y)$ es una primitiva de $\frac{1}{g(y)}$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ entonces de la relación

$$G(y) - F(x) = C$$

derivando en forma implícita obtenemos

$$G'(y)\,\frac{dy}{dx} - F'(x) = 0$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = g(y)\,f(x)$$

Por otro lado, si

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$$

desde el punto de vista de las diferenciales podemos escribir

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$$

de donde obtenemos

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C$$

lo que nos da un método para resolver este tipo de ecuaciones.

EJEMPLO 2.4.1 Resolver $\dfrac{dy}{dx} = e^y x$

Pasamos a diferenciales e integramos: $e^{-y}\,dy = x\,dx \quad \Rightarrow \quad -e^{-y} = \frac{x^2}{2} + C.$ Se sigue

$$y(x) = -\ln\left(-\left(\frac{x^2}{2} + C\right)\right)$$

Notar que si $y(0) = 1$ entonces

$$1 = -\ln(-C)$$

de donde obtenemos $-C = e^{-1}$. Así:

$$y(x) = -\ln\left(e^{-1} - \frac{x^2}{2}\right)$$

Reacciones químicas y desintegración

No es difícil observar en la naturaleza diversas reacciones químicas entre elementos. Por ejemplo, si moléculas de cierto tipo se desintegran por acción del medio, el número de moléculas que se descomponen en una unidad de tiempo es proporcional al número de moléculas total presente. Hagamos un *modelo matemático* de esta situación: supongamos que en $t = 0$ se tienen x_0 gramos. Si denotamos por $x(t)$ el número de gramos en el instante t entonces $\frac{dx}{dt}$ es la *tasa de variación* de esta cantidad. Si $k > 0$ es la constante de proporcionalidad, entonces

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

El signo " $-$ " indica que la cantidad esta decreciendo, ya que $k > 0$. Notar que

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = -k$$

Se sigue que

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)}\,dt = \int -k\,dt \qquad \Rightarrow \qquad \ln|x(t)| = -kt + C$$

de donde

$$|x(t)| = Ke^{-kt}$$

Como $x(t) \geq 0$, obtenemos $x(t) = Ke^{-kt}$. Además $x(0) = x_0$ de donde

$$x(t) = x_0 e^{-kt}$$

Se llama *semivida T* al tiempo requerido para que la sustancia se reduzca a la mitad. De esta forma

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-kt} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{\ln 2}{k}$$

EJEMPLO 2.4.2 Desintegración radioactiva

El radio de carbono tiene una semivida de más o menos 5600 años. Este se produce en la alta atmósfera por acción de rayos cósmicos sobre el nitrógeno. El radio carbono por oxidación pasa a dióxido de carbono y éste se mezcla por el viento con el dióxido de carbono no radioactivo presente.

La proporción en el carbono ordinario ha alcanzado hace tiempo su estado de equilibrio. Todas las plantas y animales que comen plantas incorporan esta proporsicón de radio carbono en sus tejidos. Mientras el animal o planta viven, esta cantidad permanece constante pero al morir deja de absorber radio carbono y el que había en el momento de morir comienza a desintegrarse.

Así, si un fragmento de madera antigua tiene la mitad de radioactividad que un árbol vivo, éste vivió hace unos 5600 años. Si solo tiene la cuarta parte podemos determinar el tiempo en que vivió. Tenemos:

$$\frac{x_0}{4} = x_0 e^{-kt_0} \qquad \Rightarrow \qquad \ln 4 = kt_0$$

Como $T = \frac{\ln 2}{k} = 5600$, se sigue que $t_0 = 2T = 11200$ años.

Esto da un método para medir la edad de objetos orgánicos.

EJEMPLO 2.4.3 Si el 25 % de una sustancia se desintegra en 100 años. ¿Cuál es su vida media?

La ley de enfriamiento de Newton

Consideremos el siguiente modelo simplificado para el fenómeno de variación de temperatura en un cuerpo. Supongamos que se cumplen las siguientes hipótesis:

- En el instante t la temperatura en todo el cuerpo $T(t)$ es la misma.
- La temperatura del medio es constante T_m
- El flujo de calor a través de las paredes del cuerpo, dada por $\dfrac{dT}{dt}$, es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del medio.

Podemos formular la última condición como

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

donde $k > 0$ es la constante de proporcionalidad. El signo " $-$ " puede ser explicado de la siguiente forma: si $T > T_m$ entonces el cuerpo se enfría; luego la temperatura decrece y así $\frac{dT}{dt} < 0$.
Si $T < T_m$ entonces la temperatura del cuerpo crece; luego $\frac{dT}{dt} > 0$.

Supongamos además que la temperatura inicial del cuerpo está dada por $T_0 = T(0)$; entonces, tenemos el problema

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= -k(T - T_m) \\ T(0) &= T_0 \end{aligned}$$

Con el método anterior podemos encontrar una expresión para $T(t)$; en efecto:

$$\frac{dT}{(T-T_m)} = -k\,dt$$

Se sigue

$$\ln|T-T_m| = -kt + C$$

Como $T(0) = T_0$, tenemos

$$\ln|T_0 - T_m| = C$$

y así

$$|T(t) - T_m| = |T_0 - T_m|\, e^{-kt}$$

Los valores absolutos los podemos quitar razonando sobre la temperatura inicial (note por el teorema del valor intermedio, si la temperatura comienza bajo T_m no la puede superar de lo contrario existiría t_0 tal que $0 = |T_0 - T_m|\, e^{-kt_0}$).

Finalmente

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)\, e^{-kt}$$

Notar que $\lim\limits_{t\to\infty} T(t) = T_m$

EJEMPLO 2.4.4 Un cuerpo a $100°C$ es puesto en una sala a temperatura constante de $25°C$. Después de 5 minutos la temperatura del cuerpo es de 90°. ¿Cuanto tiempo tarda en estar a 50°?

EJEMPLO 2.4.5 Un cuerpo a 100° es puesto en una sala que está a una temperatura constante desconocida. Si pasados 10 minutos el cuerpo está a 90° y pasado 20 minutos esta a 82°, calcular la temperatura de la sala.

Mezclas

Para obtener un remedio, una pintura del color adecuado o un trago, es necesario mezclar diversos ingredientes.

Considere un recipiente con un dispositivo de agitación que en todo momento mantiene la mezcla homogénea Suponga que tiene V litros de capacidad y contiene una mezcla de agua con sal. Si al recipiente le agregamos agua con c gramos de sal por litro a una velocidad de a litros por segundo y del recipiente sacamos agua a la misma velocidad, ¿qué cantidad de sal hay en el recipiente en el tiempo t?

Sea $x(t)$ la cantidad de sal en el recipiente en el tiempo t. La variación de la cantidad de sal es

$$\frac{dx}{dt} = \text{(Sal que entra) - (Sal que sale)}$$

La sal que entra es ac. La cantidad de sal en el instante t es $\frac{x(t)}{V}$, luego la cantidad de sal que sale es $a\frac{x(t)}{V}$. De esta forma, la ecuación que modela la variación de la cantidad de sal es

$$\frac{dx}{dt} = ac - a\frac{x(t)}{V}$$

de donde

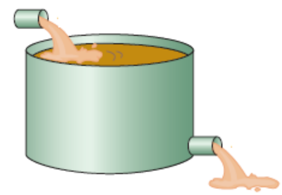
$$\frac{dx}{x - cV} = -\frac{a}{V}dt$$

Se sigue

$$x(t) = cV + Ke^{-\frac{a}{V}t}$$

Si la cantidad inicial de sal es $x(0) = x_0$ entonces

$$x(t) = cV + (x_0 - cV)e^{-\frac{a}{V}t}$$



EJEMPLO 2.4.6 Suponga que el estanque contiene 100 litros de agua, que entra agua con 500 gramos de sal por litro a razón de 5 litros por minuto, y que además sale agua a la misma velocidad del recipiente. ¿Cuanto tiempo tarda en tener 10 kilos de sal el recipiente?

Crecimiento de poblaciones

Suponga que para modelar el crecimiento de una población en tiempos cortos utilizamos la siguiente regla: " la tasa de crecimiento de la población es proporcional a la población existente. " Entonces, el modelo matemático para este fenómeno es la ecuación:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

donde $P = P(t)$ es la población existente en el tiempo t . Resolviendo por integración directa se tiene

$$\int \frac{dP}{P} = \int k\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln(P) = kt + C \quad \Leftrightarrow \quad P(t) = M_0 e^{kt}$$

donde M_0 representa la población inicial.

EJEMPLO 2.4.7 La población de cierta ciudad se duplicó de 1900 a 1960. Si la tasa de crecimiento natural de la población es proporcional a la población en cualquier tiempo y la población en 1960 fue de 60000 habitantes, estime la población para el año 2010.

Solución: Sean $P = P(t)$ la población en el tiempo t. El fenómeno queda modelado por la siguiente ecuación diferencial con valores iniciales:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= kP \\ \text{en } t=0 \quad (1900) \qquad P(0) &= 30000 \\ \text{en } t=60 \quad (1960) \qquad P(60) &= 60000 \end{aligned}$$

Resolviendo como arriba:

$$P(t) = 30000 \cdot 2^{t/60}$$

Para determinar la población en 2010, se debe evaluar en $t = 110$

$$P(110) = 30000 \cdot 2^{110/60} \approx 106907 \quad \text{habts.}$$

2.5. Ejercicios de Controles y Certámenes

1. Encuentre la función $y = f(x)$ sabiendo que $\dfrac{dy}{dx} = f'(x) = 3x^2 - 4x + \dfrac{1}{x^2}$ y $f(2) = 9$.

2. Calcular la integral $\displaystyle\int x e^{\sqrt{x^2+1}} dx$.

3. Calcule la siguiente integral indefinida $\displaystyle -2 \int \frac{e^x \operatorname{sen}(2e^x)}{\sqrt[3]{4+3\cos^2(e^x}} dx$

Capítulo 3

La Integral Definida

3.1. CLASE 6: Integrales de Newton y de Riemann

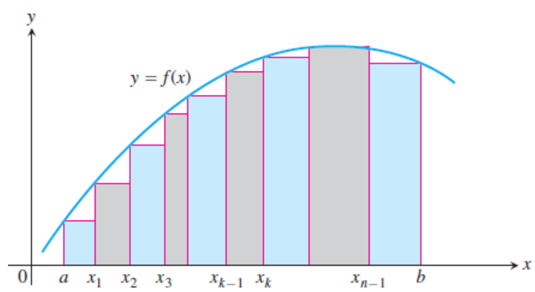
La idea intuitiva de integral surge alrededor de 1670, cuando Newton comienza a desarrollar los conceptos necesarios para el cálculo de áreas de regiones acotadas por funciones continuas. Hacia 1850, Riemann generaliza estas nociones y las define para funciones con un número finito de discontinuidades. Realiza demostraciones más formales y «descubre» el Teorema Fundamental del Cálculo.

Iniciaremos este estudio formal con las ideas de Newton, que son muy parecidas a las ideas que ya miramos cuando introdujimos el concepto de antiderivada, por medio del cálculo de áreas.

DEFINICIÓN 3.1.1 Sea $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ una función continua, acotada y no negativa. Se define la **integral definida** de f entre a y b al valor del área de la región encerrada entre las gráficas de f y el eje de las abscisas (eje x). Lo denotamos por

$$\int_a^b f(x)dx$$

La idea de Newton para calcular estas áreas, fue aproximar el área buscada por la suma de las áreas de rectángulos de ancho «muy pequeño».



Intuitivamente, es claro que tomando n rectángulos cuyas bases son de igual longitud Δx, y haciendo $n\longrightarrow\infty$, el área comprendida bajo la curva y sobre el eje x será la suma de las áreas de todos estos rectángulos.

EJEMPLOS:

1. Calculemos nuevamente el área bajo $f(x) = x^2$ sobre el eje x, entre 0 y b, es decir, calculemos $\displaystyle\int_0^b x^2 dx$.

   Hacemos

$$\begin{array}{ccl} x_0 & = & 0 \\ x_n & = & b \\ n & : & \text{número de subrectángulos} \\ \Delta x & = & \dfrac{b}{n} = \text{base de cada subrectángulo} \end{array}$$

   Sea A_i : el área del rectángulo i-ésimo. Entonces, si en cada intervalo de la forma $[x_i, x_{i+1}]$ consideramos la altura del rectángulo como $f(x_i)$ tendremos:

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & = & f(0)\cdot\Delta x & = & 0 \\ A_2 & = & f(x_1)\cdot\Delta x & = & x_1^2\Delta x \\ A_3 & = & f(x_2)\cdot\Delta x & = & x_2^2\Delta x \\ \vdots & & & & \vdots \\ A_k & = & f(x_{k-1})\cdot\Delta x & = & x_{k-1}^2\Delta x \\ \vdots & & & & \vdots \\ A_n & = & f(x_{n-1})\cdot\Delta x & = & x_{n-1}^2\Delta x \end{array}$$

   Pero, notamos que: $\quad x_1 = \Delta x, \quad x_2 = 2\Delta x, \cdots, x_k = k\Delta x, \cdots, x_n = n\Delta x,\quad$ de donde

$$\begin{array}{ccc} A_1 & = & 0 \\ A_2 & = & (\Delta x)^3 \\ A_3 & = & 4(\Delta x)^3 \\ \vdots & & \vdots \\ A_k & = & (k-1)^2(\Delta x)^3 \\ \vdots & & \vdots \\ A_n & = & (n-1)^2(\Delta x)^3 \end{array}$$

   Por lo tanto:

$$A_k(n) = \sum_{k=1}^{n} A_k = (\Delta x)^3 \cdot \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 = (\Delta x)^3 \cdot \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = (\Delta x)^3\,\frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6}$$

$$= \left(\frac{b}{n}\right)^3 \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{b^3}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore \quad \int_0^b x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) = \frac{b^3}{3}$$

2. Calcular $\displaystyle\int_0^b 2^x dx$.

Consideramos nuevamente:

$$\begin{array}{rcl} x_0 & = & 0 \\ x_n & = & b \\ n & : & \text{número de subrectángulos} \\ \Delta x & = & \dfrac{b}{n} = \text{base de cada subrectángulo} \\ x_k & = & k\cdot\Delta x \end{array}$$

de donde $\quad A_k = f(x_{k-1})\cdot\Delta x = 2^{x_{k-1}}\cdot\Delta x = 2^{(k-1)\Delta x}\Delta x = (2^{\Delta x})^{k-1}\cdot\Delta x$

Luego, usando la fórmula para la suma geométrica de razón $2^{\Delta x}$ y primer término igual a 1:

$$A_k(n) = \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n}(2^{\Delta x})^{k-1}\cdot\Delta x = \Delta x\sum_{k=1}^{n}(2^{\Delta x})^{k-1} = \Delta x\,\frac{(2^{\Delta x})^n - 1}{(2^{\Delta x})-1} = \frac{b}{n}\,\frac{2^n - 1}{2^{\frac{b}{n}}-1}$$

de donde

$$\int_0^b 2^x\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b}{n}\,\frac{2^n-1}{2^{\frac{b}{n}}-1} = \frac{b(2^b-1)}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(2^{b/n}-1)}$$

siempre que el límite presente en el denominador no sea igual a 0. Calculémoslo:

$$\lim_{n\to\infty} n(2^{b/n}-1) = \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left((2^b)^y - 1\right) = \lim_{y\to 0}\frac{e^{(b\ln 2)y}-1}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{(b\ln 2)e^{(b\ln 2)y}}{1} = b\ln 2$$

Así, finalmente,

$$\int_0^b 2^x\,dx = \frac{b(2^b-1)}{b\ln 2} = \frac{2^b-1}{\ln 2}$$

EJERCICIOS: Determine:

1. $\displaystyle\int_0^b x^3\,dx$ 2. $\displaystyle\int_0^b \pi^{\alpha x}\,dx$ 3. $\displaystyle\int_0^b x2^x\,dx$

OBSERVACIÓN: Podemos ampliar el concepto de integral de Newton de la siguiente manera:

1. Si $b<a$, podemos definir $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ y, en general

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad \forall a,b\in\mathbb{R}$$

2. Si $a=b$: $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad \forall a\in\mathbb{R}$

3. Además, si f es una función continua que cambia de signo en el intervalo $[a,b]$, entonces la integral de Newton de f entre a y b se **define** como el área total sobre el eje x menos el área total bajo el eje x y sobre la gráfica de f. De esta manera, vemos que el resultado puede ser positivo o negativo.

4. Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continua y acotada. Sea $c\in]a,b[$. Entonces, claramente se tiene que:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

Esta última observación tiene consecuencias interesantes:

- $\displaystyle\int_a^b x^2\,dx \;=\; \frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}.$

  En efecto: $\displaystyle\int_0^a x^2dx+\int_a^b x^2dx \;=\; \int_0^b x^2dx.$ Luego:

$$\frac{a^3}{3}+\int_a^b x^2dx \;=\; \frac{b^3}{3} \qquad\Rightarrow\qquad \int_a^b x^2dx \;=\; \frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}$$

- $\displaystyle\int_a^b 2^x\,dx \;=\; \frac{2^b-2^a}{\ln 2}$ como se demuestra análogamente.

Note que esto corresponde a determinar la primitiva de la función y luego evaluar el extremo superior menos el extremo inferior, lo cual es .... notable!

3.1.1. La integral definida de Riemann

La integral de Riemann es una generalización de la integral de Newton. La gran diferencia es que no requiere que el intervalo del dominio de f esté subdividido en segmentos de igual longitud, ni que la función sea continua; basta con que sea acotada.

DEFINICIÓN 3.1.2 Sea $[a,b]$ un intervalo cerrado. Diremos que $\mathscr{P}=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ es una **partición** de $[a,b]$ si se cumple

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

OBSERVACIÓN: Notar que $\mathscr{P}$ tiene $n+1$ elementos y determina n subintervalos de $[a,b]$ de la forma $[x_{i-1},x_i]$.

Usaremos la notación $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\quad\forall i=1,\cdots,n$ y llamaremos **norma** de la partición $\mathscr{P}$ al número

$$\|\mathscr{P}\|=\text{máx}\{\Delta x_i : i=1,2,\ldots,n\}$$

Para entender el concepto de integral de Riemann, supongamos que, como en el caso de la integral de Newton, nos interesa calcular el área acotada por $y = f(x),\ x \in [a,b]$ y el eje x.

En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ escogemos un c_i arbitrario, $\forall i = 1, \cdots, n$. Por lo tanto, una suma que aproxima el área será:

$$A(c_1, c_2, \cdots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Claramente, el *valor* de A *depende* de la elección de la partición $\mathscr{P}$ y de los $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Para que una función sea *integrable*, necesitaremos que este valor no dependa de estas elecciones. Más precisamente:

DEFINICIÓN 3.1.3 Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada se dice *Riemann-integrable* o simplemente *integrable* si y solo si *cualquiera* sea la elección de los c_i y los subintervalos Δx_i, ocurre que el límite

$$\lim_{\|\mathscr{P}\| \to 0} A(c_1, \cdots, c_n) \qquad \text{existe.}$$

En tal caso, el valor de este límite se llama integral de f en $[a,b]$ y se denota por $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

OBSERVACIÓN: En la definición de la integral de Riemann **no basta** exigir que $n \to \infty$ ya que los subintervalos **no** son necesariamente de igual longitud.

Veamos ahora otra manera (tal vez más tangible) de verificar si una función es o no integrable según Riemann.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y sea $\mathscr{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Para $i = 1, \ldots, n$ denotaremos por

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ M_i &= \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \end{aligned}$$

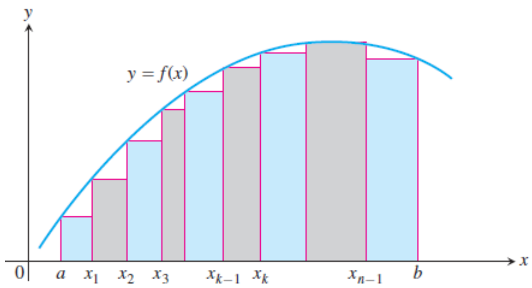
(Como $[a,b] \neq \emptyset$ y f es acotada se sigue que para cada i el conjunto $\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ es no vacío y acotado, por ende existen su ínfimo y su supremo).

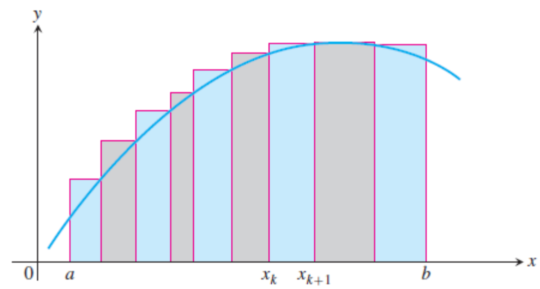
DEFINICIÓN 3.1.4 Si $\mathscr{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[a,b]$, se define la **suma superior** de f asociada a la partición $\mathscr{P}$ como el número

$$S(f, \mathscr{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

De manera similar, se define la **suma inferior** de f asociada a la partición $\mathscr{P}$ como el número

$$s(f, \mathscr{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$





PROPOSICIÓN 3.1.1 Para cada $\mathscr{P}$ partición de $[a,b]$ se cumple que $s(f,\mathscr{P}) \leq S(f,\mathscr{P})$.

Dem. En efecto, para cada i se tiene que : $m_i \leq M_i$. Se sigue

$$m_i\Delta x_i \leq M_i\Delta x_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

lo que concluye la demostración.

OBSERVACIÓN:

Claramente, para una elección arbitraria de $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, se tiene que

$$s(f,\mathscr{P}) \leq A(c_1,\cdots,c_n) \leq S(f,\mathscr{P})$$

De aquí, es evidente que una función f será integrable si y solo si

$$\lim_{\|\mathscr{P}\|\to 0} s(f,\mathscr{P}) = \lim_{\|\mathscr{P}\|\to 0} S(f,\mathscr{P})$$

En tal caso, se llama *integral de Riemann* de f a cualquiera de estos límites.

Refinamiento de una Partición

Si $\mathscr{P}$ es una partición de $[a,b]$ y agregamos un nuevo punto de $[a,b]$ a la partición, digamos $x_{i_0-1} < x_\xi < x_{i_0}$, entonces formamos una partición $\mathscr{P}'$ del mismo intervalo que tiene la propiedad $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{P}'$. Además

$$s(f,\mathscr{P}) \leq s(f,\mathscr{P}')$$

y

$$S(f,\mathscr{P}') \leq S(f,\mathscr{P})$$

OBSERVACIÓN: Si $x_{i_0-1} < x_\xi < x_{i_0}$ entonces

$$\begin{aligned} m_{i_0} &\leq m'_{i_0} = \inf\left\{f(x) : x \in \left[x_{i_0-1}, x_\xi\right]\right\} \\ m_{i_0} &\leq m''_{i_0} = \inf\left\{f(x) : x \in \left[x_\xi, x_{i_0}\right]\right\} \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} m_{i_0}\left(x_{i_0}-x_{i_0-1}\right) &= m_{i_0}\left(x_{i_0}-x_\xi+x_\xi-x_{i_0-1}\right) \\ &= m_{i_0}\left(x_{i_0}-x_\xi\right)+m_{i_0}\left(x_\xi-x_{i_0-1}\right) \\ &\leq m'_{i_0}\left(x_{i_0}-x_\xi\right)+m''_{i_0}\left(x_\xi-x_{i_0-1}\right) \end{aligned}$$

y de manera similar se muestra la propiedad equivalente para M_{i_0}. Luego, tenemos que

COROLARIO 3.1.1 Si $\mathscr{P}_1 \subseteq \mathscr{P}_2$ entonces

$$\begin{aligned} s\left(f,\mathscr{P}_1\right) &\leq s\left(f,\mathscr{P}_2\right) \\ S\left(f,\mathscr{P}_2\right) &\leq S\left(f,\mathscr{P}_1\right) \end{aligned}$$

COROLARIO 3.1.2 Si $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$ son dos particiones arbitrarias de $[a,b]$ entonces

$$m(b-a) \leq s\left(f,\mathscr{P}_1\right) \leq S\left(f,\mathscr{P}_2\right) \leq M(b-a)$$

Dem. Tomar la partición $\mathscr{P}=\mathscr{P}_1\cup\mathscr{P}_2$ y usar la desigualdad

$$s\left(f,\mathscr{P}_1\right) \leq s\left(f,\mathscr{P}\right) \leq S\left(f,\mathscr{P}\right) \leq S\left(f,\mathscr{P}_2\right)$$

DEFINICIÓN 3.1.5 Llamaremos integral inferior de f en el intervalo $[a,b]$ al número real

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\left\{s\left(f,\mathscr{P}\right) : \mathscr{P} \text{ particiones de } [a,b]\right\}$$

Similarmente, se define la integral superior de f en el intervalo $[a,b]$ como el número real

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\left\{S\left(f,\mathscr{P}\right) : \mathscr{P} \text{ particiones de } [a,b]\right\}$$

OBSERVACIÓN: Notar que los resultados anteriores garantizan la existencia de tales números. Además, podemos decir

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

DEFINICIÓN 3.1.6 Diremos que f es Riemann integrable si se cumple

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

y en tal caso escribiremos

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

para el número en común.

TEOREMA 3.1.1 Considere una sucesión de particiones $\mathscr{P}_n$ de un intervalo $[a,b]$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathscr{P}_n\| = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(S(f,\mathscr{P}_n) - s(f,\mathscr{P}_n)\right) = 0$$

Entonces f es integrable en $[a,b]$ y, más aún

$$\lim_{n\to\infty} S(f,\mathscr{P}_n) = \lim_{n\to\infty} s(f,\mathscr{P}_n) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Dem. En efecto, para todo n se cumple

$$s(f,\mathscr{P}_n) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le S(f,\mathscr{P}_n)$$

entonces

$$0 \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le S(f,\mathscr{P}_n) - s(f,\mathscr{P}_n)$$

de donde obtenemos lo deseado al tomar el límite.

EJEMPLOS:

1. Las funciones constantes son integrables.

   Dem. Sea $f(x) = c,\ c = \text{cte. en }]a,b[$. Probaremos que f es integrable utilizando el criterio del límite, y dejamos como ejercicio hacer la demostración utilizando sumas superiores e inferiores.

   Sea $\mathscr{P}$ una partición arbitraria del intervalo $[a,b]$, y sean $c_1,\cdots,c_n$ puntos arbitrarios, donde $c_i \in [x_{i-1},x_i]$. Entonces:

   $$A(c_1,\cdots,c_n) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = c(b-a)$$

   $$\Rightarrow \qquad \lim_{|||\mathscr{P}|||\to 0} A(c_1,\cdots,c_n) = c(b-a) \qquad \therefore \qquad \int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

2. La función $f(x) = x$ es integrable en $[a,b]$. Más aún

   $$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

Dem. A modo de ilustración, utilizaremos ambos métodos para demostrar que f es integrable en $[a,b]$.

Método sumas superiores e inferiores Considere las particiones aritméticas de $[a,b]$

$$\mathscr{P}_n = \left\{ x_i = a + i\frac{b-a}{n} : i = 1,2,\ldots,n \right\}$$

entonces como $f(x) = x$ es creciente, se sigue que

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{x : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = x_{i-1} \\ M_i &= \sup\{x : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = x_i \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} s(f,\mathscr{P}_n) &= \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}\left(\frac{b-a}{n}\right) \\ &= \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(a+(i-1)\frac{b-a}{n}\right) \\ &= \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(an + \frac{(n-1)n}{2}\frac{b-a}{n}\right) \\ &= \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{1}{2}(a-b+an+bn)\right) \\ &= -\frac{(b-a)^2}{2n} + \frac{b^2-a^2}{2} \end{aligned}$$

y luego

$$\lim_{n\to\infty} s(f,\mathscr{P}_n) = \frac{b^2-a^2}{2}$$

De manera similar

$$\begin{aligned} S(f,\mathscr{P}_n) &= \sum_{i=1}^{n} x_i\left(\frac{b-a}{n}\right) \\ &= \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(a+i\frac{b-a}{n}\right) \\ &= \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2}n\right) \\ &= \frac{(b-a)^2}{2n} + \frac{b^2-a^2}{2} \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} S(f,\mathscr{P}_n) = \frac{b^2-a^2}{2}$$

y por lo tanto

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$$

Método puntos arbitrarios

Sea $\mathscr{P}$ una partición de $[a,b]$, que define los subintervalos $\Delta x_1, \cdots, \Delta_n$. De cada uno de estos subintervalos escogemos un c_i arbitrario. Llamemos

$$a_k : \text{punto medio del intervalo } [x_{k-1}, x_k] = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$$

Además, denotamos $\quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}. \quad$ Entonces:

$$\begin{aligned}
A(c_1, \cdots, c_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + c_i - a_i)\Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} (c_i - a_i)\Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i + x_{i-1}}{2}(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} (c_i - a_i)\Delta x_i \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - x_{i-1}^2) + \sum_{i=1}^{n} (c_i - a_i)\Delta x_i \\
&= \frac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2) + \sum_{i=1}^{n} (c_i - a_i)\Delta x_i \\
&= \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + \sum_{i=1}^{n} (c_i - a_i)\Delta x_i
\end{aligned}$$

Veamos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (c_i - a_i)\Delta x_i \to 0$ cuando $\|\mathscr{P}\| \to 0$.

Notamos que $\quad \forall i: \quad |\Delta x_i| \leq \|\mathscr{P}\| \quad$ y $\quad |c_i - a_i| \leq \dfrac{1}{2}\Delta x_i. \quad$ Entonces:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (c_i - a_i)\Delta x_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |c_i - a_i|\,|\Delta x_i| \leq \|\mathscr{P}\| \cdot \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{b-a}{2}\|\mathscr{P}\| \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad \|\mathscr{P}\| \to 0$$

Luego,

$$\lim_{\|\mathscr{P}\| \to 0} A(c_1, \cdots, c_n) = \int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

OBSERVACIÓN: Esta ejemplo ilustra la ventaja del método de las sumas superior e inferior. Notar, además, que esto resulta equivalente a calcular el área del triángulo con base el segmento de 0 a b menos el área del triángulo con base el segmento de 0 a a.

3. La función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \quad [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases}$$

no es integrable.

Dem. Por la propiedad arquimedeana, sabemos que en cada subintervalo de $[a,b]$, por pequeño que sea, existen racionales e irracionales. Luego:

$$M_k = 1 \qquad \wedge \qquad m_k = 0, \qquad k = 1, \cdots, n$$

Por lo tanto,

$$S(f,\mathscr{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b-a \qquad \wedge \qquad s(f,\mathscr{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$$

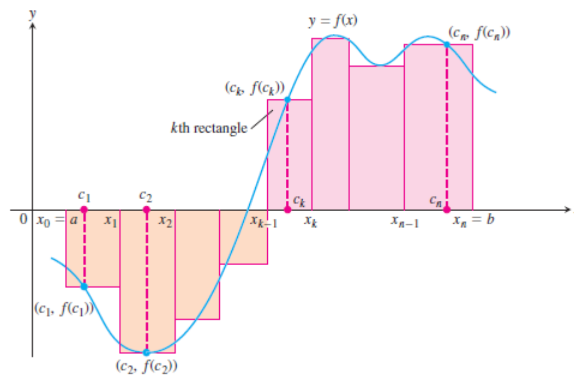
$$\therefore \quad \lim_{\|\mathscr{P}\|\to 0} S(f,\mathscr{P}) = b-a \neq 0 = \lim_{\|\mathscr{P}\|\to 0} s(f,\mathscr{P})$$

Por lo tanto, f **no** es integrable.

DEFINICIÓN 3.1.7 Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y $\mathscr{P}$ una partición del intervalo $[a,b]$. Una Suma de Riemann para la función f respecto de la partición $\mathscr{P}$ es una suma finita de la forma

$$S(f,\mathscr{P},\varepsilon_i) = \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)(x_k - x_{k-1})$$

donde los $\varepsilon_i \in [x_{i-1}, x_i]$.



OBSERVACIÓN: Cuando la función considerada es continua, las sumas superiores e inferiores corresponden a sumas de Riemann.

Escribiremos

$$\lim_{\|\mathscr{P}\|\to 0} S(f,\mathscr{P},\varepsilon_i) = L$$

para denotar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\mathscr{P}$ es una partición con $\|\mathscr{P}\| < \delta$ entonces $\left| S(f,\mathscr{P},\varepsilon_i) - L \right| < \varepsilon$.

TEOREMA 3.1.2 Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada entonces

1. $\displaystyle \lim_{\|\mathscr{P}\|\to 0} S(f,\mathscr{P}) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

2. $\lim\limits_{\|\mathscr{P}\|\to 0} s\left(f,\mathscr{P}\right) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

3. Si f es integrable en $[a,b]$ entonces $\lim\limits_{\|\mathscr{P}\|\to 0} S\left(f,\mathscr{P},\varepsilon_i\right) = \int_a^b f(x)\,dx$

El punto 3 es razonable pues

$$s\left(f,\mathscr{P}\right) \leq S\left(f,\mathscr{P},\varepsilon_i\right) \leq S\left(f,\mathscr{P}\right)$$

cualquiera sean las elecciones de ε_i realizadas.

OBSERVACIÓN: En los libros de cálculo se acostumbra a definir la integral de la siguiente forma: Sea f : $[a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Diremos que f es **integrable Riemann** si

$$\lim_{\|\mathscr{P}\|\to 0} S(f\,,\,\mathscr{P}\,,\,\varepsilon_i) = \lim_{\|\mathscr{P}\|\to 0} \sum_{k=1}^{r} f(\varepsilon_i)(t_k - t_{k-1})$$

existe y no depende del tipo de particiones ní de los ε_i escogidos. En tal caso se denota

$$\lim_{\|\mathscr{P}\|\to 0} S(f\,,\,\mathscr{P}\,,\,\varepsilon_i) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Esta es la definición que dimos al inicio, y es posible probar que ambas definiciones son equivalentes.

EJERCICIOS: [Desafio para los alumnos] Muestre que $f(x) = e^x$ es integrable en cada intervalo $[a,b]$ más aún, muestre que

$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a$$

Ind: Utilizar particiones aritméticas.

3.2. CLASE 7: Propiedades de la integral definida

Veremos en esta sección las propiedades más importantes de la integral de Riemann, que nos permitirán operar con ellas. Comenzamos con las propiedades de *linealidad*.

PROPOSICIÓN 3.2.1 Sean $f,\ g : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ acotadas e integrables. Entonces:

1. $f \pm g$ es integrable además $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

2. Si α es un real, entonces αf es integrable y $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$

Dem.

1. Basta notar que, para las sumas finitas, se tiene que
$$\sum f \pm g = \sum f \pm \sum g$$
y las integrales consideradas son límite de sumas finitas. Hacemos el detalle para la propiedad 2.

2. Si $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ es acotada e integrable entonces
$$\lim_{\|\mathscr{P}\|\to 0} S\left(f,\mathscr{P},\varepsilon_i\right) = \int_a^b f(x)\,dx$$
notar que si
$$S\left(f,\mathscr{P},\varepsilon_i\right) = \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x_k$$
entonces
$$S\left(\alpha f,\mathscr{P},\varepsilon_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha f(\varepsilon_k)\Delta x_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x_k = \alpha S\left(f,\mathscr{P},\varepsilon_i\right)$$
se sigue
$$\lim_{\|\mathscr{P}\|\to 0} S\left(\alpha f,\mathscr{P},\varepsilon_i\right) = \lim_{\|\mathscr{P}\|\to 0}\left(\alpha S\left(f,\mathscr{P},\varepsilon_i\right)\right) = \alpha \lim_{\|\mathscr{P}\|\to 0} S\left(f,\mathscr{P},\varepsilon_i\right) = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$$
pero
$$\lim_{\|\mathscr{P}\|\to 0} S\left(\alpha f,\mathscr{P},\varepsilon_i\right) = \int_a^b \alpha f(x)\,dx$$
se sigue
$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$$

TEOREMA 3.2.1 Si $f(x)=0 \quad \forall x \in [a,b]$, salvo un número finito de puntos, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

Dem. Sean $a_1, \cdots, a_k$ los puntos del intervalo en donde $f(x) \neq 0$.
Sea $M = \text{máx}\{|f(a_i)|,\ i=1,\cdots,k\}$. Entonces:

$$|A(c_1,\cdots,c_k)| = \left|\sum_{i=1}^{k} f(c_i)\Delta x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{k}|f(c_i)|\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{k}|f(a_i)|\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{k}|M|\|\mathscr{P}\| = |M|\|\mathscr{P}\|k$$

Así: $\quad |A(c_1,\cdots,c_k)| \underset{\|\mathscr{P}\|\to 0}{\longrightarrow} 0$

$$\therefore \qquad \int_a^b f(x)\,dx = 0$$

OBSERVACIÓN: Una función de este tipo se dice «nula casi en todas partes» ó «nula c.t.p.». En general, si una propiedad se cumple en un subconjunto de $\mathbb{R}$ **excepto, a lo más** en un número finito de puntos, se dice que la propiedad se satisface en el conjunto c.t.p.

COROLARIO 3.2.1 Sean f, g dos funciones definidas en $[a,b]$ tales que f es integrable y $f(x) \neq g(x)$ sólo en un número finito de puntos (o, $f(x)=g(x)$ c.t.p.). Entonces, g es integrable y, más aún:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)$$

Dem. Sea $h(x) = g(x) - f(x)$. Por lo tanto, h es nula c.t.p., de donde h es integrable y

$$\int_a^b h(x)\,dx = 0$$

Pero, $g(x) = f(x) + h(x) \quad \Rightarrow \quad g$ es integrable (suma de funciones integrables en $[a,b]$). Además:

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

TEOREMA 3.2.2 Sean $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotadas e integrables. Entonces:

1. Si $f(x) \geq 0$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

2. Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, salvo quizás en un conjunto finito de puntos, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

3. $|f(x)|$ es integrable y se cumple:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

4. Si $m \leq f(x) \leq M$, salvo quizás un conjunto finito de puntos, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Dem.

2. Por linealidad, $g-f$ es integrable, y por hipótesis, $f(x) \leq g(x)$ c.t.p. Luego: $g(x)-f(x) \geq 0$ c.t.p. $\therefore \displaystyle\int_a^b \big(g(x)-f(x)\big)\,dx \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$

3. Como $|f(x)|$ será continua en todos los puntos en que f lo sea, se tiene que $|f|$ es integrable en $[a,b]$. Además:

$$f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in [a,b] \qquad \Longrightarrow \qquad \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad \text{y}$$

$$-f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in [a,b] \qquad \Longrightarrow \qquad -\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$\therefore \qquad \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

4. Aplicación directa de 2.

EJEMPLOS:

1. Muestre que $\displaystyle 0{,}5 \leq \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(4-x^2)}} \leq 0{,}6$

Solución:

La función en el integrando está definida para $-\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2}$. Luego:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{3}{4}\cdot\frac{15}{4} & \leq & (1-x^2)(4-x^2) & \leq & 4 \\ \frac{3}{4}\sqrt{5} & \leq & \sqrt{(1-x^2)(4-x^2)} & \leq & 2 \\ \frac{1}{2} & \leq & \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(4-x^2)}} & \leq & \frac{4}{3\sqrt{5}} \leq \frac{6}{10} \end{array}$$

2. Sin calcular las integrales decidir cual es mayor:

(a) $\displaystyle\int_0^1 x\,dx$ ó $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}^2 x\,dx$ ó $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen} x\,dx$

PROPOSICIÓN 3.2.2 (Aditividad) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada e integrable. Para todo $c \in [a, b]$, f es integrable en los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$. Además se cumple:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

El recíproco también es válido, es decir, si f es integrable en los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$ para algún $c \in [a, b]$ entonces $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y vale la igualdad anterior.

DEFINICIÓN 3.2.1 Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada e integrable. Definimos

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

PROPOSICIÓN 3.2.3 Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada e integrable. Dados $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$ cualesquiera y sin importar el orden entre ellos, se cumple:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx$$

EJEMPLOS:

1. Suponga que

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = 5, \qquad \int_1^4 f(x)\,dx = -2 \quad \text{y} \quad \int_{-1}^1 h(x)\,dx = 7. \qquad \text{Entonces}$$

a) $\displaystyle\int_4^{-1} f(x)\,dx = -\int_{-1}^4 f(x)\,dx = -\left(\int_{-1}^1 f(x)\,dx + \int_1^4 f(x)\,dx\right) = -(5+(-2)) = -3$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \big(2f(x) - 3h(x)\big)\,dx = 2\cdot 5 - 3\cdot 7 = -11$

2. Calcular $\displaystyle\int_0^4 2^{[x]}\,dx$ donde $[x]$ denota la parte entera de x.

$$\int_0^4 2^{[x]}\,dx = \int_0^1 2^{[x]}\,dx + \int_1^2 2^{[x]}\,dx + \int_2^3 2^{[x]}\,dx + \int_3^4 2^{[x]}\,dx =$$

$$= \int_0^1 2^0\,dx + \int_1^2 2^1\,dx + \int_2^3 2^2\,dx + \int_3^4 2^3\,dx = 1+2+4+8 = 15$$

3. Calcular $\displaystyle\int_1^3 \left[x^2\right]\, dx.$

   En este caso, debemos hacer un análisis más cuidadoso. Notemos que:

$$[x^2] = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 1 \le x < \sqrt{2} \\ 2 & \text{si} \quad \sqrt{2} \le x < \sqrt{3} \\ 3 & \text{si} \quad \sqrt{3} \le x < 2 \\ 4 & \text{si} \quad 2 \le x < \sqrt{5} \\ 5 & \text{si} \quad \sqrt{5} \le x < \sqrt{6} \\ 6 & \text{si} \quad \sqrt{6} \le x < \sqrt{7} \\ 7 & \text{si} \quad \sqrt{7} \le x < \sqrt{8} \\ 8 & \text{si} \quad \sqrt{8} \le x < 3 \end{cases}$$

   Dejamos el resto de ejercicio al lector.

EJERCICIOS: Obtenga las antiderivadas de las siguientes:

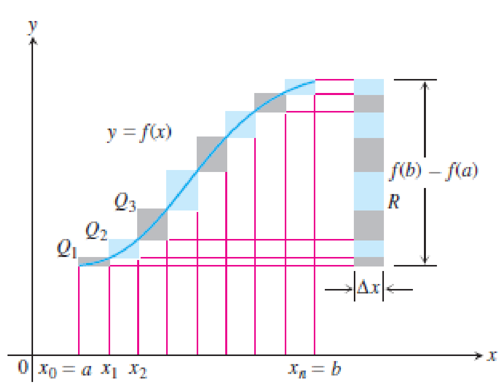
1. $f(x) = x - [x], \quad x \in [0,4]$

2. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < \pi/2 \\ \operatorname{sen} x, & \pi/2 \le x \le 3\pi/2 \\ -1, & x \ge 3\pi/2 \end{cases}$

3.2.1. Criterios de Integrabilidad

TEOREMA 3.2.3 Sea $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ monótona; entonces f es integrable en $[a\,,b]$.

Dem.: Supongamos que $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ es creciente y $\mathscr{P}_n$ es la partición aritmética de $[a,b]$ entonces



$$\begin{aligned} S(f,\mathscr{P}_n) &= \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \\ s(f,\mathscr{P}_n) &= \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \end{aligned}$$

Luego

$$S(f,\mathscr{P}_n) - s(f,\mathscr{P}_n) = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1})) = \left(\frac{b-a}{n}\right)(f(b) - f(a))$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty}\left(S(f,\mathscr{P}_n) - s(f,\mathscr{P}_n)\right) = 0$$

y por lo tanto f es integrable.

OBSERVACIÓN: Muchas de las funciones con las cuales se trabaja en cálculo son monótonas por intervalos. Entonces, por la propiedad de aditividad y el teorema anterior, es posible argumentar la integrabilidad de prácticamente todas las funciones elementales que conocemos, como $e^x, \ln x, \arctan x$,etc.

Con un poco más de esfuerzo es posible mostrar:

TEOREMA 3.2.4 Sea $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ continua; entonces f es integrable en $[a\,,b]$.

Este criterio se puede extender a funciones continuas por trazos, entendiendo por éstas, funciones acotadas con un número finito de discontinuidades **de tipo salto**, como vemos en el siguiente

TEOREMA 3.2.5 Sea $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ continua por trazos, y sean $x_0\,, x_1\,, \dots\, x_n$ los puntos de discontinuidad de f. Entonces f es integrable en $[a\,,b]$ y se cumple que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_n}^{b} f(x)\,dx$$

Para el cálculo integral también existe un *teorema del valor medio*:

TEOREMA 3.2.6 (Teorema del Valor Medio para Integrales) Sea f una función continua sobre el intervalo $[a,b]$; entonces:

$$\exists\, c \in [a,b] : \qquad \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

OBSERVACIÓN: Para entender geométricamente el significado de este teorema, considere una función $f \geq 0$ en el intervalo. Luego, esto quiere decir que existe un punto c en $[a,b]$ tal que el área bajo la curva de $y = f(x)$ es igual al área del rectángulo de base $b-a$ y altura $f(c)$.

Veremos a continuación el *Teorema del Valor Medio Generalizado* para integrales, y demostraremos este último. Veremos que el anterior es un caso particular de éste.

TEOREMA 3.2.7 (Teorema Generalizado del Valor Medio para Integrales) Sean f, g funciones tales que:

- f es continua en $[a,b]$
- g es integrable sobre $[a,b]$ y **no cambia de signo** en este intervalo.

Entonces,

$$\exists c \in [a,b] : \qquad \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

Dem.: Supongamos que $g \geq 0$ (análogamente si $g < 0$).

Como f es continua en un intervalo **cerrado**, sabemos que alcanza su máximo y su mínimo en el intervalo. Luego, si $m = \text{mín}\{f(x), x \in [a,b]\} \quad \wedge \quad M = \text{máx}\{f(x), x \in [a,b]\}$:

$$\begin{array}{ccccc} m & \leq & f(x) & \leq & M \\ m\,g(x) & \leq & f(x)g(x) & \leq & M\,g(x) \\ \displaystyle\int_a^b m\,g(x)\,dx & \leq & \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx & \leq & \displaystyle\int_a^b M\,g(x)\,dx \\ m\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx & \leq & \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx & \leq & M\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx \end{array}$$

- Si $\displaystyle\int_a^b g(x)dx = 0$ entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ y luego para cualquier c en el intervalo ambas integrales valen 0.
- Si $\displaystyle\int_a^b g(x)dx > 0$ entonces $m \leq \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$. Pero, como f es continua en $[a,b]$ y está acotada por los mismos valores, sabemos que f toma **todos** los valores entre m y M. Luego, en particular, existe $c \in [a,b]$:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

OBSERVACIÓN:

- Para demostrar el Teorema del Valor Medio anterior (no generalizado), basta hacer $g(x)=1$ en el Teorema del Valor Medio generalizado.

- Notemos que otra manera de mirar el T.V.M. es señalar que, bajo las hipótesis,

$$\exists c \in [a,b]: \qquad f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Esta sencilla última observación, permite definir

DEFINICIÓN 3.2.2 Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrable. Se define el *valor promedio* de f en $[a,b]$ por

$$AV(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

EJEMPLOS:

1. Probar que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua y $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=0$ entonces existe $c\in[a,b]$ tal que $f(c)=0$.

2. Si $[x]$ denota la parte entera de x, calcular:

   a) $\displaystyle\int_0^4 (-2)^{[x]}\,dx$ *b*) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1+(-1)^{[x]}}{2}\,dx$ *c*) $\displaystyle\int_0^{16} \left[\sqrt{x}\right]\,dx$

3. Muestre que $\displaystyle\int_a^b e^x\,dx=e^b-e^a$.

   Dem.: Sean $\mathscr{P}_n$ las particiones aritméticas de $[a,b]$. Sabemos que $f(x)=e^x$ es integrable por ser monótona creciente, y luego para cualquier elección de puntos $\varepsilon_k\in[x_{k-1},x_k]$ se cumple

$$\lim_{\|\mathscr{P}_n\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\exp(\varepsilon_k)\Delta x_k=\int_a^b e^x\,dx$$

   Por el teorema del valor medio:

$$\frac{\exp(x_k)-\exp(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}=\exp(\varepsilon_k) \qquad \text{para algún } \varepsilon_k\in\,]x_{k-1},x_k[\qquad \text{de donde}$$

$$\exp(x_k)-\exp(x_{k-1})=\exp(\varepsilon_k)\Delta x_k$$

   Para esas elecciones especiales de ε_k se tiene

$$\sum_{k=1}^{n}\exp(\varepsilon_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\big(\exp(x_k)-\exp(x_{k-1})\big)=e^b-e^a$$

Pero $\quad \displaystyle\lim_{\|\mathscr{P}_n\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \exp(\varepsilon_k)\Delta x_k = \int_a^b e^x\,dx \quad$ y luego

$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a$$

4. ¿ Qué valores de a y b maximizan el valor de $\displaystyle\int_a^b \left(x - x^2\right) dx$?

3.3. CLASE 8: Teorema Fundamental del Cálculo

3.3.1. Teorema Fundamental del Cálculo

DEFINICIÓN 3.3.1 Sea $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ acotada, integrable. Llamaremos **Integral Indefinida de** f a la función $F : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ definida como

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

PROPOSICIÓN 3.3.1 Si $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ es acotada e integrable entonces F es continua.

Dem.: Sea $x_0 \in\,]a,b[$. Probaremos que $\displaystyle\lim_{h\to 0} F(x_0+h) = F(x_0)$.
Sea $h \in \mathbb{R}:\ x_0 + h \in\,]a,b[$. Entonces:

$$|F(x_0+h) - F(x_0)| = \left| \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt \right| = \left| \int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \right| \le |Mh| \qquad \text{pues } f \text{ es acotada}$$

Luego, como:

$$0 \le \lim_{h\to 0} |F(x_0+h) - F(x_0)| \le \lim_{h\to 0} |Mh| = 0$$

por el teorema del «sandwich»: $\quad \displaystyle\lim_{h\to 0} F(x_0+h) = F(x_0) \quad$ y por lo tanto F es continua.

TEOREMA 3.3.1 (Teorema Fundamental del Cálculo) Sea $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ continua; entonces la integral indefinida F es derivable en $x_0 \in [a,b]$ y, más aún

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

Dem.: Por la definición de la derivada:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t)dt\right)$$

Por el Teorema del valor medio para integrales, sabemos que: $\exists c \in [x, x+h]$:

$$\frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t)dt\right) = f(c)$$

Notamos también que si $h \to 0$, entonces $c \to x$. Luego, como f es continua, se tiene:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t)dt\right) = \lim_{h\to 0} f(c) = \lim_{c\to x} f(c) = f(x)$$

Luego, efectivamente se tiene que F es una antiderivada de f.

OBSERVACIÓN: Otras maneras de escribir este resultado son:

- $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'\Big|_{x=x_0} = f(x_0)$
- $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)\Big|_{x=x_0} = f(x_0)$

EJEMPLOS:

1. $\left(\int_0^x \sqrt[3]{1+t^5}\,dt\right)' = \sqrt[3]{1+x^5}$

2. Sea $f(x) = \int_1^x x^3 \arctan(t^2)\,dt$. Calcule $f''(1)$.

   Solución:

$$f(x) = \int_1^x x^3 \arctan(t^2)\,dt = x^3 \int_1^x \arctan(t^2)\,dt$$

$$f'(x) = \left(x^3 \int_1^x \arctan(t^2)\,dt\right)' = 3x^2 \int_1^x \arctan(t^2)\,dt + x^3 \arctan(x^2)$$

$$f''(x) = 6x \int_1^x \arctan(t^2)\,dt + 3x^2\arctan(x^2) + 3x^2\arctan(x^2) + x^3 \cdot \frac{1}{1+x^4} \cdot 2x$$

Evaluando en $x = 1$: $f''(1) = \dfrac{3\pi}{2} + 1$

TEOREMA 3.3.2 (Regla de Barrows o Segundo Teorema Fundamental del Cálculo) Sea $f:[a\,,b]\to\mathbb{R}$ continua y sea g una primitiva de f en $[a\,,b]$; entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(b)-g(a)$$

Dem.: Sea F la integral indefinida de f, es decir, $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. Por lo anterior, sabemos que F es continua y que $F'(x)=f(x)$, es decir, F también es una antiderivada de f. Luego:

$$F(x)=g(x)+C, \qquad \forall x\in[a,b]$$

En particular:

$$g(a)+C=F(a)=0 \qquad \Longrightarrow \qquad C=-g(a)$$

Así

$$F(x)=g(x)-g(a) \qquad \forall x\in[a,b] \qquad \Longrightarrow \qquad F(b)=g(b)-g(a)$$

$$\therefore \qquad \int_a^b f(x)dx=g(b)-g(a)$$

EJEMPLOS:

1. $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos x\,dx=\operatorname{sen}x\Big|_0^{\pi}=\operatorname{sen}\pi-\operatorname{sen}0=0$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi}\operatorname{sen}x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-\cos\pi-(-\cos 0)=1-(-1)=2$
3. $\displaystyle\int_0^{4}\sqrt{2x+1}\,dx=\frac{2}{3}(2x+1)^{3/2}\,\frac{1}{2}\Big|_0^{4}=\frac{1}{3}(27-1)=\frac{26}{3}$
4. $\displaystyle\int_0^{2}\frac{dx}{x^2-2x+2}=\int_0^{2}\frac{dx}{(x-1)^2+1}=\arctan(x-1)\Big|_0^{2}=\arctan(1)-\arctan(-1)=\frac{\pi}{2}$
5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}2x}{1+\operatorname{sen}^2x}\,dx=\int_0^{\pi/2}\frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{1+\operatorname{sen}^2x}\,dx=\ln\left(1+\operatorname{sen}^2(x)\right)\Big|_0^{\pi/2}=\ln(2)$

Usando regla de la cadena, el teorema anterior tiene una versión más fuerte:

PROPOSICIÓN 3.3.2 Si $f(x)$ es continua y $g(x)$, $h(x)$ son derivables en el intervalo $[a\,,b]$ entonces se cumple:

1. $\displaystyle\left(\int_a^{g(x)} f(t)\,dt\right)'=f(g(x))\cdot g'(x)$

2. $\displaystyle \left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt \right)' = f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x)$

Dem.: Demostraremos 1. pues 2. se demuestra análogamente:

Para calcular $\displaystyle \left(\int_{a}^{g(x)} f(t)\,dt \right)'$ suponga que F es una primitiva de f. Luego:

$$\left(\int_{a}^{g(x)} f(t)\,dt \right)' = \Big(F(g(x)) - F(a) \Big)' = F'(g(x)) \cdot g'(x) - 0 = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

EJEMPLOS:

1. $\displaystyle \left(\int_{x^3}^{\cos x} \operatorname{sen}\left(t^2\right)\,dt \right)' = \operatorname{sen}\left(\cos^2 x\right) \cdot (-\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen}\left(x^6\right) \cdot 3x^2$

$$= -\operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\cos^2 x\right) - 3x^2 \operatorname{sen}\left(x^6\right)$$

2. Si $\displaystyle x^3 + 2x = \int_0^{x^3} f(t)\,dt$, calcular $f(3)$.

Solución: Derivando directamente la expresión $\displaystyle x^3 + 2x = \int_0^{x^3} f(t)\,dt$ se tiene:

$$3x^2 + 2 = f(x^3) \cdot 3x^2$$

Evaluando en $x = \sqrt[3]{3}$:

$$f(3) = \frac{3\sqrt[3]{9} + 2}{3\sqrt[3]{9}}$$

3. Determinar todas las funciones $y = f(x)$ tal que

$$y(x) + \int_0^x y(t)\,dt + 3 = 0$$

Solución: Derivando directamente la expresión, obtenemos

$$y'(x) + y(x) = 0 \qquad \iff \qquad \frac{dy}{y} = -dx$$

$$\therefore \qquad \int \frac{dy}{y} = -\int dx \qquad \Longrightarrow \qquad \ln|y| = -x + C \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = Ke^{-x}$$

Para determinar la constante K, reemplazamos la solución en la ecuación:

$$Ke^{-x} + \int_0^x Ke^{-t}\,dt + 3 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad Ke^{-x} - Ke^{-x} + K + 3 = 0$$

de donde $K = -3$ por lo que $y(x) = -3e^{-x}$.

4. Sea $f:[0,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Para todo $n\in\mathbb{N}$, sea $\mathscr{P}_n=\left\{0,\frac{b}{n},\frac{2b}{n},\cdots,\frac{nb}{n}\right\}$.

   a) Verifique que $\displaystyle\int_0^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{b}{n}f(kb/n)$

   b) Use lo anterior para evaluar:

   i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)$

   ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}+\cdots+\operatorname{sen}\frac{n\pi}{n}\right)$

   iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{na}+\frac{1}{na+b}+\frac{1}{na+2b}+\cdots+\frac{1}{na+(n-1)b}\right)$

   iv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{3/n}+e^{6/n}+\cdots+e^{3n/n}\right)$

Dem.:

a) La partición $\mathscr{P}_n$ es aritmética, y su norma es $\|\mathscr{P}_n\|=\dfrac{b}{n}$. Además, $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}=\dfrac{b}{n}$, $k=1,\cdots,n$.

Escogemos $c_k=x_k=\dfrac{bk}{n}$. Luego:

$$\int_0^b f(x)\,dx = \lim_{\|\mathscr{P}_n\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\Delta x_k = \lim_{\|\mathscr{P}_n\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{bk}{n}\right)\frac{b}{n}$$

b) i) Sea $f(x)=x^2$ y consideremos la partición $\mathscr{P}_n=\left\{0,\dfrac{b}{n},\dfrac{2b}{n},\cdots,\dfrac{nb}{n}\right\}$.

$\therefore \quad f(c_k)=\left(\dfrac{bk}{n}\right)^2.$ Luego:

$$b^3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{n}\left(\left(\frac{b}{n}\right)^2+\left(\frac{2b}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{nb}{n}\right)^2\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{bk}{n}\right)\frac{b}{n} = \lim_{\|\mathscr{P}_n\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{bk}{n}\right)\frac{b}{n} = \int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right) = \frac{1}{3}$$

ii) Sea $f(x) = \operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad f(c_k) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{bk}{n}\right)$. Claramente, debemos escoger $b = \pi$. Luego, $f(c_k) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi k}{n}\right)$

Luego:

$$\pi \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\frac{\pi}{n} = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$$

Así:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$$

iii) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{na} + \frac{1}{na+b} + \frac{1}{na+2b} + \cdots + \frac{1}{na+(n-1)b}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{na+(k-1)b}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a+\left(\frac{k-1}{n}\right)b}\right)\frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{a+bx}\,dx$$

iv) Claramente, en este caso, $f(x) = e^{3x}$, y se procede como arriba.

5. Sea $f(x) = \begin{cases} 2x\operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Calcule $\displaystyle\int_{-2/\pi}^{2/\pi} f(x)\,dx$.

Solución: Una antiderivada de f en el intervalo $\left[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$ es

$$F(x) = \begin{cases} x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

ya que, efectivamente, F es continua en $\left[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$. Además, es claro que si $x \neq 0$, entonces $F'(x) = f(x)$. Veamos que $F'(0) = 0$:

$$F'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{F(h)-F(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\operatorname{sen}\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h\operatorname{sen}\frac{1}{h} = 0$$

Luego:

$$\int_{-2/\pi}^{2/\pi} f(x)\,dx = F\left(\frac{2}{\pi}\right) - F\left(-\frac{2}{\pi}\right) = \frac{4}{\pi^2}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{8}{\pi^2}$$

6. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua; sean $a, b \in \mathbb{R} : a < b$. Si

$$\forall t \in \mathbb{R} : \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_{a+t}^{b+t} f(x)dx$$

probar que f es periódica y hallar su período.

Dem.:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_{a+t}^{b+t} f(x)dx \\
&= \int_{a+t}^{b} f(x)dx + \int_b^{b+t} f(x)dx \\
&= -\int_b^{a+t} f(x)dx + \int_b^{b+t} f(x)dx \\
&= -\int_b^{a} f(x)dx - \int_a^{a+t} f(x)dx + \int_b^{b+t} f(x)dx
\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \int_a^{a+t} f(x)dx = \int_b^{b+t} f(x)dx$$

Derivando respecto a t obtenemos:

$$f(a+t) = f(b+t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Evaluando en $t=0$: $\quad f(a) = f(b)$.

Así, $\quad T = b-a$ es un período para f; en efecto: $\quad f(a+t+(b-a)) = f(b+t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$

7. Calcular $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{e\cdot\frac{x^2}{\pi} - \frac{e\pi}{4} + \int_x^{\pi/2} e^{\operatorname{sen} t}\,dt}{1+\cos 2x}$

   Solución: Este es un límite de la forma $\frac{0}{0}$, por lo que aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{e\cdot\frac{x^2}{\pi} - \frac{e\pi}{4} + \int_x^{\pi/2} e^{\operatorname{sen} t}\,dt}{1+\cos 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{2ex}{\pi} - e^{\operatorname{sen} x}}{-2\operatorname{sen}(2x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{2e}{\pi} - e^{\operatorname{sen} x}\cos x}{-4\cos(2x)} = \frac{\frac{2e}{\pi}}{4} = \frac{e}{2\pi}$$

EJERCICIOS:

1. Pruebe que $\displaystyle\int_0^{2\pi} |1+2\cos x|\,dx = 4\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}$.

2. La función $f(x)$ toma los mismos valores para $x=a$ y $x=b$, y tiene derivada continua. Determine el valor de $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,dx$.

3. Determine f y c si $\displaystyle\int_c^x f(t)dt = \cos x - \frac{1}{2}$.

4. Determine f y un número $a\in\mathbb{R}$ tal que $\displaystyle 6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 2\sqrt{x} \qquad \forall x > 0$.

5. Calcule los límites:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\sqrt[4]{\frac{2}{n}}+\sqrt[4]{\frac{4}{n}}+\sqrt[4]{\frac{6}{n}}+\cdots+\sqrt[4]{\frac{2n}{n}}\right)\right] \qquad b)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{5n^3k+\sqrt{7}k^4}{2n^5}$$

6. Encuentre $\dfrac{dy}{dx}$, donde y está dado implícitamente por

$$\int_0^y e^t\,dt+\int_0^x \cos t\,dt=0$$

7. Calcular $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x \operatorname{arc\,sen} t\,dt}{x\tan x}$

A continuación veremos cómo se aplica lo que hemos visto respecto a las técnicas de integración (o de cálculo de primitivas).

TEOREMA 3.3.3 (Sustitución en integrales definidas) Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y sea $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ con derivada φ' continua y tal que: $\varphi(c)=a,\ \varphi(d)=b$. Entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_c^d f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx$$

OBSERVACIÓN: Es importante, al hacer una sustitución en integrales definidas, preocuparse que la sustitución sea consistente, es decir, esté bien definida en el intervalo de integración. Por ejemplo, si al calcular $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{5-3\cos x}$ hacemos $u=\tan(\frac{x}{2})$ entonces cuando $x=\pi$ se tiene que $u\to\infty$. Vea qué más sucede.

EJEMPLOS:

1. Evalúe la integral definida: $\displaystyle\int_0^2 xe^{x^2}\,dx$

   Solución: Consideramos el cambio de variable $u=x^2$ con $x\in[0,2]$ $\Rightarrow$ $du=2x\,dx$. Luego, $x=0 \iff u=0$ y $x=2 \iff u=4$.

   Entonces:

$$\begin{aligned}\int_0^2 xe^{x^2}\,dx &= \int_0^4 \frac{1}{2}e^u\,du = \frac{1}{2}e^u\Big|_0^4 = \frac{1}{2}(e^4-e^0)\\ &= \frac{1}{2}(e^4-1)\end{aligned}$$

2. ¿Es posible realizar la sustitución $x = \sec t$ en la integral $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\, dx$?

   Solución: **No** es posible ya que $\sec t \geq 1$ y el intervalo de integración es $[0,1]$.

3. Demuestre que
$$\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\operatorname{sen} x)\, dx$$
   Aplique esta propiedad para calcular
$$\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

   Solución: Hacemos el cambio de variable: $u = \pi - x \quad \Rightarrow \quad du = -dx$:
$$\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x)\, dx = -\int_\pi^0 (\pi - u) f(\operatorname{sen}(\pi - u))\, du = \int_0^\pi \pi f(\operatorname{sen} u)\, du - \int_0^\pi u f(\operatorname{sen} u)\, du$$
   donde hemos usado que $\operatorname{sen}(\pi - u) = \operatorname{sen} u$. Luego:
$$2\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \pi \int_0^\pi f(\operatorname{sen} u)\, du \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\operatorname{sen} u)\, du$$
$$\therefore \quad \int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\, dx = -\frac{\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{\pi}{2} \arctan(t)\Big|_1^{-1} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

4. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, tal que $f(x) = f(a+b-x)$. Si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = M$, determine $\displaystyle\int_a^b x f(x) dx$.

   Solución:
$$\int_a^b x f(x) dx \underbrace{=}_{u=a+b-x} \int_b^a (a+b-u) f(a+b-u)(-du) = \int_a^b (a+b-u) f(u) du$$
$$= \int_a^b (a+b) f(u) du - \int_a^b u f(u) du = (a+b)M - \int_a^b u f(u) du$$
$$\therefore \qquad 2\int_a^b x f(x) dx = (a+b)M \qquad \Longrightarrow \qquad \int_a^b x f(x) dx = \frac{(a+b)M}{2}$$

EJERCICIOS:

1. Pruebe que $\displaystyle\int_0^1 x^m (1-x)^n\, dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m\, dx.$

2. Sea $a \in \mathbb{R}^+$ y considere $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ una función continua.

   a) Muestre que si f es impar entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

   b) Muestre que si f es par entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

3. Aplique lo anterior para calcular:

   a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \,\text{sen}(5x)\,dx$

   b) $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \cos x \,\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\,dx$

TEOREMA 3.3.4 (Integración por partes en integrales definidas) Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciables y tales que f' y g' son integrables en $[a, b]$, entonces:

$$\int_{a}^{b} f(x)g'(x)dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} f'(x)g(x)dx$$

EJEMPLOS:

1. Calcular $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x\cos(x)\,dx$

   Sean $f, g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ tales que,

$$f(x) = x,\ g'(x) = \cos(x)\,dx. \quad \text{Entonces } f'(x) = dx, \text{ y } g(x) = \text{sen}(x)$$

   Luego, integrando por partes:

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\pi} x\cos(x)\,dx &= x\,\text{sen}(x)\Big|_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi} \text{sen}(x)dx \\
&= x\,\text{sen}(x)\Big|_{0}^{\pi} + \cos(x)\Big|_{0}^{\pi} \\
&= (\pi\,\text{sen}(\pi) - 0\,\text{sen}(0)) + (\cos(\pi) - \cos(0)) = -2
\end{aligned}$$

2. Sea f una función con primera derivada continua en $[0, 1]$. Si se sabe que $f(0) = 4$ y $f(2) = 9$, calcule:

$$\int_{0}^{1} f^2(2x)\cdot f'(2x)\,dx$$

Solución: Integramos por partes, con $u = f^2(2x)$, $dv = f'(2x)\,dx$ de donde $v = \frac{f(2x)}{2}$.

Luego:

$$I = \int_0^1 f^2(2x)\cdot f'(2x)\,dx = f^2(2x)\cdot \frac{f(2x)}{2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 4f^2(2x)\cdot f'(2x)\,dx =$$

$$= \frac{f^3(2x)}{2}\Big|_0^1 - 2I = \frac{f^3(2)}{2} - \frac{f^3(0)}{2} - 2I = \frac{9^3}{2} - \frac{4^3}{2} - 2I$$

$$\therefore \qquad I = \frac{9^3 - 4^3}{6}$$

3. Sabiendo que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2$, calcule $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{x+1}\,dx$.

Solución: Integramos por partes, con $u = \arctan x$, $dv = \dfrac{dx}{x+1}$ de donde $v = \ln(x+1)$.

Luego:

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x+1}\,dx = \arctan x \ln(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{4}\ln 2 - \frac{\pi}{8}\ln 2 = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

4. Si $\displaystyle I_n = \int_0^1 \frac{(x+1)^2-2}{(x^2+1)^n}dx$ y $\displaystyle J_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^n}$:

   i) Calcular I_1.

   ii) Calcular I_2.

   iii) Demuestre que $\displaystyle I_n = \frac{1-2^{1-n}}{n-1} + J_{n-1} - 2J_n$.

Solución:

i) $$I_1 = \int_0^1 \frac{(x+1)^2-2}{(x^2+1)}dx = \int_0^1 \frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)}dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= x + \ln(x^2+1) - 2\arctan x\Big|_0^1 = 1 + \ln 2 - \frac{\pi}{2}$$

ii) $$I_2 = \int_0^1 \frac{(x+1)^2-2}{(x^2+1)^2}dx = \int_0^1 \frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}dx = \int_0^1 \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx + \int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx + \left(-\frac{1}{x^2+1}\right)\Big|_0^1 = \int_0^1 \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx + \frac{1}{2}$$

Para calcular la integral restante, hacemos el cambio de variable:

$u = \arctan x \quad \Rightarrow \quad du = \dfrac{dx}{1+x^2}$ de donde $(x=0 \quad \Rightarrow \quad u=0) \quad \wedge \quad \left(x=1 \quad \Rightarrow \quad u = \dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\therefore \quad I_2 = \frac{1}{2} + \int_0^{\pi/4} -2\cos u\,du = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2u\right)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

iii) $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(x+1)^2-2}{(x^2+1)^n}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2-1}{(x^2+1)^n}\,dx + \int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^n}\,dx =$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int_0^1 \frac{2\,dx}{(x^2+1)^n} + \int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^n}\,dx = J_{n-1} - 2J_n + \int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^n}\,dx =$$

$$= J_{n-1} - 2J_n + \left.\frac{(x^2+1)^{1-n}}{1-n}\right|_0^1 = J_{n-1} - 2J_n + \frac{1-2^{1-n}}{n-1}$$

5. Usando fórmulas de reducción, obtener la fórmula de Wallis:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots n}\,\dfrac{\pi}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\[2ex] \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots(n-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots n} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Solución:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\operatorname{sen}^{n-1} x}_{u}\,\underbrace{\operatorname{sen} x\,dx}_{dv} = \cdots = (n-1)\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx$$

Es decir:

$$nI_n = (n-1)I_{n-2} \qquad \text{de donde} \qquad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} I_{n-2} &= \frac{n-2-1}{n-2} I_{n-4} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} \\ &\vdots \\ I_2 &= \frac{2-1}{2} I_0 \qquad \text{e} \qquad I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \qquad I_2 = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}$$

Además: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi/2} = 1 \qquad \therefore \quad I_1 = 1$

Así, finalmente, se tiene la fórmula pedida.

Observación: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 x\,dx = \frac{5}{6}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{15\pi}{32}$

Dejamos como ejercicio el cálculo análogo para $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$

6. Sea $f(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t+1}\,dt$, si $x>0$. Calcule $f(x)+f(1/x)$. Calcule además esta suma para $x=2$.

   Solución:

   Tenemos que $f(1/x) = \displaystyle\int_1^{1/x} \frac{\ln t}{t+1}\,dt$ y debemos calcular entonces:

$$f(x)+f(1/x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t+1}\,dt + \int_1^{1/x} \frac{\ln t}{t+1}\,dt$$

   Analicemos la segunda integral:

$$\int_1^{1/x} \frac{\ln t}{t+1}\,dt \underset{t=\frac{1}{u}}{=} -\int_1^x \frac{\ln\frac{1}{u}}{\frac{1}{u}+1}\cdot\frac{1}{u^2}\,du = \int_1^x \frac{\ln u}{u(1+u)}\,du$$

   Luego:

$$f(x)+f(1/x) = \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t(1+t)} + \frac{\ln t}{t+1}\right)dt = \int_1^x \frac{\ln t(1+t)}{t(1+t)}\,dt = \int_1^x (\ln t)\,t^{-1}\,dt$$

   Calculamos esta última integral por partes:

$$I = \int_1^x \underbrace{\ln t}_{u}\,\underbrace{t^{-1}\,dt}_{dv} = \ln t\cdot\ln t\Big|_1^x - \int_1^x t^{-1}\ln t\,dt = \ln^2 x - I$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2}\ln^2 x \qquad \text{de donde} \qquad f(x)+f(1/x) = \frac{1}{2}\ln^2 x$$

   En particular, si $x=2$: $\quad f(2)+f(1/2) = \dfrac{1}{2}\ln^2 2.$

EJERCICIOS:

1. Encontrar la fórmula de reducción para $\displaystyle\int_1^e x^5(\ln x)^n\,dx$. Con ella, calcular I_3.

2. Demuestre, usando fórmulas de reducción, que

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}$$

3. Demuestre que $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$\int_0^2 x^n\sqrt{2x-x^2}\,dx = \frac{(2n+1)!}{n!(n+2)!}\cdot\frac{\pi}{2^n}$$

4. Sea $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$, si $x>0$. ¿Para qué valores de x: $\ln x \le F(x)$? Pruebe que:

$$\int_1^x \frac{e^t}{t+a}\,dt = e^{-a}[F(x+a)-F(1+a)]$$

3.4. CLASE 9: Aplicación al cálculo de áreas en coordenadas cartesianas

3.4.1. Areas entre curvas

Sea f una función no negativa y acotada definida en el intervalo $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$. Queremos definir el área de regiones del tipo:

$$\mathscr{R}=\{(x,y):x\in[a,b],y\in[0,f(x)]\}$$

Si U y V son regiones, las condiciones básicas que debería cumplir nuestra definición son:

i. $U\subseteq V \quad\Rightarrow\quad$ área$(U)\leq$ área(V)

ii. Si área$(U\cap V)=0$ entonces área$(U\cup V)=$ área$(U)+$ área(V)

iii. Si R es un rectángulo de lados a y b entonces área$(R)=ab$

Si designamos el área de $\mathscr{R}$ por $A_a^b(f)$ entonces las propiedades anteriores se traducen como.

1. Si $\forall x\in[a,b]:\quad 0\leq f(x)\leq g(x)$ entonces $A_a^b(f)\leq A_a^b(g)$
2. $\forall c\in[a,b]$ se cumple $A_a^b(f)=A_a^c(g)+A_c^b(g)$
3. $A_a^b(c)=c(b-a)$

Probaremos que si f es una función Riemann integrable, entonces la única definición posible de área de la región $\mathscr{R}$ es la integral de Riemann. En efecto, sea $\mathscr{P}=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ es una partición de $[a,b]$ entonces por la propiedad 2 se cumple

$$A_a^b(f)=\sum_{i=1}^{n}A_{x_{i-1}}^{x_i}(f)$$

Pero, usando las notaciones usuales

$$m_i\Delta x_i\leq A_{x_{i-1}}^{x_i}(f)\leq M_i\Delta x_i$$

se sigue que

$$s(f,\mathscr{P})\leq A_a^b(f)\leq S(f,\mathscr{P})$$

Como la partición es arbitraria obtenemos

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\leq A_a^b(f)\leq\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

De esta forma, si la función es Riemann integrable entonces $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, de donde la única definición posible de área que cumple con las propiedades básicas consideradas es

$$A_a^b(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

OBSERVACIÓN: El área encerrada por dos funciones arbitrarias $y = f(x)$, $y = g(x)$ entre las rectas $x = a$ y $x = b$ está dada por

$$A = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx$$

3.4.2. Ejercicios

1. Hallar el área de la región encerrada por las curvas $y = 10x - x^2$ y $y = 3x - 8$.

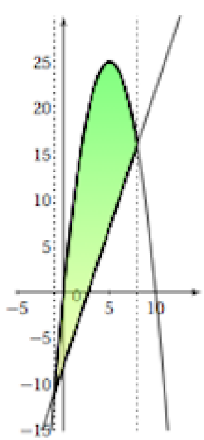


Figura 1

Solución: Graficamos ambas funciones. Buscamos los puntos de intersección de ambas gráficas, es decir, resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} y &= 10x - x^2 \\ y &= 3x - 8 \end{aligned}$$

de donde $3x - 8 = 10x - x^2$ ecuación que tiene por solución $x = 8$, $x = -1$.
Notamos que en $[-1, 8]$ la gráfica de la parábola *pasa por arriba* de la recta.

Así, podemos calcular el área:

$$\int_{-1}^{8} \left| \left(10x - x^2\right) - (3x - 8) \right| dx = \int_{-1}^{8} \left(10x - x^2 - (3x - 8)\right) dx = \frac{243}{2}$$

2. Encontrar el área encerrada por las curvas $y^2 = x$ y $y = 3x - 10$.

Solución: Buscamos las intersecciones de las curvas, es decir, resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} y^2 &= x \\ y &= 3x - 10 \end{aligned}$$

Despejamos x en la segunda ecuación y reemplazamos en la primera, de donde

$$y^2 = \frac{y+10}{3}$$

que tiene soluciones $y = 2, y = -\frac{5}{3}$, valores que corresponden a $x = 4$ y $x = \frac{25}{9}$ respectivamente. Los gráfico de estas curvas corresponden a una parábola y una recta pero la parábola tiene directriz perpendicular al eje X, es más conveniente mirar el problema como si el eje Y fuera el eje X; queda

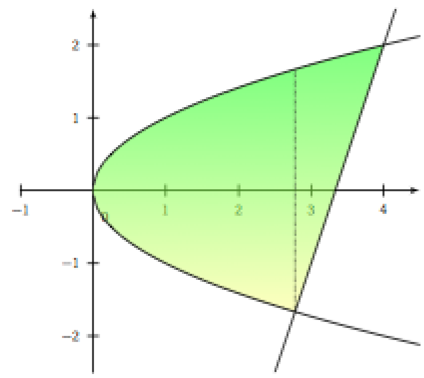


Figura 2

$$A = \int_{-5/3}^{2} \left| y^2 - \left(\frac{y+10}{3}\right) \right| dy = \int_{-5/3}^{2} \left(\left(\frac{y+10}{3}\right) - y^2 \right) dy = \frac{1331}{162}$$

3. Hallar el área A encerrada por las curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ entre las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

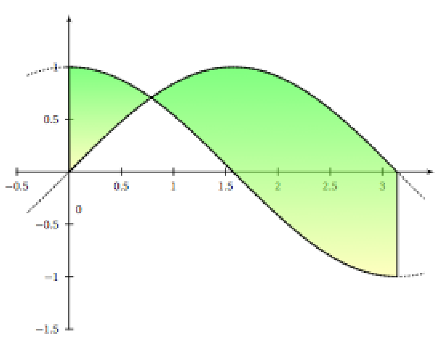


Figura 3

Solución: Buscamos las intersecciones de las curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ en el intervalo $[0, \pi]$, es decir, debemos buscar las soluciones de $\operatorname{sen} x = \cos x$ en el intervalo. Así, $x = \pi/4$. En $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$: $\cos x \geq \operatorname{sen} x$ y en $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ se cumple: $\operatorname{sen} x \geq \cos x$. Así:

$$\int_0^{\pi} |\operatorname{sen} x - \cos x| \, dx = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x) \, dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\operatorname{sen} x - \cos x) \, dx = \left(\sqrt{2} - 1\right) + \left(\sqrt{2} + 1\right) = 2\sqrt{2}$$

4. Hallar el área encerrada entre las curvas $8y = x^3$ y $8y = 2x^3 + x^2 - 2x$

Solución: Buscamos los puntos de intersección de las curvas, es decir, resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} 8y &= x^3 \\ 8y &= 2x^3 + x^2 - 2x \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} 2x^3 + x^2 - 2x = x^3 \quad &\Leftrightarrow \quad x^3 + x^2 - 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x(x-1)(x+2) = 0 \end{aligned}$$

Se sigue que las curvas se intersectan en $x = 0$, $x = 1$ y $x = -2$. Además de forma analítica, podemos determinar cuál de las curvas se encuentra arriba y en qué intervalo.

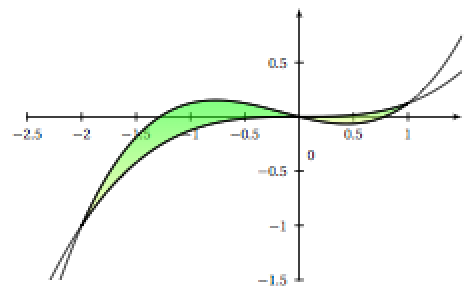


Figura 4

En efecto:

$$2x^3 + x^2 - 2x \geq x^3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x(x-1)(x+2) \geq 0$$

Luego, utilizando la tabla

			-2			0			1		
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x(x-1)(x+2)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$

obtenemos que en el intervalo $[-2, 1]$ se cumple

$$\frac{(2x^3 + x^2 - 2x)}{8} \geq \frac{x^3}{8}$$

si y solo si $x \in [-2, 0]$. Así

$$\int_{-2}^{1} \left| \frac{(2x^3 + x^2 - 2x)}{8} - \frac{x^3}{8} \right| dx = \int_{-2}^{0} \left(\frac{(2x^3 + x^2 - 2x)}{8} - \frac{x^3}{8} \right) dx + \int_{0}^{1} \left(\frac{x^3}{8} - \frac{(2x^3 + x^2 - 2x)}{8} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{5}{96} = \frac{37}{96}$$

5. Hallar el área encerrada por las curvas

$$\begin{aligned} xy &= 9 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y} &= 4 \end{aligned}$$

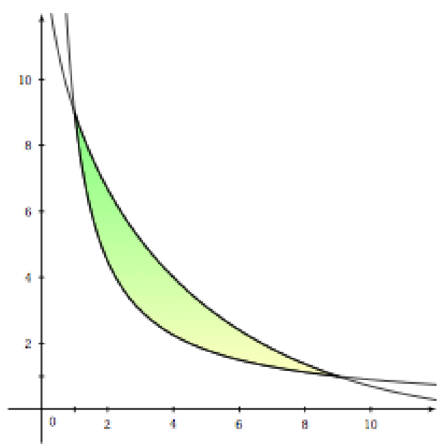


Figura 5

Solución: Como consideramos la curva $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$, estamos suponiendo $x \geq 0$, $y \geq 0$. De la curva $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$ obtenemos

$$y = \left(4-\sqrt{x}\right)^2$$

Busquemos los puntos de intersección de las curvas:

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad x+y+2\sqrt{xy}=16$$

Como $xy = 9$ reemplazamos:

$$x+y+6=16 \qquad \text{de donde} \qquad x+y=10$$

Luego, tenemos el sistema

$$\begin{aligned} xy &= 9 \\ x+y &= 10 \end{aligned}$$

Multiplicando la segunda por x se sigue: $x^2+xy=10x$.

Reemplazando $xy=9$ tenemos

$$x^2-10x+9=0 \qquad \Longrightarrow \qquad x=1 \quad \vee \quad x=9$$

Luego, los puntos de intersección son $(1,9)$ y $(9,1)$. Se sigue que el área es

$$\int_1^9 \left(\left(4-\sqrt{x}\right)^2 - \frac{9}{x}\right) dx = \frac{88}{3} - 18\ln 3$$

6. Encontrar el área encerrada por la curva cerrada $y^2 = x^2 - x^4$.

Solución: En este caso, la dificultad radica en determinar la gráfica de esta curva.

Note que $y^2 \geq 0$, entonces $x^2 - x^4 \geq 0 \iff x^2\left(1-x^2\right) \geq 0$. Luego, $x \in [-1,1]$. De la ecuación

$$y^2 = x^2 - x^4$$

obtenemos las funciones

$$y = \pm\sqrt{x^2 - x^4} = \pm|x|\sqrt{1-x^2}$$

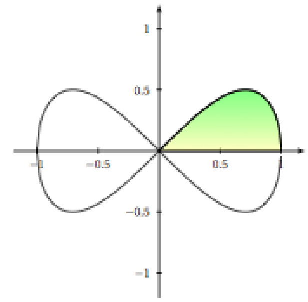
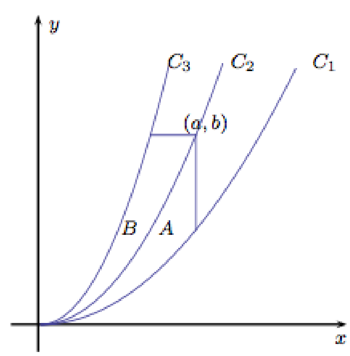


Figura 6

Se sigue que el área está dada por

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\left(|x|\sqrt{1-x^2} - \left(-|x|\sqrt{1-x^2}\right)\right)dx \\
= \;& 2\int_{-1}^{1}|x|\sqrt{1-x^2}\,dx \\
= \;& 4\int_{0}^{1}x\sqrt{1-x^2} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

7. C_1, C_2 y C_3 son las gráficas de las parábolas $y = x^2,\ x > 0$; $\;y = 2x^2,\ x > 0\;$ e $\;y = mx^2,\ x > 0$ respectivamente. Cada punto (a,b) de C_2 se une a un punto de C_1 mediante un segmento vertical y a un punto de C_3 mediante un segmento horizontal. Así, se originan las regiones A y B que se muestran en la figura.



a) Encuentre el área de la región A.

b) Encuentre el área de la región B.

c) Determine para qué valor del parámetro m las regiones A y B tienen igual área.

Solución:

a) La región A está limitada por la gráfica de las parábolas $y = 2x^2,\ y = x^2$ y la recta vertical $x = a$. Luego, el área de la región A está dada por:

$$\text{Área}(A) = \int_0^a (2x^2 - x^2)dx = \int_0^a x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{a^3}{3}$$

b) Como el punto (a, b) pertenece a la parábola $y = x^2$: $\quad b = 2a^2$.

La recta $y = b = 2a^2$ intersecta a la gráfica de $y = mx^2$ en el punto $\left(a\sqrt{\dfrac{2}{m}},\, 2a^2\right)$. La región B se puede descomponer como la unión de las regiones

$$B_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \le x \le a\sqrt{\frac{2}{m}}, \quad 2x^2 \le y \le mx^2\right\}$$

$$B_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a\sqrt{\frac{2}{m}} \le x \le a\,, \quad 2x^2 \le y \le 2a^2\right\}$$

Entonces:

$$\text{Área}(B) = \text{Área}(B_1) + \text{Área}(B_2)$$

$$\text{Área}(B_1) = \int_0^{a\sqrt{\frac{2}{m}}} (mx^2 - 2x^2)\,dx = (m-2)\int_0^{a\sqrt{\frac{2}{m}}} x^2 dx = (m-2)\frac{x^3}{3}\Big|_0^{a\sqrt{\frac{2}{m}}} = \frac{m-2}{3}\left(a\sqrt{\frac{2}{m}}\right)^3$$

$$\text{Área}(B_2) = \int_{a\sqrt{\frac{2}{m}}}^a (2a^2 - 2x^2)dx = 2\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{a\sqrt{\frac{2}{m}}}^a = \frac{2}{3}a^3\left(2\sqrt{2}\left(\frac{1}{m}\right)^{3/2} - 3\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{m}} + 2\right)$$

Luego:

$$\text{Área}(B) = \frac{m-2}{3}\left(a\sqrt{\frac{2}{m}}\right)^3 + \frac{2}{3}a^3\left(2\sqrt{2}\left(\frac{1}{m}\right)^{3/2} - 3\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{m}} + 2\right) = \frac{4a^3}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}\,a^3\sqrt{\frac{1}{m}}$$

Otro método:

$$\text{Área}(B) = \int_0^{2a^2}\left(\sqrt{\frac{y}{2}} - \sqrt{\frac{y}{m}}\right)dy = \frac{4a^3}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}\,a^3\sqrt{\frac{1}{m}}$$

c) $\text{Área}(A) = \text{Área}(B) \quad \iff \quad \dfrac{4a^3}{3} - \dfrac{4}{3}\sqrt{2}\,a^3\sqrt{\dfrac{1}{m}} = \dfrac{a^3}{3} \quad \iff \quad m = \dfrac{32}{9}$

EJERCICIOS:

1. Encuentre el área de la región acotada por las parábolas $y = x^2 - 6x + 10$ e $y = 6x - x^2$.

2. Encuentre el área de la región acotada por la parábola $y = x^2 - 4x + 5$, el eje x y las rectas $x = 3$ y $x = 5$.

3. La hipérbola $x^2 - y^2 = 8$ divide en tres regiones a la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$. Hallar el área de cada una de las regiones.

4. Encuentre el área de la región acotada por $y = x^3 - x$ e $y = x^4 - 1$.

5. Calcular el área encerrada por las curvas dadas por

$$y = x^4 + x^3 + 16x - 4 \qquad \text{e} \qquad y = x^4 + 6x^2 + 8x - 4$$

3.5. Ejercicios de Controles y Certámenes

1. Calcule $F'(0)$, si

$$F(x) = \int_{x^2}^{x^3} e^{\cos t}\, dt$$

2. Use la sustitución $u = x^{-1/2}$ para calcular

$$\int_1^3 \frac{\cos(x^{-1/2})}{x^2}\, dx$$

3. Use integración por partes para calcular

$$\int_{1/2}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^{-3} \operatorname{arc\,sen} x\, dx$$

4. Compruebe que

$$\ln\left[\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{1/n}\right] = \frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right) + \left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + \left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$$

Use lo anterior y sumas de Riemann para calcular

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left[\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{1/n}\right]$$

5. Considere $\displaystyle\int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$

   a) Integrando por partes, pruebe que $I_n = \dfrac{2n}{2n+3} I_{n-1}$

   b) Calcule I_0

   c) Calcule I_4

6. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$. Determine $g'(x)$ si

$$g(x) = \arctan(2x) + \int_0^{x^3} (t+x) f(t)\, dt$$

7. a) Sea $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $F(x) = \displaystyle\int_{-6}^{\cos x} \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2+1}}$. Determine $F'(\pi/2)$.

   b) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x - \arctan x}{1-\cos x}$.

8. Sean $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y

$$F(x) = x^2 \int_0^{\operatorname{sen} x} f(t) dt\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

   Pruebe que $\quad f(0) = -\dfrac{F'(\pi)}{\pi^2}$.

9. Calcular el área limitada por la gráfica de las ecuaciones $\quad x = 1 - y^4, \quad x = y(1-y^2)$.

10. Calcule la integral definida $\displaystyle\int_0^{e-1} \frac{\ln(x+1)^2}{(x+1)\sqrt{4-\ln^2(x+1)}} dx.$

Capítulo 4

Funciones Trascendentes

4.1. CLASE 10: Funciones logaritmo y exponencial

El principal objetivo de esta clase es definir las funciones logarítmicas y exponenciales que fueron presentadas en mat021 de manera más bien intuitiva. En este curso, las podemos definir formalmente, mediante integrales.

4.1.1. Función Logarítmica

DEFINICIÓN 4.1.1 La función $f(t)=\dfrac{1}{t}$, con $t>0$ es continua, por lo tanto para cualquier x positivo existe el número:

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

Se llama *función logarítmica* (natural) a la función $\ln :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, definida por

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

EJEMPLOS:

1. Demuestre que para $x>-1$ y $x\neq 0$ se cumple:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(x+1) < x$$

Solución: Recordemos que, si m y M son los valores mínimo y máximo de f en el intervalo $[a,b]$:

$$m(b-a) < \int_a^b f(t)dt < M(b-a)$$

Si $f(t)=\dfrac{1}{t}$, $a=1$ y $b=1+x$:

$$\frac{1}{1+x}\cdot x < \int_1^{1+x} \frac{1}{t}dt < 1\cdot x$$

$$\frac{x}{1+x} < \ln(x+1) < x$$

TEOREMA 4.1.1 Si $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $r \in \mathbb{R}$ entonces

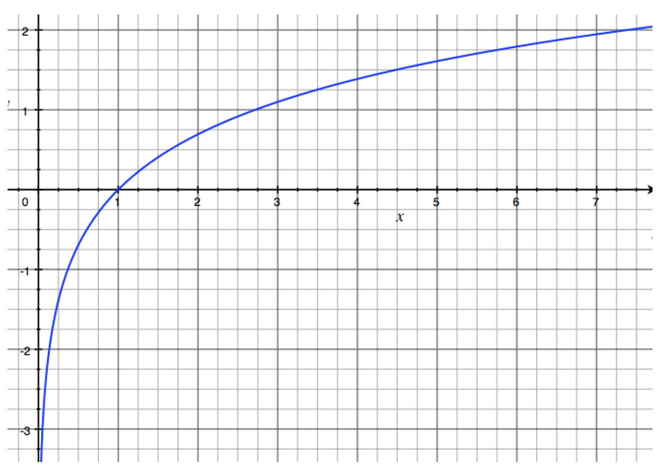
1. $\ln(1) = 0$
2. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
3. $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$
4. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
5. $\ln(a^r) = r\ln(a)$

La función $f(x) = \ln(x)$ es continua en todo su dominio $(\mathbb{R}^+)$, y además:

- Si $x > 1$, entonces $\ln(x) > 0$.
- Si $0 < x < 1$, entonces $\ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt < 0$
- Si $x = 1$, entonces $\ln(1) = \displaystyle\int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0$, luego $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Notemos también que $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ de donde obtenemos que es estrictamente creciente. Es cóncava, ya que $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$, y cumple $\ln(x) \to +\infty$ para $x \to +\infty$ y $\ln(x) \to -\infty$ para $x \to 0^+$.

Con la información obtenida la gráfica de $y = \ln x$ es:



EJERCICIOS:

1. Calcule $\displaystyle\int_{1/e}^{e} f'(x)\ln x\,dx$ sabiendo que $\displaystyle\int_{1}^{e^2} (\ln t - 1) f'(t)\,dt = 1.$

2. Sabiendo que ambas integrales existen, compruebe que
$$\int_{\pi/2}^{0} \ln(\sec x)\,dx = \int_{0}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

3. Calcular $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \cos x\,\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\,dx.$

4.1.2. La Función Exponencial

DEFINICIÓN 4.1.2 Se llama *función exponencial* a la función $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $exp(x) = \ln^{-1}(x)$. Es decir, $y = exp(x) \iff x = \ln(y)$.

Entonces:
$$\begin{aligned} exp(\ln(x)) &= x \quad \text{si } x > 0 \\ \ln(exp(x)) &= x \quad \text{si } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

En particular, se tiene que:
$$exp(\ln(1)) = 1 \iff exp(0) = 1$$
$$exp(\ln(e)) = e \iff exp(1) = e$$

TEOREMA 4.1.2 Si $exp(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, entonces:

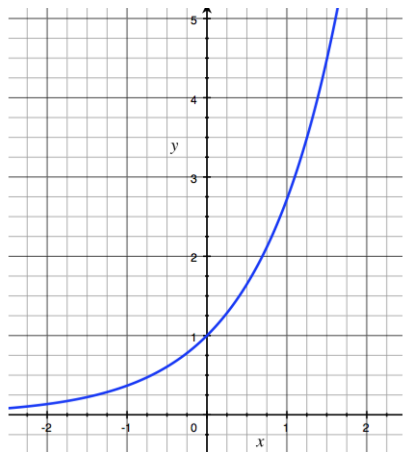
1. exp es continua y creciente en $\mathbb{R}$.
2. $exp(0) = 1$
3. $exp(x+y) = exp(x)exp(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$
4. $exp(x-y) = \dfrac{exp(x)}{exp(y)}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
5. $exp(rx) = (exp(x))^r, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{R}$
6. $\forall x \in \mathbb{R} : exp(x) = e^x$
7. Es derivable y $\dfrac{d(exp(x))}{dx} = \dfrac{d(e^x)}{dx} = e^x$

8. Es convexa.

9. $exp(x) \to +\infty$ para $x \to +\infty$

10. $exp(x) \to 0^+$ para $x \to -\infty$

Con la información obtenida, la gráfica de $y = exp(x)$ es:



DEFINICIÓN 4.1.3 Sea $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Definimos a^x por:

$$a^x = exp(x\ln(a)) = e^{x\ln(a))}$$

TEOREMA 4.1.3 Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $a^x > 0$ y continua, $\forall x \in \mathbb{R}$

2. $a^0 = 1$

3. $\dfrac{d(a^x)}{dx} = a^x \ln(a)$

4. a^x es creciente si $a > 1$, decreciente si $a < 1$, igual a 1 si $a = 1$

EJEMPLOS: Encuentre la antiderivada de $\quad I = \displaystyle\int \frac{dx}{2\operatorname{sen} x - \cos x - 2}$.

Sol.: Haciendo $t = \tan(\frac{x}{2})$, se tiene que:

$$I = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} - 2} = -2\int \frac{dt}{t^2 - 4t + 3} = -2\frac{dt}{(t-2)^2 - 1}.$$

Calcularemos esta primitiva de dos maneras diferentes:

Método 1: Sust. trigonométrica Haciendo el cambio de variable $t-2=\sec z$, se tiene:

$$I = \int \frac{\sec z\ \tan z\ dz}{\tan^2 z} = -2\int \operatorname{cosec}(z)\,dz = 2\ln\left|\operatorname{cosec} z + \operatorname{cotg} z\right| + C$$

Además:

$$\sec z = t-2 \quad \Rightarrow \quad \cos z = \frac{1}{t-2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} z = \sqrt{1-\frac{1}{(t-2)^2}} = \frac{\sqrt{t^2-4t+3}}{t-2}$$

Por lo tanto:

$$I = 2\left|\frac{t-1}{\sqrt{t^2-4t+3}}\right| + C = 2\ln\left|\frac{\tan(\frac{x}{2})-1}{\sqrt{\tan^2(\frac{x}{2})-4\tan(\frac{x}{2})+3}}\right| + C.$$

Método 2: Fracciones Parciales $(t-2)^2-1=((t-2)-1)\,((t-2)+1)=(t-3)(t-1)$, de donde

$$\frac{1}{(t-3)(t-1)} = \frac{A}{(t-3)} + \frac{B}{(t-1)} \qquad \Longrightarrow \qquad A=\frac{1}{2}, \quad B=-\frac{1}{2}$$

Por lo tanto,

$$I=-2\cdot\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t-1}\right)dt = -\ln|t-3| + \ln|t-1| + C = \ln\left|\frac{t-1}{t-3}\right| + C$$

$$\therefore \qquad I = \ln\left|\frac{\tan(\frac{x}{2})-1}{\tan(\frac{x}{2})-3}\right| + C$$

Ambas primitivas *aparentan* ser diferentes. Veamos que, en realidad

$$\ln\left|\frac{\tan(\frac{x}{2})-1}{\tan(\frac{x}{2})-3}\right| - 2\ln\left|\frac{\tan(\frac{x}{2})-1}{\sqrt{\tan^2(\frac{x}{2})-4\tan(\frac{x}{2})+3}}\right| = 0$$

en donde está definida.

La expresión de la izquierda es igual a:

$$\ln\left|\frac{\tan(\frac{x}{2})-1}{\tan(\frac{x}{2})-3}\cdot\frac{\tan^2(\frac{x}{2})-4\tan(\frac{x}{2})+3}{(\tan(\frac{x}{2})-1)^2}\right| = \ln\left|\frac{\tan(\frac{x}{2})-1}{\tan(\frac{x}{2})-3}\cdot\frac{(\tan(\frac{x}{2})-1)(\tan(\frac{x}{2})-3)}{(\tan(\frac{x}{2})-1)^2}\right| = \ln 1 = 0$$

Por lo tanto, hemos verificado que ambas primitivas difieren en *una constante*.

Ejercicios Propuestos

1. Muestre que $y = \exp(x)$ es la única función derivable que cumple $y'(x) = y(x)$ con $y(0) = 1$.

2. Calcular para $a > 1$
$$\int_1^a \ln x \, dx + \int_0^{\ln a} e^y \, dy$$
y dar una interpretación geométrica de esta cantidad.

3. Muestre que si $0 < a < b$ entonces
$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}$$

4. Muestre que la función
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$
es $C^\infty(\mathbb{R})$.

4.2. CLASE 11: Funciones Hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas están definidas como combinaciones de las funciones exponenciales e^x y e^{-x}. Estas funciones simplifican muchas expresiones matemáticas que aparecen en las aplicaciones, por ejemplo, en la tensión en un cable suspendido de sus extremos, movimiento de ondas en sólidos elásticos, etc. Daremos una breve introducción a las funciones hiperbólicas, sus gráficos, sus derivadas y antiderivadas.

DEFINICIÓN 4.2.1 Definimos las funciones **seno hiperbólico** y **coseno hiperbólico** como las funciones $\sinh, \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{y} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Usemos las técnicas aprendidas en MAT021 para graficar estas funciones hiperbólicas:

- Notamos que: $\dfrac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Luego, $\sinh x$ es creciente.
- Además: $\dfrac{d^2}{dx^2}(\sinh x) = \sinh x$ y note que

$$\begin{aligned} e^x - e^{-x} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad e^x \geq e^{-x} \\ &\Leftrightarrow \quad x \geq -x \\ &\Leftrightarrow \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

  Luego, la función es convexa para $x \geq 0$ y cóncava para $x < 0$.

- También podemos calcular

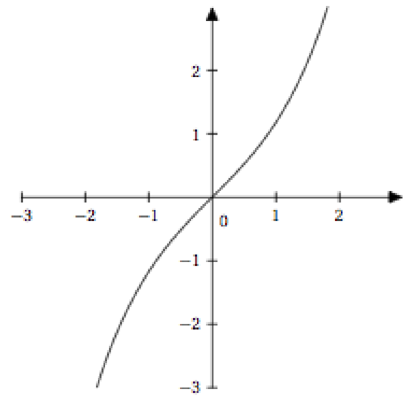
$$\lim_{x \to +\infty} \sinh x = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = +\infty$$

  y

$$\lim_{x \to -\infty} \sinh x = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = -\infty$$

- No hay asíntotas para este gráfico.

Así, obtenemos la siguiente gráfica para $y = \sinh(x)$:

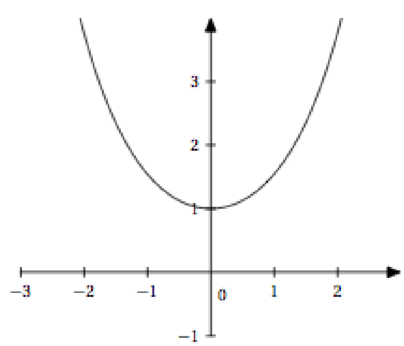


$f(x) = \sinh(x)$

Análogamente, podemos graficar $y = \cosh(x)$:

- Notamos que: $\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x \begin{cases} > 0 & \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ < 0 & \forall x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$. Luego, $\cosh x$ es creciente para $x > 0$ y decreciente para $x < 0$.
- Además: $\dfrac{d^2}{dx^2}(\cosh x) = \cosh x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Luego, la función es convexa en todo $\mathbb{R}$.
- También: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \cosh x = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = +\infty$
- No hay asíntotas para este gráfico.

Así, la gráfica de $y = \cosh x$ es:



$f(x) = \cosh(x)$

TEOREMA 4.2.1 $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$

Dem.:

$$\cosh^2(x)-\sinh^2(x) = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4} - \frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4} = 1$$

OBSERVACIÓN:

1. Las funciones seno y coseno hiperbólico corresponden a las partes impar y par, respectivamente, de la función exponencial. En efecto:

   $$\sinh(x)+\cosh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} + \frac{e^x+e^{-x}}{2} = e^x$$

   Además: $\sinh(-x) = -\sinh(x) \quad \wedge \quad \cosh(-x) = \cosh(x)$, lo que prueba que sinh es impar y cosh es par. Estas propiedades son evidentes de las respectivas gráficas.

2. Recordemos que la relación entre las funciones trigonométricas sen y cos es

   $$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

   lo que, geométricamente muestra que $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ pertenece a la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=1, \quad \forall t \in \mathbb{R}$. El teorema anterior muestra que $(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ pertenece a la hipérbola de ecuación $x^2-y^2=1, \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Por este motivo, se llama a veces *funciones circulares* a las funciones sen y cos, y las funciones senh y cosh se llaman *funciones hiperbólicas*.

   Más precisamente, como $\cosh u > 0 \quad \forall u > 0$ notamos que:

   $$\begin{array}{|rcl|} x & = & \cosh u \\ y & = & \operatorname{senh} u \\ \hline \end{array}$$ son las ecuaciones *paramétricas* de la *rama derecha* de la hipérbola $x^2-y^2=1$.

La analogía existente entre ambos tipos de funciones permite definir las próximas funciones hiperbólicas.

DEFINICIÓN 4.2.2 Definimos las funciones

- **Tangente Hiperbólica** como la función $\tanh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

  $$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

- **Cotangente Hiperbólica** como la función $\coth : \mathbb{R}-\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

  $$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

- **Secante Hiperbólica** como la función $\operatorname{sech} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

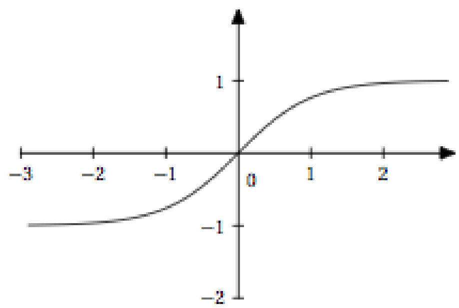
  $$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x+e^{-x}}$$

- **Cosecante Hiperbólica** como la función $\operatorname{cosech} : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\operatorname{cosech}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

EJERCICIOS:

Dejamos como ejercicio hacer las gráficas de estas funciones. Mostramos a continuación solo la de $y = \tanh x$, para que verifique sus cálculos.



$f(x) = \tanh(x)$

PROPOSICIÓN 4.2.1 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se tiene:

1. $1 - \tanh^2(x) = \operatorname{sech}^2(x)$ y $1 - \coth^2 x = -\operatorname{cosech}^2 x$

2. $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$.

3. $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$.

4. $\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$

5. $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

4.2.1. Derivadas e integrales

Las seis funciones hiperbólicas, son combinaciones racionales de las funciones diferenciables e^x y e^{-x}, por lo que son derivables (e integrables) en todo punto *donde ellas estén definidas*.

Derivadas	Integrales
$\dfrac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$	$\displaystyle\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$
$\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$	$\displaystyle\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$
$\dfrac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$	$\displaystyle\int \operatorname{sech}^2 x\,dx = \tanh x + C$
$\dfrac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{cosech}^2 x$	$\displaystyle\int \operatorname{cosech}^2 x\,dx = -\coth x + C$
$\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$	$\displaystyle\int \operatorname{sech} x \tanh x\,dx = -\operatorname{sech} x + C$
$\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cosech} x) = -\operatorname{cosech} x \coth x$	$\displaystyle\int \operatorname{cosech} x \coth x\,dx = -\operatorname{cosech} x + C$

EJEMPLOS:

1. Calcular las siguientes derivadas e integrales:

   a) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{senh}(x^3)\,dx = \frac{1}{3}\cosh x^3 + C$

   b) $\displaystyle\frac{d}{dt}\left(\tanh\left(\sqrt{1+t^2}\right)\right) = \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{1+t^2}\right)\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

   c) $\displaystyle\int \coth(5x)\,dx = \int \frac{\cosh 5x}{\sinh 5x}dx = \frac{1}{5}\ln|\sinh 5x| + C$

   d) $\displaystyle\int_0^1 \sinh^2 x\,dx = \int_0^1 \left(\frac{\cosh 2x - 1}{2}\right)dx = \frac{\sinh 2}{4} - \frac{1}{2}$

   e) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^x \sinh x\,dx = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$

   f) $\displaystyle\frac{d}{dx}\operatorname{senh}(\ln\sqrt{x^2+1}) = \cosh(\ln\sqrt{x^2+1})\,\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

2. Calcular, si existe, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{senh} x}{(1-\cosh x)^2}$.

Notamos que este límite es de la forma $\frac{0}{0}$, por lo que aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{senh}x}{(1-\cosh x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cosh x}{2(1-\cosh x)(-\operatorname{senh}x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{senh}x} \xrightarrow[x\to 0]{} \infty. \qquad \text{Luego, no existe.}$$

3. Calcular $\displaystyle\int \overset{2}{\operatorname{sech}}\, x\, dx$.

$$\int (\operatorname{sech})^4(x)\,dx = \int (\operatorname{sech})^2(x)\,(1-\tanh^2 x)\,dx = \int (\operatorname{sech})^2(x)\,dx - \int \tanh^2 x(\operatorname{sech})^2(x)\,dx$$

$$= \tanh x - \frac{1}{3}\tanh^3 x + C.$$

4. Calcular $\displaystyle\int \operatorname{cosech} x\, dx$.

$$\int \operatorname{cosech} x\,dx = \int \operatorname{cosech} x\,\frac{\operatorname{cosech} x+\coth x}{\operatorname{cosech} x+\coth x}dx = -\ln|\operatorname{cosech} x+\coth x|+C =$$

$$= -\ln\left|\frac{1+\cosh x}{\operatorname{senh} x}\right|+C = -\ln\left|\frac{1+\cosh x}{\pm\sqrt{\cosh^2-1}}\right| * C = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cosh x+1}{\cosh x-1}\right|+C$$

4.2.2. Funciones Hiperbólicas Inversas

Las funciones hiperbólicas inversas son muy útiles en el cálculo de primitivas.

Recordemos que $f(x)=\sinh x$ es inyectiva (pues es estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$) y es sobreyectiva (es continua con $\lim\limits_{x\to-\infty}\sinh x=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\sinh x=+\infty$). Luego, es invertible y, por el teorema de la función inversa, esta función inversa es derivable. Debe tenerse presente, sin embargo, que no todas las funciones hiperbólicas son biyectivas, por lo que, para poder determinar la inversa, en algunos casos deberemos restringir el dominio y codominio.

TEOREMA 4.2.2 Las inversas de las funciones hiperbólicas están dadas por:

- $\operatorname{arcsenh}(x)=\sinh^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), \quad \forall x\in\mathbb{R}$
- $\operatorname{arccosh}(x)=\cosh^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), \quad x\geq 1$
- $\operatorname{arctanh}(x)=\tanh^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right), \quad |x|<1$
- $\operatorname{arccoth}(x)=\coth^{-1}(x)=\tanh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), \quad |x|>1$
- $\operatorname{arcsech}(x)=\operatorname{sech}^{-1}(x)=\cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right), \quad 0<x\leq 1$

- $\text{arccosech}(x) = \text{cosech}^{-1}(x) = \sinh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0$

Dem.: Demostraremos solo tres casos, dejando los demás como ejercicio.

- $\sinh^{-1} x = y \quad \iff \quad x = \text{senh}\, y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \iff \quad 2x = e^y - e^{-y}.$ Luego:

  $e^y - 2x - e^{-y} = 0.$ Multiplicando esta ecuación por e^y obtenemos la ecuación cuadrática:

  $$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0 \quad \iff \quad e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

  Como $e^y > 0$, necesariamente $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$, de donde $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

- La función $\cosh : \mathbb{R} \longrightarrow [1, \infty[$ es epiyectiva pero no inyectiva. Restringimos el dominio a $\mathbb{R}_0^+$, y la nueva función es biyectiva.

  Luego, existe $\cosh^{-1} : [1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}_0^+$. Como antes, $\cosh^{-1} x = y \iff x = \text{senh}\, y$

  $x = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$. Entonces:

  $e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$ de donde $e^y = x \pm \sqrt{x^2-1}$.

  Como $y \geq 0$, se tiene que $e^y \geq 1$ de donde $e^y = x + \sqrt{x^2-1}$. $\therefore \quad y = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

  Por lo tanto, $\cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad x \geq 1.$

- Análogamente, $\tanh^{-1} x = y \quad \iff \quad x = \tanh y, \quad |x| < 1.$ Luego:

  $$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \quad \Rightarrow \quad xe^{2y} + x = e^{2y} - 1 \quad \Rightarrow \quad e^{2y}(x-1) = -1-x$$

  $$\therefore \quad e^{2y} = \frac{x+1}{1-x} \quad \Rightarrow \quad e^y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \qquad |x| < 1$$

EJERCICIOS: Calcular $\text{arctanh}\left(\frac{1}{2}\right)$

4.2.3. Derivadas de las Funciones Hiperbólicas Inversas

Función	**Derivada**
$\operatorname{arcsenh}(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{arccosh}(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$
$\operatorname{arctanh}(x)$	$\dfrac{1}{1-x^2}, \quad \lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{arccoth}(x)$	$\dfrac{1}{1-x^2}, \quad \lvert x\rvert > 1$
$\operatorname{arcsech}(x)$	$\dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < 1$
$\operatorname{arccosech}(x)$	$\dfrac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{1+x^2}}, \quad x \neq 0$

Dem.: Haremos solo una demostración, las demás quedan de ejercicio. Veamos que

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$$

En efecto: aplicamos el teorema de la función inversa a $f(x) = \cosh x$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left(f^{-1}\right)'(x) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{\sinh\left(\cosh^{-1} x\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2\left(\cosh^{-1} x\right) - 1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}$$

puesto que $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ de donde $\sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1}$.

Otra demostración:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccosh}(x) = \frac{d}{dx}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

TEOREMA 4.2.3 En relación a las funciones hiperbólicas inversas tenemos:

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \operatorname{arcsenh}\left(\frac{x}{a}\right)+C, \quad a>0$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \operatorname{arccosh}\left(\frac{x}{a}\right)+C, \quad x>a>0$
- $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\operatorname{arctanh}\left(\frac{x}{a}\right)+C & \text{si } x^2<a^2 \\ \dfrac{1}{a}\operatorname{arccoth}\left(\frac{x}{a}\right)+C & \text{si } x^2>a^2 \end{cases}$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\frac{1}{a}\operatorname{arcsech}\left(\frac{x}{a}\right)+C, \quad 0<x<a$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}dx = -\frac{1}{a}\operatorname{arccosech}\left(\frac{x}{a}\right)+C, \quad x\neq 0 \text{ y } a>0$

EJEMPLOS:

1. Mostrar que en $x=0$ se alcanza un mínimo para la función $f(x)=x\operatorname{arctanh}(x)$.

   Solución: Buscamos los puntos críticos:

   $$f'(x) = \operatorname{arctanh}(x)+\frac{x}{1-x^2} = 0$$

2. Calcular $\operatorname{arctanh}\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

   Solución:

3. Calcular la integral

   $$\int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt{3+4x^2}}$$

   Solución: Hacemos $u=2x$ entonces $du=2dx$ y

   $$\int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt{3+4x^2}} = \int_0^2 \frac{du}{\sqrt{3+u^2}} = \int_0^2 \frac{du}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+u^2}} = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

EJERCICIOS: Calcule

1. $\displaystyle\int_0^1 \sinh(\operatorname{arc\,sen} x)\, dx.$
2. $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{senh} x}{1+\cosh x}\, dx.$
3. $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\operatorname{senh}^{-1}(\tan x)\right).$
4. $\displaystyle\int \coth(x)\ln(\sinh(x))\, dx.$
5. $\displaystyle\int \tanh^2(x)\, dx.$
6. $\displaystyle\int \sinh^4(x)\, dx.$
7. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+\cosh(x)}\, dx.$

4.3. Ejercicios de Controles y Certámenes

1. Sea $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable que satisface para todo $x \in \mathbb{R}$ la relación

$$\varphi(x) + \int_0^x \cosh(t)\varphi'(t)dt = \cosh(x)$$

   a) Determine $\varphi'(x)$ usando el teorema fundamental.

   b) Determinar explícitamente la función $\varphi(x)$ y calcule también el valor de la constante de integración.

2.

3.

Capítulo 5

Integrales Impropias

5.1. CLASE 12: Integrales Impropias

En la definición de la integral definida $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ se exigió que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fuese acotada. Por otra parte, el teorema fundamental del cálculo requiere que f sea continua en $[a,b]$. Estudiaremos ahora aquellas integrales en donde la integración se realiza sobre un intervalo **no** acotado o bien la función tiene una o varias discontinuidades de tipo infinito (es decir, no de tipo salto) en el intervalo de integración. Tales integrales se llaman **integrales impropias**.

Para estudiar las integrales impropias, consideramos 2 grandes casos:

- **Tipo I** : el intervalo es no acotado, o equivalentemente, uno de los límites de integración, a o b, es *infinito*. Es decir, son de la forma

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \qquad \text{con } f \text{ integrable en} \quad a\leq x<\infty$$

o

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \qquad \text{con } f \text{ integrable en} \quad -\infty<x\leq b$$

- **Tipo II** : el integrando es no acotado, es decir, $f(x)$ tiende a infinito cuando $x\to a^+$ o cuando $x\to b^-$. Es decir, son de la forma:

$$\int_a^{b} f(x)\,dx \qquad \text{con} \quad \lim_{x\to a^+} f(x)\longrightarrow\infty, \qquad f \text{ integrable en} \quad a<x\leq b$$

o

$$\int_a^{b} f(x)\,dx \qquad \text{con} \quad \lim_{x\to b^-} f(x)\longrightarrow\infty, \qquad f \text{ integrable en} \quad a\leq x<b$$

OBSERVACIÓN: Cualquier integral impropia que tenga un número finito de «valores infinitos» puede expresarse como una suma finita de integrales simples de los tipos I y II. Por ejemplo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(2x+1)(x-4)} = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1}}_{\text{Tipo } I} + \underbrace{\int_{-1}^{-1/2}}_{\text{Tipo } II} + \underbrace{\int_{-1/2}^{0}}_{\text{Tipo } II} + \underbrace{\int_{0}^{4}}_{\text{Tipo } II} + \underbrace{\int_{4}^{5}}_{\text{Tipo } II} + \underbrace{\int_{5}^{\infty}}_{\text{Tipo } I} \frac{dx}{(2x+1)(x-4)}$$

donde hemos omitido escribir el integrando, por razones de espacio.

Para tener una idea de como evaluar una integral impropia del tipo I, consideremos el siguiente ejemplo: suponga que queremos integrar la función $f: [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \to f(x) = 1/x^2$. En cada intervalo de la forma $[1,b]$ la función $f(x) = 1/x^2$ es continua y por lo tanto integrable; además, por el teorema fundamental del cálculo, tenemos

$$\int_1^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^b = 1 - \frac{1}{b}$$

Es razonable entonces considerar

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} &= \lim_{b\to+\infty} \left(\int_1^b \frac{dx}{x^2} \right) \\ &= \lim_{b\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 1 \end{aligned}$$

Esto motiva la definición de *integral impropia de primer tipo* o *primera especie*.

5.2. Integrales impropias de primera especie. Criterios de convergencia.

DEFINICIÓN 5.2.1 (Integrales impropias de primera especie) Definimos las integrales sobre intervalos no acotados de la siguiente forma:

1. Si $f: [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable en cada intervalo $[a,b]$, se define
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$
2. Si $f:]-\infty,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable en cada intervalo $[a,b]$, se define
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$
3. Si $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable en cada intervalo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ entonces
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$$
donde c es cualquier número real.

   En los dos primeros casos decimos que la integral **converge** si el límite existe (en tal caso el valor lo denotamos por $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ respectivamente); en caso contrario, decimos que a integral **diverge**. En el tercer caso decimos que la integral de la izquierda converge si las dos integrales impropias de la derecha convergen en forma independiente.

OBSERVACIÓN: En el caso 3. anterior es importante tener presente que para que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converja, es necesario que tanto $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ como $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$ converjan, *independientemente*.

Note que:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}\,dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{1+x^2}\,dx+\int_{0}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{x}{1+x^2}\,dx+\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{x}{1+x^2}\,dx=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\ln(1+x^2)^{1/2}\Big|_a^0+\lim_{b\to\infty}\ln(1+x^2)^{1/2}\Big|_0^b=\lim_{a\to-\infty}-\ln(1+a^2)^{1/2}+\lim_{b\to\infty}\ln(1+b^2)^{1/2}$$

y ambos límites no existen; el primero tiende a $-\infty$ y el segundo a $+\infty$. Luego, la integral anterior **no** converge.

Sin embargo, si no se considera ambos límites de manera independiente:

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\frac{x}{1+x^2}\,dx=\lim_{a\to\infty}\ln(1+x^2)^{1/2}\Big|_{-a}^{a}=\lim_{a\to\infty}\ln(1+a^2)^{1/2}-\ln(1+(-a)^2)^{1/2}=0$$

Este último cálculo no debe inducir a error: para que una integral impropia de este tipo converja, es necesario que *ambos* límites converjan independientemente. Pero, esta última integral impropia que calculamos se llama *valor principal de Cauchy* de la integral. Más precisamente,

DEFINICIÓN 5.2.2 Se llama *valor principal de Cauchy* de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ al límite

$$vp\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\right)=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx$$

EJEMPLOS:

1. Analizar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}$

   Solución:

   $$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\ln x\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\ln b-\ln 1=\lim_{b\to\infty}\ln b\ \underset{b\to\infty}{\longrightarrow}\ \infty\quad\therefore\ \text{diverge.}$$

2. Analizar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^3\,dx$.

   Solución:

   $$\int_{0}^{+\infty} x^3\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} x^3\,dx=\lim_{b\to\infty}\frac{x^4}{4}\Big|_0^b=\lim_{b\to\infty}\frac{b^4}{4}\ \underset{b\to\infty}{\longrightarrow}\ \infty\quad\therefore\ \text{diverge.}$$

3. Analizar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^3\,dx$.

Solución:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^3\,dx = \int_{-\infty}^{0} x^3\,dx + \int_{0}^{+\infty} x^3\,dx = \lim_{a\to-\infty} \frac{x^4}{4}\bigg|_a^0 + \lim_{b\to\infty} \frac{x^4}{4}\bigg|_0^b = \lim_{a\to-\infty} -\frac{a^4}{4} + \lim_{b\to\infty} \frac{b^4}{4}.$$

Como ambos límites divergen, la integral pedida diverge. Note que, nuevamente el valor principal es 0. Esto se debe, claramente, a que la función integrando es impar.

EJERCICIOS:

Analizar la convergencia de las integrales impropias:

(a) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

(d) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} (1-x)e^{-2x}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan x\,dx}{1+x^2}$

(g) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ (h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$ (i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx$

(j) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ (k) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} x\,dx$ (l) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x}$

5.2.1. Integrales "p"

Llamaremos integrales p no acotadas a las integrales del tipo $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$. Estudiaremos su convergencia.

Notemos que

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{x^{1-p}}{1-p}\bigg|_1^b & \text{si} \quad p \neq 1 \\[2ex] \ln x\big|_1^b & \text{si} \quad p = 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{b^{1-p}}{1-p} + \dfrac{1}{p-1} & \text{si} \quad p \neq 1 \\[2ex] \ln b & \text{si} \quad p = 1 \end{cases}$$

De esta forma

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & \text{si} \quad p>1 \\ \\ +\infty & \text{si} \quad p\leq 1 \end{cases}$$

de donde concluimos que la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \qquad \text{converge si y solo si} \quad p>1.$$

EJEMPLOS:

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ diverge $\quad \left(\text{pues } p=\dfrac{1}{2}<1\right)$

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge $\quad \left(\text{pues } p=\dfrac{3}{2}>1\right)$.

OBSERVACIÓN: Suponga que $f:[a,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ es continua. Si $c>a$, entonces, por aditividad

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Note que por la continuidad de f, $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ es un número bien definido; de esta forma

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{converge si y solo si} \quad \int_c^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge}$$

Es importante tener presente que los valores a los cuales convergen ambas integrales pueden ser *distintos.*

EJEMPLOS: $\displaystyle\int_{1/3}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge puesto que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge.

Basta notar que $\displaystyle\int_{1/3}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \int_{1/3}^{1} \frac{dx}{x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

PROPOSICIÓN 5.2.1 Sean $f,g:[a,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ funciones continuas.

1. Si $\alpha\in\mathbb{R}-\{0\}$ entonces $\displaystyle\int_a^{+\infty} \alpha f(x)\,dx$ converge si y solo si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Más aún:

$$\int_a^{+\infty} \alpha f(x)\,dx = \alpha\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

2. Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ y $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ convergen, entonces $\displaystyle\int_a^{+\infty} \big(f(x)+g(x)\big)\,dx$ converge. Más aún

$$\int_a^{+\infty} \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

OBSERVACIÓN: Proposiciones similares se pueden enunciar respecto a los otros tipos de integrales de primera especie.

5.2.2. Teoremas de convergencia para funciones positivas

Suponga que es difícil encontrar una primitiva para calcular el valor de una integral impropia que estemos considerando. ¿Cómo podemos garantizar que el límite existe *sin necesidad de calcular* la integral?

Para responder esta pregunta necesitamos antes el siguiente

LEMA 5.2.1 Si $F : [a,+\infty[\, \to \mathbb{R}$ es una función creciente entonces $\displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x)$ existe o $\displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x) = +\infty$. El primer caso se da si y solo si F es acotada superiormente.

OBSERVACIÓN: La demostración se basa en analizar los casos en que F es acotada y no acotada. En el primer caso

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \sup\{F(x) : x \in [a,+\infty[\,\}$$

TEOREMA 5.2.1 (criterio de comparación) Sean $f,g : [a,+\infty[\, \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a,+\infty[$ tales que para $x \geq c$ se cumple

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

Entonces:

- Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.
- Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge, entonces $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge.

Dem.: Sabemos que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge si y solo si $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, y análogamente para g. Si definimos

$$F(x) = \int_c^{x} f(t)\,dt \quad \text{y} \quad G(x) = \int_c^{x} g(t)\,dt$$

entonces por el teorema fundamental del cálculo ambas funciones son derivables y con derivada positiva (por hipótesis $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para $x \geq c$). Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_c^{+\infty} g(t)\,dt$ converge y así

$$G(x) = \int_c^x g(t)\,dt \leq \int_c^{+\infty} g(t)\,dt = M < \infty$$

Como $F(x) \leq G(x)$ se sigue que la función creciente $F(x)$ es acotada y por tanto $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ existe, es decir

$$\int_c^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{converge, y luego} \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{converge.}$$

EJEMPLOS:

1. Estudie la convergencia de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+x+1}\,dx$

   Solución: Notar que si $x > 1:\quad x^2 < x^4+x+1.$ Entonces: $\dfrac{1}{x^4+x+1} < \dfrac{1}{x^2}.$

   $$\therefore \quad \int_1^b \frac{1}{x^4+x+1}\,dx < \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \Big/ \lim_{b\to\infty}$$

   $$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4+x+1}\,dx < 1 \qquad \therefore \int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+x+1}\,dx \quad \text{converge.}$$

2. Estudie la convergencia de $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx.$

   Solución: Notamos que $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1+e^{-x}}{x}$ y como $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ es divergente, la integral en estudio también diverge.

TEOREMA 5.2.2 (criterio del cuociente) Sean $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, +\infty[$ y no negativas tales que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0$$

entonces $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge si y solo si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Además:

- si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ y $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.
- si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ y $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge, entonces $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

Dem.: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L>0$ entonces existe $M>0$ tal que si $x\geq M$

$$\frac{L}{2}\leq\frac{f(x)}{g(x)}\leq\frac{3L}{2}$$

Se sigue para $x\geq M$

$$\frac{L}{2}g(x)\leq f(x)\leq g(x)\frac{3L}{2}$$

Aplicamos ahora el teorema de comparación, y se tiene el resultado.

EJEMPLOS:

1. Estudie la convergencia de $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^4+x+1}\,dx$

   En este caso, aplicaremos el criterio del cuociente, considerando la función $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$. Entonces:

   $$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4+x+1}} = \lim_{x\to\infty} 1+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4} = 1\neq 0 \quad \therefore \text{ la integral converge pues } \int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx \quad \text{converge } (p>1).$$

2. Estudiemos de nuevo la convergencia de $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx$.

   Solución: Aplicamos el criterio del cuociente, considerando la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Entonces:

   $$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1+e^{-x}}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+e^{-x}} = 1\neq 0 \quad \therefore \text{ la integral diverge pues } \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \quad \text{diverge } (p<1).$$

3. Estudiar la convergencia de:

   a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ *b)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

   Solución:

   a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 1 \quad \therefore \text{ la integral converge, pues } p=2.$$

   b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}}{\frac{1}{x^{1/2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{5/2}}{\sqrt{x^5+1}} = 1 \quad \therefore \text{ la integral diverge, pues } p=\frac{1}{2}.$$

c) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{1/2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \quad \therefore$ la integral converge.

EJERCICIOS:

1. Decida si las siguientes integrales son o no convergentes:

a) $\displaystyle \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+4)^2}$

b) $\displaystyle \int_1^{+\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{x^6+4x^3+2\operatorname{sen} x}\,dx$

c) $\displaystyle \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

d) $\displaystyle \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}\,dx$

e) $\displaystyle \int_1^{+\infty} \frac{1+e^x}{1+e^x+e^{2x}}\,dx$

2. ¿Para que valores $\beta \geq 0$ es convergente la siguiente integral impropia?

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^{\beta}+x^{2\beta}}$$

DEFINICIÓN 5.2.3 Diremos que la integral $\displaystyle \int_a^{\infty} f(x)dx$ *converge absolutamente* si $\displaystyle \int_a^{\infty} |f(x)|dx$ (que es una integral impropia donde el integrando es no negativo) converge.

TEOREMA 5.2.3 Si $\displaystyle \int_a^{\infty} |f(x)|dx$ converge, entonces $\displaystyle \int_a^{\infty} f(x)dx$ converge.

Dem.: $f(x) \leq |f(x)| \implies 0 \leq |f(x)| - f(x) \leq 2|f(x)| \implies \displaystyle \int_a^{\infty} |f(x)| - f(x)dx$ converge.

$$\therefore \quad \int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^{\infty} f(x) - |f(x)|dx + \int_a^{\infty} |f(x)|dx \quad \text{converge.}$$

OBSERVACIÓN: Podemos utilizar también estos criterios adaptados con los otros tipos de integrales impropias de primera especie.

5.3. CLASE 13: Integrales impropias de segunda y tercera especie

Vimos en la sección anterior cómo enfrentar el problema de integrar sobre intervalos no acotados; ahora veremos qué sucede si la función es no acotada y también cómo proceder cuando tenemos ambos tipos de comportamiento.

Para tener una idea de cómo enfrentar el problema para funciones no acotadas, supongamos que queremos calcular el área bajo la curva $y = f(x)$, donde f es una función positiva, continua, definida sobre el intervalo $[a,b[$, con una asíntota vertical en b. Para cada $c \in [a,b[$ consideramos

$$A(c) = \int_a^c f(x)dx$$

Claramente, podemos tratar de calcular

$$\lim_{c\to b^-} A(c) = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx$$

Esto nos permite definir

DEFINICIÓN 5.3.1 (integral impropia de segunda especie (funciones no acotadas))

1. Sea $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ una función continua, no acotada en $x = b$. Diremos que f es integrable en $[a,b[$ si el límite $\displaystyle\lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$ existe, o, equivalentemente, si el límite $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ existe. En este caso escribimos

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} \displaystyle\lim_{c\to b^-} \int_a^b f(x)dx & \text{o bien} \\ \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \end{cases}$$

   La integral impropia se dice *convergente* si el límite existe.

2. Sea $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua, no acotada en $x = a$. Diremos que f es integrable en $]a,b]$ si el límite $\displaystyle\lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$ existe, o, equivalentemente, si el límite $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ existe. En este caso escribimos

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} \displaystyle\lim_{c\to a^+} \int_a^b f(x)dx & \text{o bien} \\ \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \end{cases}$$

   La integral impropia se dice *convergente* si el límite existe.

3. Si la función f tiene una discontinuidad en c, con $a < c < b$, y si las integrales $\displaystyle\int_a^c f(x)dx \quad \wedge$ $\displaystyle\int_c^b f(x)dx$ convergen, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

EJEMPLOS:

1. Determine, si es posible, $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx$

   Solución: Notamos que esta integral es impropia en $x = 2$. Luego, si converge, debe existir:

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx = \lim_{c\to 2^+} \int_c^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx = \lim_{c\to 2^+} 2\sqrt{x-2}\Big|_c^5 = \lim_{c\to 2^+} 2\sqrt{3} - 2\sqrt{c-2} = 2\sqrt{3}$$

2. Estudiar la convergencia de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx$.

   Solución: Notamos que esta integral es impropia en $x = \pi/2$. Luego, si converge, debe existir:

$$\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx = \lim_{c\to \frac{\pi}{2}^-} \int_0^c \sec x\,dx = \lim_{c\to \frac{\pi}{2}^-} \ln|\sec x + \tan x|\Big|_0^c = \lim_{c\to \frac{\pi}{2}^-} \ln|\sec c + \tan c| - \ln|1| \longrightarrow \infty$$

   Luego, la integral diverge.

3. Estudiar la convergencia de $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$.

   Solución: Notamos que la función integrando posee una discontinuidad de tipo infinito en $x = 1$. Debemos por lo tanto separar:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

   Como estas integrales divergen, vemos que la integral pedida también diverge.

5.3.1. Integrales "p"

Estudiaremos, para $p > 0$, la convergencia de las integrales p

$$\int_{0^+}^1 \frac{dx}{x^p}$$

Solución: Notamos que las funciones de la forma $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$, $p>0$ tienen una asíntota en $x=0$. Luego:

$$\begin{aligned}
\int_{0^+}^{1}\frac{dx}{x^p} &= \lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \frac{dt}{t^p}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\begin{cases} \left.\dfrac{t^{1-p}}{1-p}\right|_x^1 & \text{si} \quad p\neq 1\\[2ex] \ln t|_x^1 & \text{si} \quad p=1\end{cases}\\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{1-p} & \text{si} \quad 0<p<1\\[2ex] +\infty & \text{si} \quad p\geq 1\end{cases}
\end{aligned}$$

De esta forma $\displaystyle\int_{0^+}^{1}\frac{dx}{x^p}$ converge si y solo si $p<1$.

OBSERVACIÓN: Notar que mediante cambios de variables, todos los problemas se pueden reducir al análisis de integrales del tipo $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Por ejemplo, si queremos calcular

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ y se tiene que $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x)\to\infty$, hacemos $x=a+t^{-1}$ de donde $dx=-\dfrac{1}{t^2}dt$,

obteniendo:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{(b-a)^{-1}}^{\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{t}\right)}{t^2}\,dt$$

Análogamente, si queremos calcular

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ y se tiene que $\displaystyle\lim_{x\to b^-} f(x)\to\infty$, hacemos $x=b-t^{-1}$ de donde $dx=\dfrac{1}{t^2}dt$,

obteniendo:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{(b-a)^{-1}}^{\infty}\frac{f\left(b-\frac{1}{t}\right)}{t^2}\,dt$$

Por lo tanto, podemos aplicar los teoremas vistos anteriormente (integrales de tipo I) para estudiar la convergencia de integrales de tipo II.

5.3.2. Teoremas de Convergencia

Enunciaremos a continuación los teoremas de comparación y del cuociente para el caso de integrales impropias del tipo II. En este último caso, puede basarse la demostración en el siguiente

LEMA 5.3.1 Si $F : [a,b[\to \mathbb{R}$ es creciente entonces $\lim\limits_{x\to b^-} F(x)$ existe o bien $\lim\limits_{x\to b^-} F(x) = +\infty$. El primer caso de cumple si y solo si F es acotada.

TEOREMA 5.3.1 (criterio de comparación) Sean $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a,b[$ tales que para $x \geq c > a$ se cumple

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

entonces:

1. Si $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ converge entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge.
2. Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ diverge entonces $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ diverge.

TEOREMA 5.3.2 (criterio del cuociente) Sean $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a,b[$ y no negativas tales que

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0$$

Entonces, $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ converge si y solo si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

Además,

- si $L = 0$ y $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge.
- si $L = \infty$ y $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ diverge, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.

OBSERVACIÓN: Podemos utilizar también estos criterios adaptados con los otros tipos de integrales impropias de segunda especie.

EJEMPLOS:

1. Analizar la convergencia de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$.

   Solución: El integrando posee una asíntota en $x = 0$. Calculamos

   $$\lim_{x\to 0^+} x^{3/4}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1/4}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{4}x^{-5/4}} = \lim_{x\to 0^+} -4x^{1/4} = 0$$

   Como $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/4}}$ converge $(p = 3/4 < 1)$, se tiene que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ converge.

2. Analizar la convergencia de $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{\ln x}\,dx.$

   Solución: El integrando posee una asíntota en $x=1$. Calculamos

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\frac{\sqrt{x}}{\ln x} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^{3/2}-x^{1/2}}{\ln x} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{3}{2}x^{1/2}-\frac{1}{2}x^{-1/2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{3}{2}x^{3/2}-\frac{1}{2}x^{1/2} = 1.$$

   Como $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x-1}\,dx$ diverge, entonces $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{\ln x}\,dx$ diverge.

3. Sean $m,n\in\mathbb{R}:\ 0<m,n<1$. Analizar la convergencia de $\displaystyle\int_a^b (x-a)^{-m}(b-x)^{-n}\,dx.$

   Solución: Claramente, estamos suponiendo que $a\neq b$. Entonces, como

$$\int_a^b (x-a)^{-m}(b-x)^{-n}\,dx = \int_a^c (x-a)^{-m}(b-x)^{-n}\,dx + \int_c^b (x-a)^{-m}(b-x)^{-n}\,dx$$

   para algún $c\in\,]a,b[$.

   - Analizamos la primera integral de la derecha, que posee una propiedad en $x=a$:
     $\displaystyle\lim_{x\to a^+}(x-a)^m\frac{1}{(x-a)^m(b-x)^n} = \frac{1}{(b-a)^n}$ por lo que converge.

   - Analizamos la segunda integral de la derecha, que posee una propiedad en $x=b$:
     $\displaystyle\lim_{x\to b^-}(b-x)^n\frac{1}{(x-a)^m(b-x)^n} = \frac{1}{(b-a)^m}$ por lo que converge.

     Luego, la integral $\displaystyle\int_a^b (x-a)^{-m}(b-x)^{-n}\,dx$ converge.

DEFINICIÓN 5.3.2 Las integrales impropias de *tercera especie* o mixtas son aquellas integrales que combinan las de primera y segunda especie.

EJEMPLOS:

1. La integral

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}+x^4}$$

   es una integral impropia mixta. La función tiene una asíntota vertical en $x=0$ y el intervalo de integración es infinito. La convergencia de esta integral dependerá de la convergencia de las integrales impropias

$$\int_{0^+}^1\frac{dx}{\sqrt{x}+x^4} \quad \text{y} \quad \int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}+x^4}$$

2. Determine para qué valores de p converge la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{1-p}}{1+x}\,dx$$

Solución:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{1-p}}{1+x}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p + x^{p-1}} = \int_0^{1} \frac{dx}{x^p + x^{p-1}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p + x^{p-1}}$$

- Análisis de convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x^p + x^{p-1}}$:

  usando criterio de comparación al limite con $f(x) = \dfrac{1}{x^{p-1}}$, obtenemos

  $$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{p-1}}{x^p + x^{p-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1$$

  Así, $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x^p + x^{p-1}}$ converge para $p-1 < 1$ $(p < 2)$ y diverge para $p-1 \geq 1$ $(p \geq 2)$.

- Análisis de convergencia de la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p + x^{p-1}}$

  usando el criterio de comparación al límite con $g(x) = \dfrac{1}{x^p}$, obtenemos

  $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{x^p + x^{p-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

  Por lo tanto, $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p + x^{p-1}}$ converge para $p > 1$ y diverge para $p \leq 1$

En resumen:

a) Para $p \leq 1$, $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x^p + x^{p-1}}$ converge y $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p + x^{p-1}}$ diverge.

Luego, si $p \leq 1$, $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{1-p}}{x^p + x^{p-1}}\,dx$ diverge.

b) Para $p \geq 2$, $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x^p + x^{p-1}}$ diverge y $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p + x^{p-1}}$ converge.

Luego, si $p \geq 2$, $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{1-p}}{x^p + x^{p-1}}$ dx diverge.

c) Para $1 < p < 2$, $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x^p + x^{p-1}}$ converge y $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p + x^{p-1}}$ converge.

Luego, si $1 < p < 2$, $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{1-p}}{x^p + x^{p-1}}\,dx$ converge.

3. Estudie la convergencia de la integral
$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

Solución:

Un camino posible es hacer el cambio de variable $u = \sqrt{x}$, y la integral queda:
$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = 2\int_0^1 e^{-u^2}\,du + 2\int_1^\infty e^{-u^2}\,du$$

La primera integral $\displaystyle\int_0^1 e^{-u^2}\,du$ no es una integral impropia, pues $f(u) = e^{-u^2}$ es una función continua, definida en un intervalo cerrado.

Para la segunda, usamos comparación: $0 \le e^{-u^2} \le e^{-u}$ si $u \ge 1$. Como la integral $\displaystyle\int_1^\infty e^{-u}\,du$ converge, entonces la integral $\displaystyle\int_1^\infty e^{-u^2}\,du$ converge. $\therefore$ la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ converge.

Otro camino posible es usar directamente el método de comparación: $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ converge, pues
$$0 \le \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \forall\, 0 < x \le 1$$
y como la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge, entonces la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ converge.

Para la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$, usamos el hecho $\displaystyle\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \le e^{-x}$ si $x \ge 1$. Y como la integral $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x}\,dx$ converge, entonces la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ converge.

Luego,
$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{converge.}$$

Los criterios que hemos dado hasta ahora solo sirven para funciones positivas. Sin embargo, podemos formular el siguiente criterio de comparación:

TEOREMA 5.3.3 Sean f, g, h funciones continuas en $[a, +\infty[$, tales que
$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$
Entonces, si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ y $\displaystyle\int_a^{+\infty} h(x)\,dx$ convergen, se sigue que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Dem.: Basta considerar la desigualdad $0 \leq f(x) - g(x) \leq h(x) - g(x)$ y aplicar el criterio de comparación para funciones positivas.

EJEMPLO 5.3.1 La integral impropia

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+1}\, dx$$

es convergente.

Note que no podemos aplicar los criterios de comparación para funciones positivas, pero

$$-\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1}$$

Como $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}$ converge, se sigue por el criterio de comparación que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{x^2+1}$ converge.

EJERCICIOS:

1. Clasificar en los diferentes tipos de integrales impropias y analizar la convergencia:

   a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2\, dx}{1+x^2+x^4}$

   b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1-x)^4}$

   c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{(x^2+1)^2(x^2+3)}\, dx$

   d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x}{\operatorname{sen} x}\, dx$

   e) $\displaystyle\int_0^{1} \ln x\, dx$

   f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x/3}}{1+e^x}\, dx$

   g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^{3/2}}\, dx$

   h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln\left(1+e^x\right) dx$

   i) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

   j) $\displaystyle\int_1^{\infty} x^n e^{-x}\, dx$

2. Determinar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales la integral

   $$\int_0^1 \frac{x^\alpha\, dx}{\sqrt{x^5(1-x)}} \qquad \text{converge.}$$

3. Determine si $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} y^3 e^{-y^2}\, dy$ es o no convergente. En caso afirmativo, calcule su valor.

4. Determine, si es posible, $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

5. Demuestre que $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ $(b>a)$ converge $\forall p<1$ y diverge $\forall p \geq 1$.

6. Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}: \displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln x)^n}{\sqrt{x}}\,dx$ existe.

7. Pruebe que la integral
$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$
converge.

8. Pruebe que
$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$
converge.

9. Hallar a y b tales que
$$\int_1^\infty \left(\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right)dx = 1.$$

10. Probar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(r^2+2rx\cos\theta+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{r^2(1+\cos\theta)}$. $\left(\text{Ayuda: } t=\dfrac{x+r\cos\theta}{r\operatorname{sen}\theta}\right)$.

5.3.3. CLASE 14: Función Gamma

DEFINICIÓN 5.3.3 Para cada $x > 0$, se define la función Gamma, $\Gamma(x)$, como

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

Veamos que $\Gamma(x)$ está bien definida $\forall x > 0$. Notamos que:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

Estudiemos cada integral por separado:

- Para demostrar que $\displaystyle\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ converge, consideramos $g(t) = \dfrac{1}{t^2}$. Luego:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t} t^{x-1}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to\infty} t^2 e^{-t} t^{x-1} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0$$

  Luego, como $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{t^2}$ converge, la integral pedida también converge.

- Probemos ahora la convergencia de $\displaystyle\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$:

  - Si $x = 1$: $\displaystyle\int_0^1 e^{-t} dt$ claramente converge.
  - Si $x > 1$:

$$\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt \underbrace{=}_{\substack{u = t^{x-1} \\ dv = e^{-t} dt}} -t^{x-1} e^{-t} \Big|_0^1 + \int_0^1 (x-1) t^{x-2} e^{-t} dt = -t^{x-1} e^{-t} \Big|_0^1 + (x-1) \int_0^1 t^{x-2} e^{-t} dt$$

    Notamos que, integrando sucesivamente por partes, se va bajando el grado de la potencia de t. Luego, basta considerar el caso

  - $0 < x < 1$:

$$\begin{aligned} e^{-t} &\leq 1 \qquad (\text{pues } t > 0) \\ t^{x-1} e^{-t} &\leq t^{x-1} \\ \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt &\leq \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{t^x}{x}\Big|_0^1 = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

    expresión que está bien definida para cada $x \in]0, 1[$.

PROPIEDADES 5.3.1 La función $\Gamma(x)$ satisface las siguientes:

1. $\Gamma(1)=1$
2. $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \quad \forall x>0.$ En particular, $\Gamma(n)=(n-1)! \quad \forall n\in\mathbb{N}.$

EJERCICIOS:

1. Sabiendo que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ demuestre que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$
2. Probar que $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$
3. Calcule $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)$

5.3.4. Función Beta

La función «beta» es una función de dos variables, definida mediante una integral impropia. Más precisamente:

DEFINICIÓN 5.3.4 Sean $x,y>0$. Definimos $\beta(x,y)$ como

$$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

Veamos que $\beta(x,y)$ está bien definida, es decir, que $\beta(x,y)\in\mathbb{R}$. Para ello, deberemos analizar los siguientes casos:

$$x\geq 1 \quad\wedge\quad y\geq 1; \qquad 0<x<1 \quad\wedge\quad y>1; \qquad x>1 \quad\wedge\quad 0<y<1; \qquad 0<x<1 \quad\wedge\quad 0<y<1.$$

Caso I: $x\geq 1 \quad\wedge\quad y\geq 1$

En este caso, la integral no es impropia ni en $t=0$ ni en $t=1$, por lo que converge.

Caso II: $0<x<1 \quad\wedge\quad y>1$

En este caso, la integral es impropia en $t=0$:

notamos que $0\leq t\leq 1 \;\Rightarrow\; 0\leq 1-t\leq 1$ de donde $0\leq t^{x-1}\leq 1 \quad\wedge\quad 0\leq(1-t)^{y-1}\leq 1$

$\therefore \quad 0\leq t^{x-1}(1-t)^{y-1}\leq 1$ y por lo tanto $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\leq\int_0^1 dt.$ Luego, converge.

Caso III: $x>1 \quad\wedge\quad 0<y<1$

En este caso, la integral es impropia en $t=1$, y se procede análogamente, por comparación.

Caso IV: $0<x<1 \quad\wedge\quad 0<y<1$:

En este caso, la integral es impropia tanto en $t=0$ como en $t=1$, y por lo anterior, basta usar aditividad.

Dejamos como ejercicio probar las siguientes propiedades:

PROPIEDADES 5.3.2 Dados $x, y > 0$ se tiene:

1. $\beta(x,1) = \dfrac{1}{x}$
2. $\beta(x,y) = \beta(y,x)$
3. $\beta(x,y) = \dfrac{y-1}{x}\beta(x+1,y+1)$
4. $\beta(x,y) = \dfrac{(y-1)!}{x(x+1)\cdots(x+y-1}$ $\quad \forall y \in \mathbb{N}.$
5. $\beta(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ $\quad \forall x, y \in \mathbb{N}$

5.4. Ejercicios de Controles y Certámenes

1. Determine los valores de $p \in \mathbb{R}$ para los cuales converge la integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)x^p}$$

2. Encontrar todos los valores de $p > 0$ para los cuales la integral impropia

$$\int_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^{8p}+1}}dx$$

es convergente.

3. Determine los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los que $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha-1}}dx.$

4. Determine el valor de $a \in \mathbb{R}$ para el que $\displaystyle\int_a^\infty \frac{\arctan}{1+x^2}dx = \frac{\pi^2}{8}.$

5. Determine si la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx$ converge o diverge.

6. Determine la convergencia o divergencia de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_2^{102} \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$

b) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$

Capítulo 6

Coordenadas Polares

6.1. CLASE 15: Coordenadas Polares

Hasta ahora hemos estudiado el sistema de coordenadas cartesianas o rectangulares para localizar puntos en el plano. Existen otros sistemas de coordenadas que en determinadas condiciones de simetría presentan ventajas respecto a las coordenadas cartesianas. En esta clase estudiaremos el sistema de coordenadas polares.

6.1.1. Posición de un punto en coordenadas polares

En el sistema de coordenadas polares, un punto P del plano se representa por un par (r,θ) donde r es la distancia del origen (llamado *polo*) al punto dado y θ es el ángulo de inclinación del radio vector $\overrightarrow{OP}$ con respecto al semieje positivo X llamado *eje polar*.

OBSERVACIÓN: En lo que sigue trabajaremos con el ángulo medido en radianes.

EJEMPLO 6.1.1 En coordenadas polares, el punto $P=(3,\pi/6)$ es ubicado dibujando primero un rayo que parte en el polo que forme un ángulo $\theta=\pi/6$ con el semieje positivo (eje polar). Luego, sobre dicho radio y desde el origen se mide $r=3$ unidades. Notar que el mismo punto del plano pudo haber sido localizado usando las coordenadas polares $(3,-11\pi/6)$, más aún $P=(3,\pi/6+2n\pi)$ para $n\in\mathbb{Z}$.

Extensión de la representación Todo punto $P=(r,\theta)$ tiene infinitas representaciones

$$(r,\theta)=\begin{cases} (r,\theta+2k\pi) & \text{con} \quad k\in\mathbb{Z} \\ (-r,\theta+\pi+2k\pi) & \text{con} \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Note que el origen o polo es representado por todos los puntos de la forma $(0,\theta)$ con $\theta\in\mathbb{R}$.

Fórmulas de transformación

Ya que estamos familiarizados con las coordenadas rectangulares es útil poder transformar coordenadas polares en rectangulares y viceversa. Para obtener fórmulas de transformación observamos que el origen es el polo en polares y el eje polar es el semieje X positivo. Si el punto P tiene coordenadas polares (r,θ) entonces

$$\begin{array}{rcl} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}$$

Aunque en la definición de coordenadas polares se pide que $r \geq 0$, estas fórmulas son válidas incluso si $r < 0$: en ese caso, el punto representado corresponde a $(-r, \theta+\pi)$.

EJEMPLO 6.1.2 Hallar las coordenadas rectangulares y representar gráficamente los puntos P cuyas coordenadas polares son:

1. $(2,\pi/3) \quad \longrightarrow \quad (2\cos\pi/3, 2\,\mathrm{sen}\,\pi/3) = (1,\sqrt{3})$
2. $(2,-11\pi/3)$
3. $(-4,3\pi/4) \quad \longrightarrow \quad \Big(4\cos(\pi/4+\pi),\ 4\,\mathrm{sen}(\pi/4+\pi)\Big) = (-4,-\sqrt{2}/2)$
4. $(-2,-5\pi/3)$

De las fórmulas de transformación anteriores obtenemos

$$\begin{array}{rcl} r^2 & = & x^2+y^2 \\ \tan\theta & = & \dfrac{y}{x} \qquad \text{para } x\neq 0 \end{array}$$

De esta forma, si queremos obtener la representación polar de un punto en coordenadas rectangulares (x,y) tenemos que hacer lo mismo que para obtener la forma polar de un complejo. Recordemos: como la función *tangente* tiene período π, esta ecuación determina el ángulo θ salvo un múltiplo entero de π. Sabemos que

$$\exists!\,\theta^* \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\;:\quad \tan\theta^* = \frac{y}{x}$$

de donde:

$$\theta = \begin{cases} \theta^* & \text{si} \quad x>0 \\ \pi+\theta^* & \text{si} \quad x<0 \quad \wedge \quad y\geq 0 \\ -\pi+\theta^* & \text{si} \quad x<0 \quad \wedge \quad y<0 \end{cases}$$

OBSERVACIÓN: Si (x, y) no es el origen entonces siempre son válidas las fórmulas

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \cos\theta &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

EJEMPLOS:

1. Determine las coordenadas polares del punto $(-2, 2\sqrt{3})$ en coordenadas cartesianas.

   Solución: $r = \sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2} = 4$

   $\tan\theta^* = \dfrac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}.$ Como $-\dfrac{\pi}{2} < \theta^* < \dfrac{\pi}{2}$, se tiene que $\theta^* = -\dfrac{\pi}{3}$

   $\therefore \quad \theta = -\dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{2\pi}{3}.$

2. Determine las coordenadas polares del punto $(5, -5)$ en coordenadas cartesianas.

   Solución: Note que

   $$r^2 = x^2 + y^2 = 50 \qquad \Rightarrow \qquad r = 5\sqrt{2}$$

   El punto está en el cuarto cuadrante y

   $$\tan\theta = \frac{-5}{5} = -1 \qquad \Rightarrow \qquad \theta = -\frac{\pi}{4}$$

   Se sigue que el punto en coordenadas polares es

   $$\left(5\sqrt{2},\ -\frac{\pi}{4}\right) = \left(5\sqrt{2},\ \frac{7\pi}{4}\right)$$

3. Escribir la ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ en coordenadas polares.

4. Considere todos los puntos en coordenadas polares que cumplen la ecuación $r = 4\operatorname{sen}\theta$. Transformar a coordenadas cartesianas e identificar su gráfica.

   Solución: Si multiplicamos la ecuación por r obtenemos

   $$r^2 = 4r\operatorname{sen}\theta$$

   Pero $r^2 = x^2 + y^2$ y $r\operatorname{sen}\theta = y$, de dondelos puntos es coordenadas rectangulares satisfacen

   $$x^2 + y^2 = 4y$$

   es decir

   $$x^2 + (y-2)^2 = 2^2$$

   que es una circunferencia de radio 2 y centro $(0, 2)$.

6.1.2. Gráficas en coordenadas polares

Las curvas más simples en coordenadas polares son de la forma:

$$r = c \qquad \wedge \qquad \theta = \alpha, \qquad\quad c, \alpha = \text{ ctes.}$$

La primera representa una circunferencia centrada (de radio c si $c > 0$) y la segunda representa un rayo, que parte del polo y tiene ángulo α respecto del eje polar.

Más en general:

Sea f una función de una variable a valores reales ($f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Definimos el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ de todos los puntos de coordenadas polares (r, θ) que satisfacen la ecuación

$$r = f(\theta)$$

Este conjunto puede ser escrito en coordenadas cartesianas en la forma

$$\begin{aligned} G &= \left\{(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) \in \mathbb{R}^2 : r = f(\theta),\ \theta \in \operatorname{Dom}(f)\right\} \\ &= \left\{\big(f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\operatorname{sen}\theta\big) \in \mathbb{R}^2 :\ \theta \in \operatorname{Dom}(f)\right\} \end{aligned}$$

Al conjunto G se le llama gráfica polar de f y la ecuación que la origina es llamada ecuación polar de f.

Para graficar en el plano una ecuación en coordenadas polares es conveniente hacer un análisis previo antes de ubicar puntos para simplificar la construcción de la gráfica. En este análisis se consideran las nociones de interceptos, simetrías, extensión.

OBSERVACIÓN: Como sabemos todo punto de coordenadas (r, θ) coincide con el punto de coordenadas $(-r, \theta + \pi)$, de esto se sigue que si la ecuación de una curva en coordenadas polares es de la forma

$$r = f(\theta)$$

entonces la misma ecuación tiene las representaciones

$$(-1)^n\, r = f(\theta + n\pi)$$

para $n \in \mathbb{Z}$. Es por esta razón que las ecuaciones $r = 1$ y $r = -1$ son la misma circunferencia y también la gráfica de

$$r = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

es la misma que la de

$$r = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

DEFINICIÓN 6.1.1 Diremos que la gráfica de la ecuación $r = f(\theta)$ es *acotada* si

$$\exists M > 0 : \quad |r| \leq M \quad \forall \theta \in \mathrm{Dom}(f)$$

es decir, si es posible encerrar la gráfica de $r = f(\theta)$ por una circunferencia de radio M (o mayor).

EJEMPLOS:

1. $r = 4\,\mathrm{sen}(4\theta)\cos\theta$ es acotada, pues $|r| < 4 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$.

2. $r = e^{\theta}$ no es acotada. Grafíquela.

Simetría respecto al eje polar

La gráfica de una ecuación es simétrica respecto al eje polar si al reemplazar θ por $-\theta$ la ecuación polar no varía. También es posible verificar la simetría respecto al eje polar, si al cambiar simultáneamente

$$r \text{ por } -r \qquad \text{y} \qquad \theta \text{ por } \pi - \theta$$

la ecuación no varia.

OBSERVACIÓN: [importante] Cuando decimos que la ecuación $r = f(\theta)$ no cambia estamos diciendo que se obtiene una de sus multiples representaciones $(-1)^n\, r = f(\theta + n\pi)$.

EJEMPLOS:

1. $r = 1$ es simétrica respecto al eje polar. (Notar que al reemplazar r por $-r$ y θ por $\pi - \theta$ obtenemos $r = -1$ que es la otra representación de esta circunferencia)

2. $r = 2\cos(2\theta)$ es simétrica respecto al eje polar.

Simetría respecto al eje normal (Eje Y)

Si al reemplazar θ por $\pi - \theta$ la ecuación polar no varia (o al reemplazar en forma simultánea r por $-r$ y θ por $-\theta$) entonces la ecuación es simétrica respecto al eje normal.

EJEMPLO 6.1.3 La gráfica de $r = 4\mathrm{sen}\,\theta$ es simétrica respecto al eje polar.

Simetría respecto al polo

Si la ecuación polar no cambia al reemplazar r por $-r$ (o θ por $\theta + \pi$) entonces la gráfica es simétrica respecto al polo

EJEMPLO 6.1.4 Estudiar las simetrías de $r = |2\,\mathrm{sen}\,\theta|$

EJEMPLOS:

1. Graficar $r = 1 + \cos\theta$

   Solución:

   - Note que $|r| = |1 + \cos\theta| \leq 2$ luego el gráfico está dentro de la circunferencia de radio 2.
   - Interceptos.

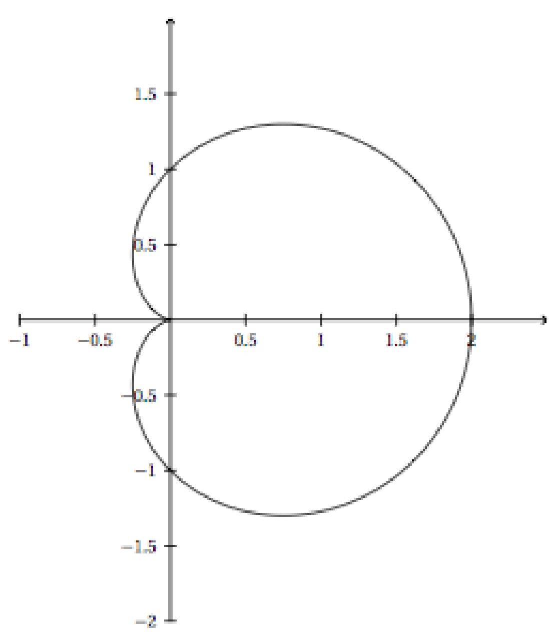
θ	r
0	2
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	1
2π	2

   Note que $f(\theta) = 1 + \cos\theta$ es periódica de período 2π; luego, se repiten las intersecciones con los ejes.

   - Simetrías: Se verifica que la gráfica es simétrica solamente respecto al eje polar. Por tanto basta dibujarla en el semiplano superior.
   - Ahora damos algunos valores de ángulos conocidos:

θ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
r	2	$1+\left(\sqrt{3}/2\right)$	$3/2$	1	$1-(1/2)$	$1-\left(\sqrt{3}/2\right)$	0

   con estos datos podemos construir la gráfica que se presenta a continuación:



2. Graficar $r = 1 - 2\cos\theta$.

3. Graficar $r = 2\,\mathrm{sen}(3\theta)$.

4. Graficar $r = 8\cos\theta$.

5. Graficar $r^2 = a^2\cos 2\theta$, a cte .

6. Graficar: $r = a\cos 2\theta$, $r = a\cos 3\theta$, $r = a\cos n\theta$, $n \in \mathbb{N}$.

6.1.3. Intersecciones de gráficas en ecuaciones polares

Como ya sabemos una ecuación polar $r = f(\theta)$ tiene las representaciones

$$(-1)^n\, r = f(\theta + n\pi)$$

por lo cual encontrar las intersecciones de dos ecuaciones polares

$$\begin{aligned} r &= f(\theta) \\ r &= g(\theta) \end{aligned}$$

puede implicar resolver más de un sistema de ecuaciones (depende de la cantidad de representaciones de una curva en polares).

EJEMPLO 6.1.5 Hallar los puntos de intersección de lás gráficas de

$$r = 2\cos(2\theta) \qquad \text{y} \qquad r = 1$$

Si ya las sabemos identificar, sabemos que son una rosa de 4 pétalos y una circunferencia de radio 1 centrada en el origen, por lo que buscamos 8 puntos de intersección.

Al resolver el sistema

$$\begin{aligned} r &= 1 \\ r &= 2\cos(2\theta) \end{aligned}$$

tenemos

$$\frac{1}{2} = \cos(2\theta)$$

de donde

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

Si usamos la representación de la curva $r = 1$ dada por $r = -1$ obtenemos

$$\begin{aligned} r &= -1 \\ r &= 2\cos(2\theta) \end{aligned}$$

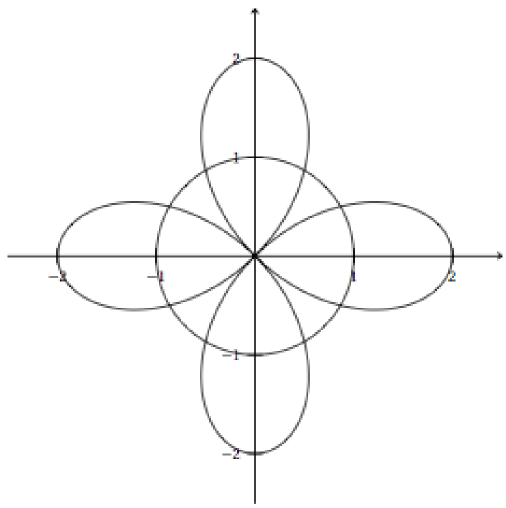
de donde

$$-\frac{1}{2} = \cos(2\theta)$$

y así

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \text{ y } \frac{5\pi}{3}$$

De esto se obtienen 8 puntos de intersección distintos.

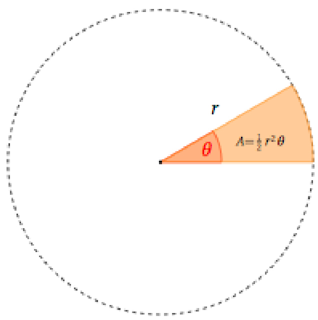


EJERCICIOS: Encontrar la intersección de las gráficas de $r = \cos 2\theta$ y $r = \cos\theta$

6.2. CLASE 16: Area en Otras Coordenadas

6.2.1. Área en Coordenadas Polares

Vamos a considerar el problema de hallar el área de una región plana encerrada por la gráfica de una ecuación polar y por dos rayos que parten desde el origen. Vamos a utilizar para ello sumas de Riemann para aproximar el valor exacto del área, sin embargo, esta vez, en lugar de considerar rectángulos emplearemos sectores circulares.



Recordemos que en un círculo de radio r, un sector circular de ángulo central θ (medido en radianes) tiene un área de

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

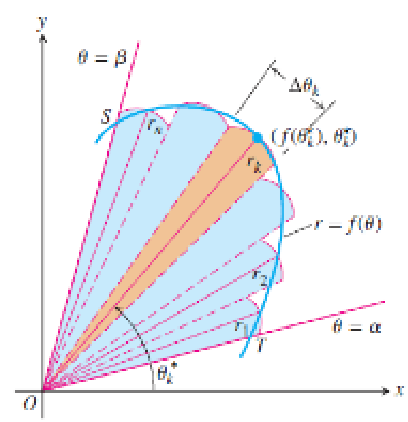
Dada una ecuación en coordenadas polares $r = f(\theta)$ donde f es una función continua y positiva, que está definida sobre $\alpha \leq \theta \leq \beta$, y la región R de área A encerrada por la gráfica de la ecuación $r = f(\theta)$ y por los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ con $\alpha < \beta$ que parten desde el origen.

Consideramos una partición $\mathscr{P} = \{\alpha = \theta_0 < \theta_1 \ldots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta\}$ la que determina n subintervalos $[\theta_{k-1}, \theta_k]$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. En cada uno de esos intervalos seleccionamos un ángulo θ_k^* arbitrario entonces el área encerrada por la gráfica entre los rayos $\theta = \theta_{k-1}$ y $\theta = \theta_k$ es aproximadamente igual a

$$\frac{1}{2}\left(f\left(\theta_k^*\right)\right)^2 \Delta\theta_k$$

de esta forma el área total encerrada es aproximadamente

$$A \sim \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}\left(f\left(\theta_k^*\right)\right)^2 \Delta\theta_k$$



Si f es continua entonces

$$\lim_{\|\mathscr{P}\| \to 0} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}\left(f\left(\theta_k^*\right)\right)^2 \Delta\theta_k = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\left(f(\theta)\right)^2 d\theta$$

DEFINICIÓN 6.2.1 Sea $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Sea R la región encerrada por la gráfica de la ecuación en coordenadas polares $r = f(\theta)$ y por los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$. El área de R está dada por

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} \left(f(\theta)\right)^2 d\theta$$

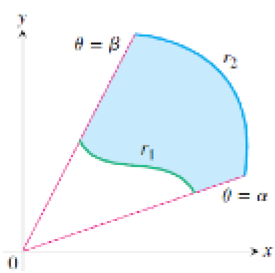
EJEMPLOS:

1. Encontrar el área encerrada por el cardioide $r = 2(1 + \cos\theta)$
2. Encontrar el área encerrada por un pétalo de $r = 4\,\text{sen}(2\theta)$

EJERCICIOS: Encontrar el área total encerrada por la lemniscata $r^2 = 4\,\text{sen}(2\theta)$

6.2.2. Extensión de la fórmula

Para calcular el área de la región encerrada por las gráficas de dos ecuaciones polares $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$ y por los rayos $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ donde $\alpha < \beta$ y $g(\theta) \le f(\theta)$ primero calculamos el área mayor y le restamos la menor es decir



$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)\,d\theta - \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} g^2(\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left(f^2(\theta) - g^2(\theta)\right) d\theta \end{aligned}$$

EJEMPLOS:

1. Hallar el área fuera de la cardioide $r = 2(1 + \cos\theta)$ y dentro de la circunferencia $r = 6\cos\theta$.

   Solución: Las curvas se intersectan en: $2(1 + \cos\theta) = 6\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \pm\dfrac{\pi}{3}$.

   Por la simetría,
   $$A = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} 36\cos^2\theta - 4(1+\cos\theta)^2 d\theta = 4\int_0^{\pi/3} 8\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1\,d\theta = 4\pi$$

2. Hallar el área común a las dos circunferencias $r = 2\,\text{sen}\,\theta$ y $r = 2\cos\theta$.

   Solución: Las curvas se intersectan en: $2\,\text{sen}\,\theta = 2\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \dfrac{\pi}{4}$

   Por la simetría,
   $$A = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 4\,\text{sen}^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2} - 1$$

EJERCICIOS: Dadas las curvas (1) $r = 2\cos(3\theta)$ y (2) $r = 1$.

1. Hallar el área que encuentra en el interior de (1) y exterior a (2)
2. Hallar el área que encuentra en el exterior de (1) e interior a (2)
3. Hallar el área interior a ambas.

6.2.3. Área en Coordenadas paramétricas

Recordemos, en primer lugar, lo que entendemos por coordenadas paramétricas: dadas dos funciones continuas $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, las ecuaciones

$$x = f(t), \qquad y = g(t) \qquad a \le t \le b$$

determinan las ecuaciones paramétricas de la curva

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = f(t), y = g(t) \text{ con } t \in [a,b] \right\}$$

Notar que, a medida que t (el parámetro) varía de a hasta b, el punto del plano $(x,y) = (f(t), g(t))$ se mueve y recorre la curva C, de ecuaciones

$$x = f(t), \qquad y = g(t) \qquad a \le t \le b$$

El punto $(f(a), g(a))$ es el **punto inicial** y el punto $(f(b), g(b))$ es el **punto terminal** o punto final. Si ellos coinciden se dice que la curva plana C es **cerrada**.

DEFINICIÓN 6.2.2 *Parametrizar* una curva cartesiana C es encontrar funciones $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = f(t), y = g(t) \text{ para } t \in [a,b] \right\}$$

Recordemos que las parametrizaciones no son únicas; por ejemplo

$$C : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -t^3 \\ y & = & t^6 \end{array} \right. \quad t \in \mathbb{R}$$

y

$$C : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & t^2 \end{array} \right. \quad t \in \mathbb{R}$$

ambas son parametrizaciones de la gráfica de la parábola $y = x^2$.

OBSERVACIÓN: Las curvas dadas en coordenadas polares pueden parametrizarse de maner estándar: si

$$r = f(\theta) \quad \text{con} \quad \theta \in [\alpha, \beta]$$

entonces

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}(\theta) \quad \text{para } \theta \in [\alpha, \beta]$$

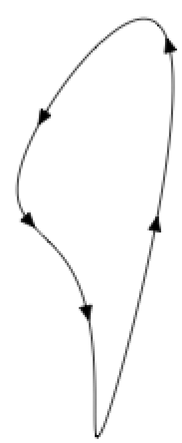
es decir

$$C : \begin{cases} x = f(t)\cos t \\ y = f(t)\,\mathrm{sen}\, t \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

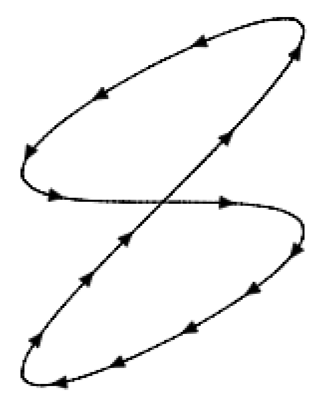
es una parametrización de la gráfica polar.

DEFINICIÓN 6.2.3 Si entre los puntos $(f(a), g(a))$ y $(f(b), g(b))$, se verifica que $(f(t_1), g(t_1))$ es diferente del punto $(f(t_2), g(t_2))$ para todo t_1 y t_2 diferentes del intervalo $]a, b[$, se dice que la curva plana C es **simple**. En otras palabras esto expresa que la curva *no se cruza a sí misma.*

OBSERVACIÓN: Las curvas simples pueden ser cerradas.



Curva cerrada simple



Curva cerrada (no simple)

DEFINICIÓN 6.2.4 Si C es una curva paramétrica cerrada y simple descrita por las ecuaciones

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad a \le t \le b$$

diremos que ella es descrita en el sentido positivo si se describe en forma antihoraria y descrita en el sentido negativo si se describe en el sentido horario.

EJEMPLOS:

1. La curva $x = \cos(4t)$, $y = \operatorname{sen}(4t)$ para $t \in [0, \pi/2]$ es una curva cerrada simple descrita en el sentido positivo. En cambio $x = \operatorname{sen}(4t), y = \cos(4t)$ para $t \in [0, \pi/2]$ es una curva cerrada simple descrita en el sentido negativo.

2. La gráfica de la cardioide $r = 1 + \cos\theta$ se puede describir mediante las ecuaciones paramétricas

$$\begin{array}{rcl} x & = & (1+\cos t)\cos t \\ y & = & (1+\cos t)\operatorname{sen} t \end{array}$$

para $t \in [0, 2\pi]$ y es una curva cerrada simple descrita en sentido positivo.

Presentamos a continuación una fórmula cuya demostración se verá en MAT024 (aunque es posible realizarla en este curso dividiendo la región en subregiones más simples), que trata sobre el área encerrada por una curva paramétrica.

TEOREMA 6.2.1 Sean $f(t), g(t)$ funciones definidas en $[a, b]$ y derivables por tramos tales que

$$C : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & f(t) \\ y & = & g(t) \end{array} \right. \quad t \in [a, b]$$

describe una curva cerrada simple orientada en sentido positivo. Entonces

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix} dt = \frac{1}{2}\int_a^b \big(f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\big)\, dt$$

es el área encerrada por la curva.

EJERCICIOS: Muestre que al usar la fórmula anterior en

$$C : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & f(t)\cos t \\ y & = & f(t)\operatorname{sen} t \end{array} \right. \quad t \in [\alpha, \beta]$$

se obtiene el área encerrada por la ecuación polar

$$r = f(\theta) \text{ con } \theta \in [\alpha, \beta]$$

Solución:

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\cos t(f'(t)\operatorname{sen} t + f(t)\cos t) - (f'(t)\cos t - f(t)\operatorname{sen} t)f(t)\operatorname{sen} t\; dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b f^2(t)(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)dt = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(t)dt$$

OBSERVACIÓN:

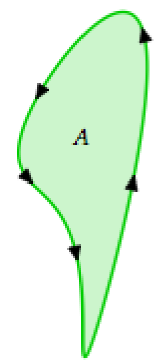
$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = -\int_a^b f'(t)g(t)dt$$

En efecto: basta realizar una integración por partes y utilizar que la curva es cerrada; de esto podemos obtener

$$A = \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

o bien

$$A = -\int_a^b f'(t)g(t)dt$$



OBSERVACIÓN: Si la curva es recorrida en sentido negativo debemos cambiar el signo en las integrales.

EJERCICIOS:

1. Verificar que las tres fórmulas anteriores dan lo esperado para la curva dada paramétricamente por

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

2. Encontrar el área encerrada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y por la astroide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$

3. Calcular el área encerrada por la cicloide

$$C : \begin{cases} x &= a(t - \operatorname{sen} t) \\ y &= a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

y el eje X.

6.3. Ejercicios de Controles y Certámenes

1. Determine el área de la región fuera del círculo $r = 1$, y dentro de la cardiode $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$
2. Exprese, mediante integral (es), el área interior a la curva $r = 1 + cos\theta$ y exterior a la curva $r = \frac{1}{2}$.
3. Considere las curvas

$$r = \frac{1}{\theta}, \qquad \theta = \frac{\pi}{4}, \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

   Determine el área encerrada por las curvas.

Capítulo 7

Más Aplicaciones

7.1. CLASE 17: Longitud de Arco

Dada una curva plana C definida en forma paramétrica por

$$C:\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{cases} \text{ para } t\in[a,b]$$

donde $x(t), y(t)$ son funciones diferenciables sobre $[a,b]$ hallaremos una fórmula integral para calcular la longitud de la curva.

Consideremos una partición $\mathscr{P}=\{a=t_0,t_1,\cdots t_{i-1},t_i,\ldots,t_n=b\}$ del intervalo $[a,b]$ y consideremos los puntos sobre la curva $Q_i=\left(x(t_i),y(t_i)\right)$ para $i=0,1,2,\ldots,n$ entonces la longitud de la curva es aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{n} d(Q_i,Q_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+\left(y(t_i)-y(t_{i-1})\right)^2}$$

por el teorema del valor medio existen puntos t_i^*, t_i^{**} en el intervalo $[t_{i-1},t_i]$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{x(t_i)-x(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}} &= x'\left(t_i^*\right) \\ \frac{y(t_i)-y(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}} &= y'\left(t_i^{**}\right) \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} (x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+\left(y(t_i)-y(t_{i-1})\right)^2 &= \left(x'\left(t_i^*\right)\right)^2(\Delta t_i)^2+\left(y'\left(t_i^{**}\right)\right)^2(\Delta t_i)^2 \\ &= \left[\left(x'\left(t_i^*\right)\right)^2+\left(y'\left(t_i^{**}\right)\right)^2\right](\Delta t_i)^2 \end{aligned}$$

se sigue

$$\sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+\left(y(t_i)-y(t_{i-1})\right)^2}=\sqrt{\left(x'\left(t_i^*\right)\right)^2+\left(y'\left(t_i^{**}\right)\right)^2}\Delta t_i$$

así

$$\sum_{i=1}^{n} d(Q_i,Q_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left(x'\left(t_i^*\right)\right)^2+\left(y'\left(t_i^{**}\right)\right)^2}\Delta t_i$$

aunque esta última expresión no es una suma de Riemann se demuestra que

$$\lim_{\|\mathscr{P}\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left(x'\left(t_i^*\right)\right)^2+\left(y'\left(t_i^{**}\right)\right)^2}\Delta t_i=\int_a^b\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

TEOREMA 7.1.1 Si $C: x=x(t), y=y(t) \quad t\in[a,b]$ es una curva paramétrica suave entonces su longitud esta dada por

$$\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

OBSERVACIÓN: Si la longitud es finita entonces decimos que la curva es rectificable. (en las condiciones del teorema la curva es rectificable)

EJEMPLOS:

1. Calcular la longitud de arco de la astroide

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$$

Solución: Parametrizamos la curva por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= a\cos^3 t \\ y &= a\,\mathrm{sen}^3 t, \qquad\qquad t\in[0,2\pi] \end{aligned}$$

Analizando la simetría de la curva nos damos cuenta que basta calcular

$$\begin{aligned} L(C) &= 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \\ &= 12a\int_0^{\pi/2}|\mathrm{sen}\,t\cos t|\,dt \\ &= 6a \end{aligned}$$

2. Hallar la longitud de un arco de la cicloide

$$\begin{aligned} x &= a(t-\mathrm{sen}\,t) \\ y &= a(1-\cos t), \qquad\qquad t\in\mathbb{R}, \quad a>0 \end{aligned}$$

Solución: Como

$$\begin{aligned} x'(t) &= a(1-\cos t) \\ y'(t) &= a\,\mathrm{sen}\,t \end{aligned}$$

se sigue

$$\begin{aligned}\sqrt{(x'(t))^2+\left(y'(t)\right)^2} &= \sqrt{(a(1-\cos t))^2+(a\operatorname{sen} t)^2}\\ &= 2a\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\\ &= 2a\left|\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right|\end{aligned}$$

se sigue

$$\int_0^{2\pi} 2a\left|\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right| dt = 8a$$

3. Calcular la longitud de arco de la curva

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_1^t \frac{\cos z}{z}dz\\ y(t) &= \int_1^t \frac{\operatorname{sen} z}{z}dz\end{aligned}$$

desde el origen al punto más próximo que tenga tangente vertical. Resp: $\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$

7.1.1. Longitud de arco en coordenadas cartesianas

Si queremos calcular la longitud de la gráfica de una función $y = f(x)$ para $x \in [a,b]$ entonces podemos emplear la fórmula anterior junto a la parametrización

$$C:\begin{cases} x = t \\ y = f(t)\end{cases} \quad \text{para } t\in[a,b]$$

y obtenemos

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(t)\right)^2}\,dt$$

EJEMPLO 7.1.1 Hallar el perímetro de la región limitada por la recta $y = 1$ y la gráfica de la función

$$y = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{4}$$

7.1.2. Longitud de arco en coordenadas polares

Si queremos calcular la longitud de la gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$ para $\theta \in [\alpha, \beta]$ entonces podemos emplear la fórmula para longitud de curvas paramétricas junto a la parametrización

$$C: \begin{cases} x &= f(\theta)\cos\theta \\ y &= f(\theta)\operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad \text{para } \theta \in [\alpha, \beta]$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} L(C) &= \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\operatorname{sen}\theta\right)^2 + \left(f'(\theta)\operatorname{sen}\theta + f(\theta)\cos\theta\right)^2}\, d\theta \\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\operatorname{sen}\theta\right)^2 + \left(f'(\theta)\operatorname{sen}\theta + f(\theta)\cos\theta\right)^2}\, d\theta \\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(f'(\theta)\right)^2 + \left(f(\theta)\right)^2}\, d\theta \end{aligned}$$

EJEMPLOS:

1. Calcular el perímetro de la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$.

   Sol.:

$$\begin{aligned} l &= 2\int_0^\pi \sqrt{a^2(1+\cos(\theta))^2 + a^2\operatorname{sen}^2(\theta)}\, d\theta \\ &= 2a\int_0^\pi \sqrt{2 + 2\cos(\theta)}\, d\theta \\ &= 4a\int_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{2}}\, d\theta \\ &= 4a\int_0^\pi \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \\ &= 4a \cdot 2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^\pi = 8a \end{aligned}$$

2. Hallar la longitud total de la curva $r = a\operatorname{sen}^3\left(\frac{\theta}{3}\right)$.

EJERCICIOS:

1. Encontrar la longitud de las siguiente curvas:

   a) $y=\displaystyle\int_1^x \sqrt{u^3-1}\,du, \qquad 1\le x\le 2$

   b) $x=\ln\sqrt{1+t^2}, \quad y=\arctan t, \qquad$ desde $\quad t=0 \quad$ hasta $\quad t=1$

2. Calcular el perímetro de la región que es interior a las curvas $\quad r=\operatorname{sen}\theta \quad$ y $\quad r=1+\cos\theta$.

3. Sea f una función positiva que no es constante tal que en todo punto de $[0,b]$ la longitud de la gráfica es igual al área de la región bajo ella y sobre el eje X. Hallar la función suponiendo que $f(0)=1$.

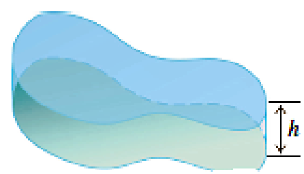
7.2. CLASE 18: Volúmenes de Sólidos

Mediante integración, es posible también calcular volúmenes de solidos, como veremos en esta sección .

7.2.1. Volúmenes por Secciones Transversales

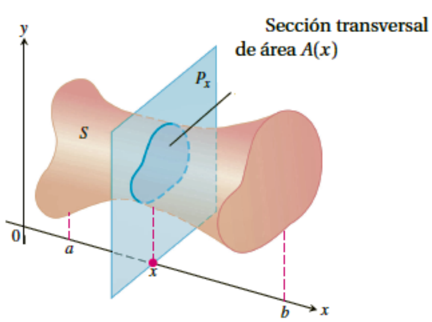
Consideremos un sólido en el espacio, del cual nos interesa calcular el volumen. Vamos a seguir un proceso similar al realizado para definir áreas entre curvas; esta vez utilizaremos ciertos volúmenes conocidos para realizar la aproximación (en el caso de áreas utilizamos rectángulos).

DEFINICIÓN 7.2.1 Diremos que un sólido es un *cilindro recto* cuando está delimitado por dos regiones planas congruentes R_1 y R_2 situadas en planos paralelos y por una superficie lateral generada por un segmento rectilíneo cuyos extremos coinciden con los límites de R_1 y R_2 y que se desplaza de manera que es siempre perpendicular a los planos paralelos. La altura del cilindro recto es la distancia entre los planos y la base es R_1 ó R_2.



OBSERVACIÓN: Si la base es un rectángulo, el cilindro recto obtenido se denomina paralelepípedo rectángulo o recto, y si la base es un círculo se obtiene un cilindro circular recto.

Si el área de la base de un cilindro recto mide A unidades y la altura es h unidades, el volumen del cilindro recto es $V = Ah$. Usaremos esta fórmula para determinar el volumen de sólidos más complejos.



Sea S el sólido del cual queremos calcular el volumen. Trazamos un eje de forma que en cada posición de tal eje se conozca el área de la sección perpendicular del sólido a dicho eje. Denotemos el eje por OX y $A(x)$ el área de la sección. Supongamos además que el sólido se encuentra entre los planos $x = a$ y $x = b$.

Probaremos que si la función de área transversal $A(x)$ es integrable en $[a,b]$ entonces el volumen del sólido es

$$V(S) = \int_a^b A(x)\,dx$$

Primeramente, debemos tener claro que el volumen de un sólido debe satisfacer ciertas propiedades básicas. Si S_1 y S_2 son dos sólidos, denotemos por $V(S_1)$ y $V(S_2)$ sus respectivos volúmenes. Entonces:

- $S_1 \subseteq S_2 \quad \Rightarrow \quad V(S_1) \le V(S_2)$
- $V(S_1 \cap S_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad V(S_1 \cup S_2) = V(S_1) + V(S_2)$

Sea, entonces, $\mathscr{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y para cada i, sean:

- C_i la parte del sólido entre los planos $x = x_{i-1}$ y $x = x_i$,
- $\underline{C_i}$ el cilindro recto de base $m_i(A)$ (ínfimo de $A(x)$ en $[x_{i-1}, x_i]$) y altura $x_i - x_{i-1}$,
- $\overline{C_i}$ el cilindro recto de base $M_i(A)$ (supremo de $A(x)$ en $[x_{i-1}, x_i]$) y altura $x_i - x_{i-1}$

Entonces, $\quad \forall i = 0, \cdots n$:

$$V\left(\underline{C_i}\right) \le V(C_i) \le V\left(\overline{C_i}\right)$$

de donde

$$\sum_{i=1}^{n} V\left(\underline{C_i}\right) \le \sum_{i=1}^{n} V(C_i) \le \sum_{i=1}^{n} V\left(\overline{C_i}\right)$$

y luego

$$s(A, \mathscr{P}) \le V(S) \le S(A, \mathscr{P})$$

Como la partición es arbitraria, concluimos que

$$\underline{\int_a^b} A(x)\,dx \le V(S) \le \overline{\int_a^b} A(x)\,dx$$

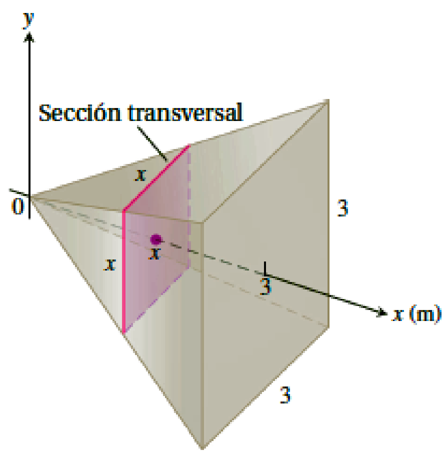
Si A es una función integrable, es razonable entonces definir

$$V(S) = \int_a^b A(x)\,dx$$

que es la fórmula para el cálculo de volúmenes de sólidos por *secciones transversales.*

EJEMPLOS:

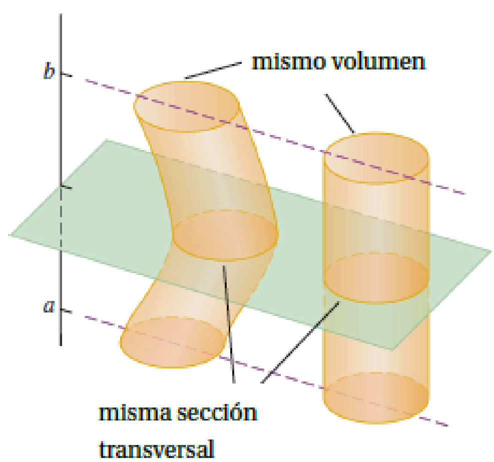
1. Una pirámide de 3 metros de altura tiene una base cuadrada que tiene lado igual a 3. Calcular su volumen.



Si consideramos la sección transversal perpendicular de la pirámide como en la figura, a la altura x desde el vértice, vemos que ésta mide también x. De esta forma, el área de la sección transversal $A(x)$ es x^2. Los límites de integración son 0 y 3. Entonces el volumen de la pirámide es

$$V(P) = \int_0^3 A(x)\,dx = \int_0^3 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = 9 \text{ m}^3$$

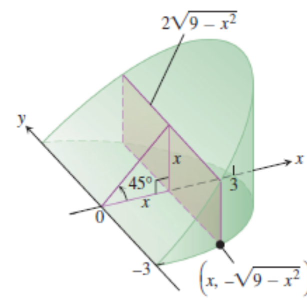
2. El principio de Cavalieri dice que sólidos con igual altitud e idénticas secciones transversales en cada nivel tienen el mismo volumen. Esto sigue de forma inmediata de nuestra definición del volumen puesto que la función área $A(x)$ y el intervalo de integración $[a, b]$ es el mismo para ambos sólidos.



3. Una cuña es extraída desde un cilindro circular de radio 3 por dos planos. Un plano es perpendicular al eje del cilindro y el segundo corta al primer plano en un ángulo de 45° en el centro del cilindro. Encontrar el volumen de la cuña.

El dibujo nos da una sección transversal perpendicular al eje escogido, las secciones son rectángulos de área

$$\begin{aligned} A(x) &= \text{(alto)(ancho)} \\ &= x\left(2\sqrt{9-x^2}\right) \\ &= 2x\sqrt{9-x^2} \end{aligned}$$



los rectángulos recorren desde $x=0$ hasta $x=3$ se sigue:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}\,dx = 18$$

7.2.2. Volúmenes de Sólidos de Revolución

DEFINICIÓN 7.2.2 Un sólido de revolución es un sólido generado mediante la rotación de una región plana alrededor de una recta en el mismo plano.

Calcularemos el volumen de este tipo de sólidos mediante dos métodos: el método de los discos y el método de los cilindros.

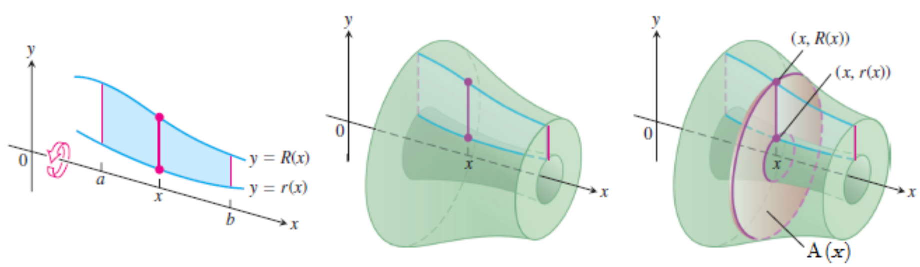
Método de los discos

Suponga que la región plana está limitada por las gráficas de dos funciones $y = R(x)$, $y = r(x)$ y por las rectas $x = a$ y $x = b$. Supongamos además que para $x \in [a, b]$ se cumple $0 \le r(x) \le R(x)$. Esta región gira alrededor del eje X. Note que, en la coordenada x, el área de la región transversal corresponde a

$$A(x) = \text{(área del círculo mayor) - (área del círculo menor)}$$

Además, el mayor radio corresponde a $R(x)$ y el menor a $r(x)$. Luego

$$A(x) = \pi R^2(x) - \pi r^2(x)$$



Así, el volumen está dado por

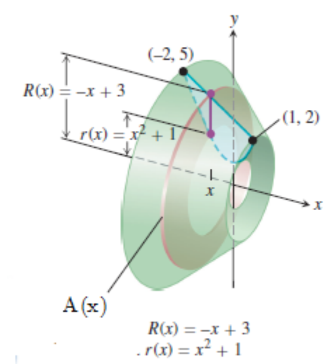
$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \pi \int_a^b \left(R^2(x) - r^2(x)\right) dx$$

Notar que, en caso de que las funciones giren entorno a la recta $y = c$ entonces sigue siendo válida la fórmula

$$A(x) = \text{(área del círculo mayor) - (área del círculo menor)}$$

EJEMPLOS:

1. La región acotada por la curva $y = x^2 + 1$ y la recta $y = -x + 3$ gira alrededor del eje X generando un sólido. Encontrar su volumen.



Primero dibujamos la región ubicamos el mayor y menor radio al eje de rotación en este caso

$$\begin{aligned} R(x) &= -x+3 \\ r(x) &= x^2+1 \end{aligned}$$

buscamos los puntos de intersección de las gráficas para obtener los límites de integración

$$x^2 + 1 = -x + 3$$

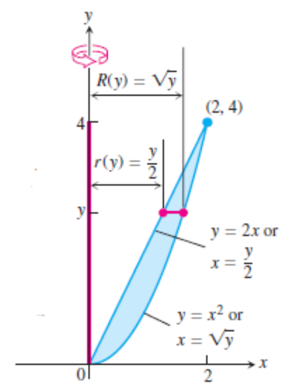
tiene por solución $x = -2$ y $x = 1$ luego calculamos el volumen

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b \left(R^2(x) - r^2(x)\right) dx \\ &= \pi \int_{-2}^{1} \left((-x+3)^2 - \left(x^2+1\right)^2\right) dx \\ &= \frac{117}{5}\pi \end{aligned}$$

2. La región acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 2x$ en el primer cuadrante gira alrededor del eje y para generar un solido. Encuentre su volumen.

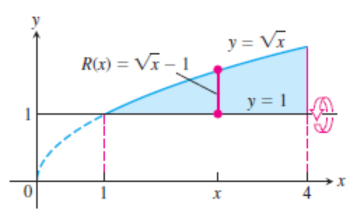
Bosquejamos la región. En este caso conviene mirar las funciones como dependientes de y, el radio mayor es $R(y) = \sqrt{y}$ y el radio menor es $r(y) = y/2$. La recta y la parábola intersectan en $y = 0, y = 4$ se sigue que el volumen del sólido es

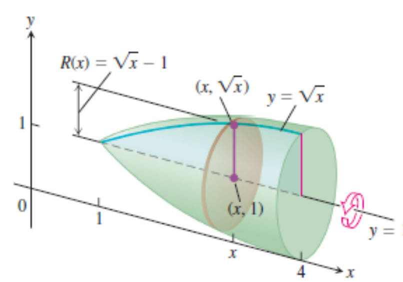
$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 \pi \left(\left(\sqrt{y}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 \right) dy \\ &= \frac{8}{3}\pi \end{aligned}$$



3. Encontrar el volumen del sólido de revolución generado al girar la región acotada por $y = \sqrt{x}$ y las rectas $y = 1, x = 4$ alrededor de la recta $y = 1$. En este caso el radio menor es 0 y el radio mayor es $R(x) = \sqrt{x} - 1$ (esa es la distancia al eje de rotación) se sigue que

$$\begin{aligned} V &= \int_1^4 \pi \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 dx \\ &= \frac{7}{6}\pi \end{aligned}$$

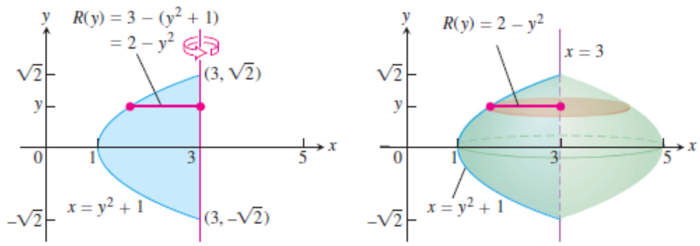




4. Encontrar el volumen del solido de revolución generado al girar la región acotada por la parábola $x = y^2 + 1$ y la recta $x = 3$ alrededor de la recta $x = 3$.

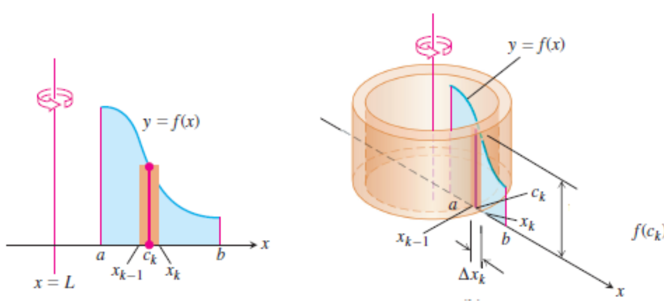
   En este caso es conveniente trabajar con funciones dependientes de y, el mayor radio es $R(y) = 3 - (y^2 + 1)$ y el intervalo de integración es $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ se sigue entonces

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi \left(3 - \left(y^2 + 1\right)\right)^2 dy \\ &= \frac{64}{15}\sqrt{2}\pi \end{aligned}$$



Método de las capas cilíndricas.

Ahora utilizaremos una aproximación diferente del volumen mediante cilindros. Suponga que una región es acotada por el gráfico de una función positiva $y = f(x)$ y el eje X sobre un intervalo finito $[a, b]$. Esta región está a la derecha de la recta $x = L$ (supongamos que $a \geq L$). De esta forma, la región puede tocar la recta pero no pasa a través de ella. Generamos un sólido de revolución rotando tal región alrededor de la recta, como indica la figura:



Sea $\mathscr{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ y sea c_k el punto medio del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Aproximaremos la región mediante rectángulos con bases en esta partición. El rectángulo de altura $f(c_k)$ y base $x_k - x_{k-1}$ rota en torno a la recta $X = L$, generando una capa cilíndrica con volumen

$$\begin{aligned} V_k &= \pi(x_k - L)^2 f(c_k) - \pi(x_{k-1} - L)^2 f(c_k) \\ &= \pi f(c_k)(x_k + x_{k-1} - 2L)(x_k - x_{k-1}) \\ &= 2\pi(c_k - L) f(c_k) \Delta x_k \end{aligned}$$

El volumen es, aproximadamente,

$$V \sim \sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi(c_k - L) f(c_k) \Delta x_k$$

Si la norma de la partición tiende a cero, obtenemos

$$V = \int_a^b 2\pi(x-L)f(x)\,dx$$

Vamos a resumir la fórmula pero poniendo énfasis en su obtención.

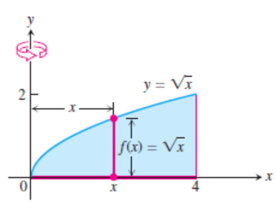
PROPOSICIÓN 7.2.1 El volumen del sólido generado por la rotación de una región plana definida entre $x=a$ y $x=b$ alrededor de una recta $x=L$ que no pasa a través de la región está dada por

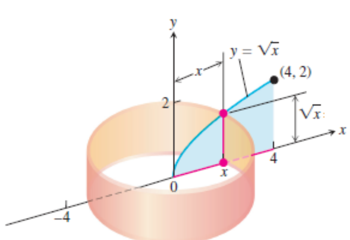
$$V = \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix} \text{Radio de la capa} \\ \text{cilíndrica en } x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{altura de la capa} \\ \text{cilíndrica en } x \end{pmatrix} dx$$

OBSERVACIÓN: Esta fórmula es más general y permite, por ejemplo, considerar el caso en que la altura del rectángulo está limitada por la gráfica de dos funciones.

EJEMPLOS:

1. La región acotada por la curva $y=\sqrt{x}$, el eje X, y la recta $x=4$ gira alrededor del eje y para generar un sólido. Encuentre su volumen.



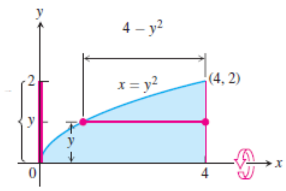


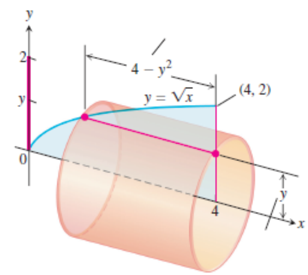
Primero realizamos un gráfico de la región. En un punto de coordenada x trazamos un segmento paralelo al eje de rotación, calculamos la altura y la distancia al eje de rotación. Se sigue que los límites de integración son $x=0$ y $x=4$ luego

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix} \text{Radio de la capa} \\ \text{cilíndrica en } x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{altura de la capa} \\ \text{cilíndrica en } x \end{pmatrix} dx \\ &= \int_0^4 2\pi x \left(\sqrt{x}\right) dx \\ &= \frac{128}{5}\pi \end{aligned}$$

2. La región acotada por la curva $y=\sqrt{x}$ el eje x y la recta $x=4$ gira entorno al eje x para generar un sólido. Encontrar el volumen.

Dibujamos la región y trazamos un segmento paralelo al eje de revolución en un punto x del interior del intervalo calculamos la distancia al eje de rotación y la altura del segmento. En este caso la variable es y y los límites de integración son $a=0$ y $b=2$ se sigue que el volumen del sólido es





$$
\begin{aligned}
V &= \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix} \text{Radio de la capa} \\ \text{cilíndrica en } y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{altura de la capa} \\ \text{cilíndrica en } y \end{pmatrix} dy \\
&= \int_0^2 2\pi\,(y)\left(4-y^2\right) dy \\
&= 8\pi
\end{aligned}
$$

3. Determinar el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar la región limitada por $y=x^2+1$, $y=x+3$ alrededor de la recta $x=3$.

   Aplicamos el método de las capas cilíndricas, buscamos los puntos de intersección de las gráficas

$$x^2+1=x+3$$

   tiene soluciones $x=2$ y $x=-1$ esbozamos una gráfica: Aplicamos la fórmula para volúmenes por capas cilíndricas

$$
\begin{aligned}
V &= \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix} \text{Radio de la capa} \\ \text{cilíndrica en } x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{altura de la capa} \\ \text{cilíndrica en } x \end{pmatrix} dx \\
V &= \int_{-1}^2 2\pi(3-x)\left(x+3-\left(x^2+1\right)\right) dx \\
V &= \frac{45}{2}\pi
\end{aligned}
$$

7.3. CLASE 19: Área de Superficies de Revolución

Una superficie de revolución se genera cuando una curva plana gira alrededor de una recta coplanar. En esta sección determinaremos una fórmula para el área de tales superficies y las calcularemos en varios casos especiales. El área de una superficie general se desarrollará en MAT024, que considera entre sus tópicos, el cálculo integral en varias variables. Es posible mostrar que las superficies de revolución son un caso particular de ese desarrollo general.

Sea C una curva en $\mathbb{R}^2$ dada paramétricamente por $\big(x(t), y(t)\big)$, $t \in [a,b]$ y sea L una recta en $\mathbb{R}^2$ dada por la ecuación $ax + by + c = 0$.

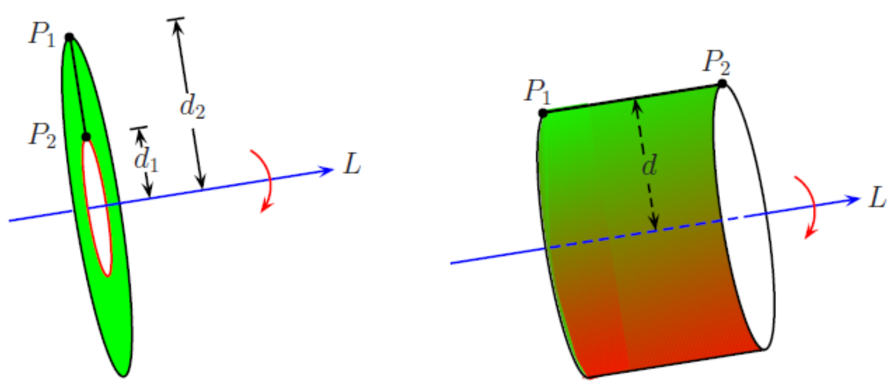
Estudiaremos, en primer lugar, el caso especial en que la curva C es el segmento de recta que une los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$. Supondremos que la recta L no corta el segmento. Sean d_1 y d_2 las distancias de P_1 y P_2 a L respectivamente.

Notemos que si $P_1P_2 \perp L$, entonces la región es un disco (ver figura), cuya área es

$$A(R) = \left|\pi d_1^2 - \pi d_2^2\right|$$

Si $P_1P_2 \parallel L$ entonces $d_1 = d_2 = d$ y la superficie de revolución es un cilindro (ver figura) de radio d y longitud $d(P_1, P_2)$. Se sigue que el área de la superficie es

$$A(R) = 2\pi d\, d(P_1, P_2)$$



Supongamos ahora que no se cumple $P_1P_2 \perp L$ ni $P_1P_2 \parallel L$. Entonces, la superficie es un cono truncado con radios d_1 y d_2, respectivamente. Para encontrar el área de este cono truncado vamos a obtener el área superficial de un cono de lado l y radio de base a. Notemos que se cumple

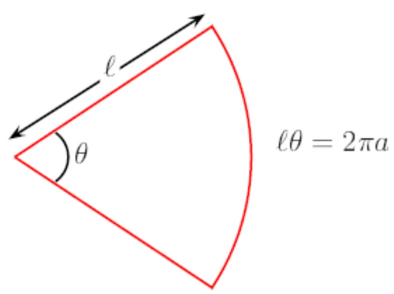
$$\theta\, l = 2\pi a$$

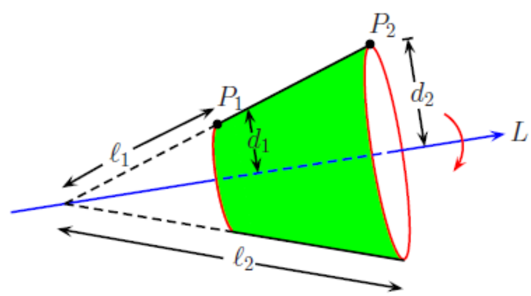
y el área será, por lo tanto,

$$\frac{1}{2}\theta l^2 = \pi l a$$

Ahora, para encontrar el área del cono truncado vamos a restar el área de dos conos: uno de longitud de lado l_1 al que tiene la longitud de lado más largo l_2. Entonces, el área superficial es

$$\begin{aligned} \pi l_2 d_2 - \pi l_1 d_1 &= \pi(l_2 d_2 - l_2 d_1 + l_2 d_1 - l_1 d_1) \\ &= \pi(d_2 + d_1)(l_2 - l_1) \\ &= \pi(d_1 + d_2) d(P_1, P_2) \end{aligned}$$





Así, si la superficie de revolución está generada por un segmento de recta, vemos que es posible reducir el cálculo de su área a expresiones conocidas.

Consideremos ahora el **caso general** de una curva definida paramétricamente por $\big(x(t), y(t)\big)$, con $t \in [a,b]$. Sea $\mathscr{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición de $[a,b]$. Realizaremos una aproximación de la superficie de revolución generada por la curva $\big(x(t), y(t)\big)$ para cada subintervalo $t \in [t_{i-1}, t_i]$, en el que aproximaremos esta curva por el segmento $P_{i-1}P_i$, donde $P_i = \big(x(t_i), y(t_i)\big)$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Consideramos la nueva curva, aproximación de la original, formada por la unión de todos estos segmentos (ver figura más abajo). Al generar la superficie de revolución, obtenemos la suma de las áreas de estas aproximaciones, que es

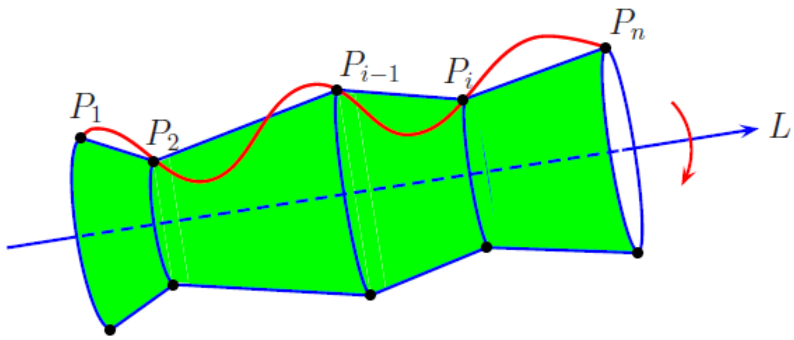
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \pi(d_{i-1} + d_i)\lambda_i$$

donde d_i es la distancia desde P_i a L y λ_i es la longitud del segmento $P_{i-1}P_i$. Note que para cada i tenemos

$$d_i = \frac{\big|ax(t_i) + by(t_i) + c\big|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

y

$$\lambda_i = \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + \big(y(t_i) - y(t_{i-1})\big)^2}$$



Suponiendo que las funciones $x(t)$ e $y(t)$ son derivables, es posible aplicar el teorema del valor medio para encontrar, en cada subintervalo, puntos $s_i, u_i \in\,]t_{i-1}, t_i[$ tales que

$$\begin{aligned}
\lambda_i &= \sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+\left(y(t_i)-y(t_{i-1})\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+\left(y(t_i)-y(t_{i-1})\right)^2}{(t_i-t_{i-1})^2}}\,(t_i-t_{i-1}) \\
&= \sqrt{(x'(s_i))^2+\left(y'(u_i)\right)^2}\,\Delta t_i
\end{aligned}$$

Entonces las sumas $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_{i-1}\lambda_i$ y $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i\lambda_i$ pueden considerarse como aproximaciones de la integral

$$\int_a^b \frac{\left|ax(t)+by(t)+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{(x'(t))^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt$$

Estas consideraciones nos llevan a la siguiente definición de área de superficie de revolución:

DEFINICIÓN 7.3.1 Sea C una curva suave dada por $\left(x(t), y(t)\right)$, $t \in [a,b]$. Considere una recta $L: ax+by+c=0$ que **no** corta la curva C. Para $t \in [a,b]$, consideremos la distancia desde el punto $\left(x(t), y(t)\right)$ a la recta L dada por

$$\rho(t) = \frac{\left|ax(t)+by(t)+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Entonces, el área de la superficie de revolución obtenida al rotar la curva C en torno a la recta L está dada por

$$A(S) = 2\pi\int_a^b \rho(t)\sqrt{(x'(t))^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt$$

7.3.1. Casos particulares importantes:

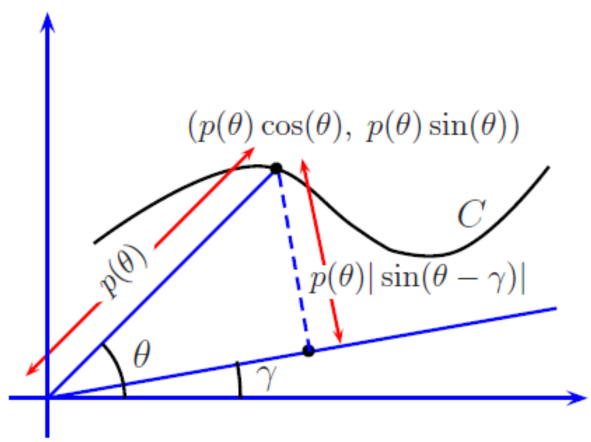
1. Si consideramos el gráfico de la función $y = f(x)$ con $x \in [a, b]$ y la rotación se realiza en torno al eje x, entonces el área de superficie de revolución está dada por

$$A(S) = 2\pi \int_a^b \left|f(x)\right| \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

2. Si una curva C está dada en coordenadas polares por $r = p(\theta)$ con $\theta \in [\alpha, \beta]$ y L es una recta que parte desde el origen dada por $\theta = \gamma$ que no corta C entonces el área de la superficie de revolución está dada por

$$A(S) = 2\pi \int_\alpha^\beta p(\theta) \text{sen}\,(\theta - \gamma) \sqrt{(p(\theta))^2 + (p'(\theta))^2}\, d\theta$$

donde la distancia desde el punto $(p(\theta)\cos(\theta), p(\theta)\text{sen}\,(\theta))$ a la recta está dada por $p(\theta)\text{sen}\,(\theta - \gamma)$ para $\theta \in [\alpha, \beta]$.



EJEMPLOS:

1. Considere el segmento de la recta $(x/a) + (y/h) = 1$ para $x \in [0, a]$ donde $a, h > 0$. Entonces la superficie del cono que se obtiene al rotar este segmento en torno al eje y está dada por

$$\begin{aligned} A(S) &= 2\pi \int_0^h a\left(1 - \frac{y}{h}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2}\, dy \\ &= 2\pi a \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{h}\left(h - \frac{h}{2}\right) \\ &= \pi a \sqrt{a^2 + h^2} \end{aligned}$$

como era de esperar.

2. Deduzca la fórmula $A = 4\pi r^2$ para el área de una esfera de radio r.

   La esfera puede considerarse como generada por la semicircunferencia

   $$x = r\cos t, \qquad y = r\operatorname{sen} t, \qquad t \in [0,\pi]$$

   al ser rotada en torno del del x.

   Luego,

   $$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi} 2\pi r \operatorname{sen} t \sqrt{(-r\operatorname{sen} t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt \\ &= 2\pi r^2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen} t\, dt \\ &= 2\pi r^2 (-\cos t)\Big|_0^{\pi} = 2\pi r^2(1-(-1)) = 4\pi r^2 \end{aligned}$$

3. Considere el elipsoide S obtenido al rotar la elipse $\left(x^2/a^2\right) + \left(y^2/b^2\right) = 1$ en torno al eje x. Determine el área de este elipsoide.

   Consideramos la curva

   $$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad x \in [-a,a]$$

   Entonces, el área está dada por

   $$\begin{aligned} A(S) &= 2\pi \int_{-a}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2\left(a^2-x^2\right)}}\, dx \\ &= \frac{2\pi b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 + \frac{\left(b^2-a^2\right)x^2}{a^2}}\, dx \end{aligned}$$

   Si $a < b$ entonces pongamos $c = \sqrt{b^2-a^2}/a$ y así

   $$\begin{aligned} A(S) &= \frac{2\pi b}{a} 2a \int_0^{a} \sqrt{1 + \left(\frac{cx}{a}\right)^2}\, dx \\ &= \frac{4\pi ab}{c}\int_0^{c}\sqrt{1+t^2}\, dt \\ &= \frac{2\pi ab}{c}\left[c\sqrt{1+c^2} + \ln\left(c + \sqrt{1+c^2}\right)\right] \end{aligned}$$

   En cambio, si $a > b$ entonces ponemos $c = \sqrt{a^2-b^2}/a$ y la integral es

   $$\begin{aligned} &\frac{2\pi b}{a} 2a \int_0^{a}\sqrt{1 - \left(\frac{cx}{a}\right)^2}\, dx \\ &= \frac{4\pi ab}{c}\int_0^{c}\sqrt{1-t^2}\, dt \\ &= \frac{2\pi ab}{c}\left(c\sqrt{1-c^2} + \operatorname{arcsen} c\right) \end{aligned}$$

4. Considere el toro S obtenido al rotar la circunferencia $(x-a)^2+y^2=b^2$ con $0<b<a$ en torno al eje y. Encontrar el área de la superficie del toro.

   Usamos la parametrización de la circunferencia dada por

$$x(t)=a+b\cos t, \qquad y(t)=b\,\mathrm{sen}\, t, \qquad t\in[-\pi,\pi]$$

   Luego

$$\begin{aligned} A(S) &= 2\pi\int_{-\pi}^{\pi}(a+b\cos t)\sqrt{(-b\,\mathrm{sen}\, t)^2+(b\cos t)^2}\,dt \\ &= 2\pi b\int_{-\pi}^{\pi}(a+b\cos t)\,dt \\ &= 4\pi^2 ab \end{aligned}$$

EJERCICIOS:

1. Calcular el área obtenida al rotar un arco de la cicloide

$$\begin{aligned} x &= a(t-\mathrm{sen}\, t) \\ y &= a(1-\cos t) \end{aligned}$$

   alrededor de la tangente a la curva en su punto más alto.

2. Encontrar al área de la superficie de revolución obtenida al rotar la gráfica de $y=x^2$ para $x\in[0,1]$ en torno a la recta $x+y=2$.

3. Calcular el área de un espejo parabólico de altura a y diámetro $8a$.

7.4. CLASE 20: Aplicaciones Físicas

7.4.1. Centro de Masa

DEFINICIÓN 7.4.1 Consideremos un conjunto de n partículas situadas en puntos $P_1, P_2, \cdots, P_n$ en un sistema de coordenadas cartesiano en el espacio. El centro de masa del sistema de partículas es el punto del espacio de coordenadas $P_{CM} = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ definido por:

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad \overline{y} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad \overline{z} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_i m_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

donde

m_i : masa de la $i-$ésima partícula

$(x_i, y_i, z_i) = P_i, \quad i = 1, \cdots, n$ es decir, son las respectivas coordenadas de P_i.

Es decir, el centro de masa de un sistema de partículas es, intuitivamente, el punto del espacio donde podría considerarse que se encuentra una partícula *representativa* del sistema y su distribución.

7.4.2. Centroide

El concepto de centroide es una generalización del concepto de centro de masa. Para introducir esta idea para un objeto geométrico vamos a generalizar lo visto arriba, aplicándolo a una función cualquiera. Recordemos la noción de promedio de una función. Dado un $n \in \mathbb{N}$ y una función $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$, el promedio de los valores de f en los puntos $1, 2, \ldots, n$ está dado por

$$\text{Prom}(f) = \frac{f(1) + f(2) + \cdots + f(n)}{n}$$

Considere ahora una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, ¿ Cómo podemos definir el promedio de f? Una posible definición, basada en una extensión de lo anterior, es

$$\text{Prom}(f) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{f(1) + f(2) + \cdots + f(n)}{n} \right)$$

si tal límite existe.

Considere ahora el intervalo cerrado $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ y una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. ¿Cómo podemos definir el promedio de f? Supongamos que

$$\mathscr{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

es una partición de $[a, b]$ y escogemos $s_i \in]x_{i-1}, x_i[$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Si f asume el valor $f(s_i)$ en todo el intervalo $]x_{i-1}, x_i[$ entonces podríamos definir

$$\begin{aligned}
\text{Prom}(f) &= \frac{f(s_1)(x_1-x_0)+\cdots f(s_n)(x_n-x_{n-1})}{(x_1-x_0)+\cdots+(x_n-x_{n-1})} \\
&= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(s_i)(x_i-x_{i-1})
\end{aligned}$$

Si f es integrable en $[a,b]$ entonces cuando $n\to\infty$ lo anterior nos conduce a

$$\text{Prom}(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Los promedios ponderados aparecen cuando deseamos asignar más o menos importancia a algunos de los valores que toma la función. Dado $n\in\mathbb{N}$ y $f:\{1,2,\ldots,n\}\to\mathbb{R}$, sean $w(1), w(2),\ldots,w(n)$ números positivos tales que $w(1)+w(2)+\cdots+w(n)\neq 0$. Si decidimos asignar los *pesos* $w(1), w(2),\ldots,w(n)$ a los valores $f(1), f(2),\ldots,f(n)$ respectivamente, entonces el promedio ponderado de f respecto a esos pesos es

$$\text{Prom}(f) = \frac{w(1)f(1)+w(2)f(2)+\cdots+w(n)f(n)}{w(1)+w(2)+\cdots+w(n)}$$

Con esto en mente damos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 7.4.2 Una función integrable $w:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una *función de peso* si es no negativa y $W=\int_a^b w(x)\,dx\neq 0$. Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función integrable y $w:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función de peso, entonces el *promedio ponderado* de f con respecto a w está definido por

$$Av\,(f;w) = \frac{\displaystyle\int_a^b w(x)f(x)\,dx}{W} = \frac{\displaystyle\int_a^b w(x)f(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b w(x)\,dx}$$

Un centroide de un conjunto de puntos, es un punto cuyas coordenadas son promedios ponderados de la correspondiente funciones coordenadas definidas en el conjunto. De esta forma la coordenada x de un centroide de un subconjunto $D\subseteq\mathbb{R}^3$ es el promedio ponderado de la función $f:D\to\mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y,z)=x$.

DEFINICIÓN 7.4.3 (Centroide de una curva) Sea C la curva plana suave dada por las ecuaciones $(x(t),y(t))$, $t\in[a,b]$. Se define el centroide de la curva C como el punto de coordenadas $(\overline{x},\overline{y})$ dadas por:

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{\int_a^b x\,ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b x(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt}{\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt} \\
\overline{y} &= \frac{\int_a^b y\,ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt}{\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt}
\end{aligned}$$

DEFINICIÓN 7.4.4 (Centroide de una región plana) Considere funciones $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas con $f_1(x) \leq f_2(x)$ para $x \in [a,b]$ y la región plana dada por

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ y } f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\right\}$$

se define el centroide de R como el punto $(\overline{x}, \overline{y})$ dado por

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b x\, dA}{\int_a^b dA} = \frac{\int_a^b x\left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx}{\int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx}$$

$$\overline{y} = \frac{\int_a^b \left(\frac{f_2(x)+f_1(x)}{2}\right)\left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx}{\int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx}$$

OBSERVACIÓN: Es importante notar que si la región es simétrica respecto al eje Y entonces la coordenada $\overline{x}$ es cero, y, si es simétrica respecto al eje X, la coordenada $\overline{y}$ es cero.

EJEMPLOS:

1. Hallar el centro de masa de una delgada lámina semicircular (es decir, de ancho despreciable), con distribución uniforme de masa, consistente en el semidisco dado por

$$x^2 + y^2 \leq 1, \qquad y \geq 0$$

Solución: Sea $\delta =$ densidad superficial de masa de la lámina $=$ cte.

Notamos que $\overline{x} = 0$. Para calcular $\overline{y}$, notemos que:

$$m = \delta \cdot \frac{\pi m \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi\delta}{2}$$

Luego:

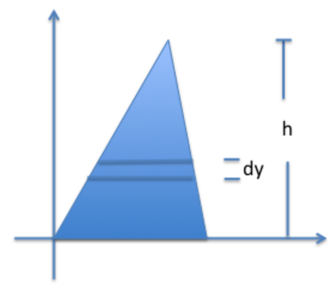
$$\overline{y} = \frac{2\displaystyle\int_0^1 y \cdot \delta\sqrt{1-y^2}\, dy}{\frac{\pi\delta}{2}} = \frac{-(2/3)(1-y^2)^{(3/2)}}{\frac{\pi}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3\pi}$$

$$\therefore \qquad P_{CM} = \left(0, \frac{4}{3\pi}\right)$$

2. Determinar el centroide de un triángulo.

   Solución:

   Ubicamos el triángulo en el plano cartesiano, como indica la figura. Si b es la longitud de la base y s es la longitud aproximada de la franja de ancho dy, entonces:

$$dA = s\,dy$$

   Por semejanza de triángulos:

$$\frac{s}{b} = \frac{h-y}{h}$$

   Luego:

$$\overline{y} = \frac{\int_0^h y\left(\frac{b}{h}(h-y)\right)dy}{\frac{1}{2}bh} = \frac{h}{3}$$

   Ahora deberíamos encontrar $\overline{x}$. Pero, el cálculo anterior indica que el centroide está ubicado en un punto cuya distancia a la base es un tercio de la altura.

3. Determinar el centroide de un sector circular.

   Solución:

4. La región formad por las rectas $x = 0$, $y = 2a$ y la curva $y^2 = 4ax$ se rota en torno al eje y. Encontrar el centroide del volumen de revolución resultante.

   Solución:

7.4.3. Momento y Momento de Inercia

DEFINICIÓN 7.4.5 Consideremos un conjunto de n partículas (o masas puntuales) situadas en puntos $P_1, P_2, \cdots, P_n$ en un sistema de coordenadas cartesiano en el espacio. El momento de inercia I del sistema de partículas respecto de un eje dado se define por:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2$$

donde

m_i : masa ubicada en el punto P_i

$R_i, \quad i = 1, \cdots, n$ distancia desde P_i al eje dado.

OBSERVACIÓN: El momento de inercia se puede interpretar como la inercia de una partícula respecto a la rotación.

EJEMPLOS:

1. Considere una delgada lámina de un material que cubre exactamente la región acotada por las curvas

$$y = x^2, \qquad x = 2, \qquad y = 0$$

Encontrar el momento de inercia I_y de esta lámina respecto del eje y, si la densidad de masa en un punto (x, y) es $\sqrt{x}$.

Solución: Una franja de ancho dx tiene área aproximada $x^2 dx$ u una densidad constante $\sqrt{x}$. Luego, la masa de la franja de material es, aproximadamente,

$$\sqrt{x}x^2 dx = x^{5/2} dx$$

La distancia al eje y es igual a x, de donde, multiplicando la expresión anterior por el cuadrdo de la distancia, obtenemos

$$x^2 x^{5/2} dx$$

Sumando los momentos de todas las franjas sobre el intervalo $[0, 2]$, y tomando límite cuando $dx \to 0$:

$$I_y = \int_0^2 x^2 x^{5/2} dx = \int_0^2 x^{9/2} dx = \frac{2}{11} x^{11/2} \Big|_0^2 = \frac{64}{11}\sqrt{2}$$

2. Determinar el momento de inercia respecto de un diámetro de un disco circular homogénero delgado de masa m y espesor t.

Solución: Consideremos el disco de radio R centrado en el sistema de coordenadas. Una franja de ancho dy tiene una masa igual a $\dfrac{m}{\pi R^2} \cdot 2x\, dy$, y su momento de inercia respecto al eje x es:

$$y^2 \frac{m}{\pi R^2} \cdot 2x\, dy$$

Luego,

$$I_x = \frac{2m}{\pi R^2} \int_{-R}^{R} y^2 \sqrt{R^2 - y^2} dy$$

$$= \frac{2m}{\pi R^2} \left(-\frac{x}{4} \sqrt{(R^2 - x^2)^3} + \frac{R^2}{8} \left(x\sqrt{R^2 - x^2} \right) + R^2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{R} \right) \Big|_{-R}^{R}$$

$$= \frac{2m}{\pi R^2}\left(\frac{R^2}{8}(R^2\cdot\frac{\pi}{2} - \mathbb{R}^2(-\frac{\pi}{2})\right) = \frac{mR^2}{4}$$

3. En el ejemplo anterior, determine el momento de inercia con respecto al eje z, perpendicular al disco.

   Solución: Claramente:

$$I_z = \int r^2 dm = \int (x^2+y^2)dm = I_x + I_y = \frac{mR^2}{4} + \frac{mR^2}{4} = \frac{mR^2}{2}$$

4. Hallar el momento de inercia de un cono circular recto de masa m, en torno de su eje.

   Solución: Ubicamos el cono con vértice en el origen y hacemos coincidir el eje del mismo con el eje x. Elegimos un a delgada lámina perpendicular al eje, y supongamos una densidad igual a δ. El momento de inercia de la lámina respecto al eje x es

$$\frac{1}{2}(\text{masa})y^2 = \frac{1}{2}(\delta\pi y^2 dx)y^2$$

   Como $y = \dfrac{Rx}{h}$, se tiene que:

$$I_x = \int_0^h \frac{1}{2}(\delta\pi y^2 dx)y^2 = \int_0^h \frac{1}{2}\left(\delta\pi\left(\frac{Rx}{h}\right)^4\right)dx = \frac{1}{10}\delta\pi R^4 h$$

   Pero $\quad m = \dfrac{1}{3}\delta\pi R^2 h \qquad \Rightarrow \qquad \delta = \dfrac{3m}{\pi R^2 h} \qquad \Rightarrow$

$$I_x = \frac{3}{10}mR^2$$

7.5. CLASE 21: Teorema de Pappus y otras

7.5.1. Teorema de Pappus

TEOREMA 7.5.1 (Teorema de Pappus para superficies) Sean C una curva suave y L una recta (que no corta C) en $\mathbb{R}^2$. Si C rota entorno a L entonces el área de la superficie generada es igual al producto de la longitud de la curva por la distancia recorrida por el centroide.

La demostración es simplemente multiplicar las expresiones involucradas

$$A(S) = 2\pi \int_a^b \rho(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

el centroide es $(\overline{x}, \overline{y})$

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{\int_a^b x(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt}{\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt}, \frac{\int_a^b y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt}{\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt} \right)$$

luego la distancia recorrida por el centroide es

$$\begin{aligned} 2\pi \frac{|a\overline{x} + b\overline{y} + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} &= \frac{2\pi}{l(C)\sqrt{a^2+b^2}} \left| \int_a^b (ax(t) + by(t) + c) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt \right| \\ &= \frac{2\pi}{l(C)} \int_a^b \rho(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt \end{aligned}$$

entonces

$$l(C)\left(2\pi \frac{|a\overline{x} + b\overline{y} + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = 2\pi \int_a^b \rho(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = A(S)$$

TEOREMA 7.5.2 (Teorema de Pappus para volúmenes de sólidos de revolución) El volumen de un sólido de revolución obtenido al rotar la región plana R entorno a una recta L es igual al área de la región plana multiplicada por la distancia recorrida por el centroide de la región.

EJEMPLOS:

1. Calculemos el centroide de un semicircunferencia de radio a. La parametrizamos por $t \in [0,\pi]$

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos t \\ y(t) &= a\operatorname{sen}(t) \end{aligned}$$

se sigue

$$l(C) = \int_0^{\pi} \sqrt{(-a\operatorname{sen} t)^2 + (a\cos t)^2}\, dt = \pi a$$

entonces

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{a\pi}\int_0^{\pi} a(\cos t)\, a\, dt = 0 \\ \overline{y} &= \frac{1}{a\pi}\int_0^{\pi} a(\operatorname{sen} t)\, a\, dt = \frac{2a}{\pi} \end{aligned}$$

el centroide es $\left(0, \frac{2a}{\pi}\right)$ que no esta en la curva. Note que por la simetría sabiamos que la coordenada x era nula.

2. Encontrar el área de la superficie obtenida el rotar el semicírculo $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ $x \in [-a, a]$ entorno a la recta $x + y = 2a$. Por el teorema de Pappus se tiene

$$\begin{aligned} A(S) &= 2\pi d\left(\left(0, \frac{2a}{\pi}\right), x + y = 2a\right) l(C) \\ &= 2\pi\left(\frac{\left|\frac{2a}{\pi} - 2a\right|}{\sqrt{2}}\right)\pi a \\ &= 2\sqrt{2}\pi a^2(\pi - 1) \end{aligned}$$

3. Encontrar el volumen del toro obtenido al rotar el círculo $(x-a)^2 + y^2 \leq b^2$ $(0 < b < a)$ entorno al eje Y.Desarrollo: Utilizando Pappus el centroide de la región es $(a, 0)$ se sigue

$$V = (2\pi a)\left(\pi b^2\right) = 2\pi^2 a b^2$$

7.5.2. Fuerza, Trabajo, Presión,...

7.6. Ejercicios de Controles y Certámenes