Probabilidad

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas

Docentes: Francisco Gómez, Gabriela Valdés, Natalia Henríquez.
Coordinadora: Natalia Henríquez.C

Número	Nombre de la Unidad	Duración en Semanas
2	**Probabilidad y Variables aleatorias**	**2.5**
Contenidos	**Indicadores de desempeño**	**Bibliografía por unidad**
Métodos de conteo	2.1 Identifica y utiliza los distintos mecanismos para determinar el número de elementos de un conjunto, tales como: • Permutaciones • Arreglos o variaciones • Combinaciones. 2.2 Comunica de forma oral y escrita resultados relevantes de un problema rutinario y/o afín a las ciencias básicas.	**Probabilidad y Estadística (Walpole)**
Axiomas y propiedades de probabilidades conjuntistas	2.3 Utiliza los axiomas para definir y/o identificar una función de probabilidad. 2.4 Utiliza las propiedades de probabilidad para determinar la probabilidad de un evento de un espacio muestral. 2.5 Calcula probabilidad total y condicional de eventos de un espacio muestral. 2.6 Aplica teorema de Bayes para determinar la probabilidad condicional de eventos.	**Probabilidad y Estadística (Walpole)**

INTRODUCCIÓN

El cálculo de probabilidades tiene su origen en la época pos renacentista, nace del estudio de los juegos de azar, del deseo de poder cuantificar las posibilidades de ganar o perder que se tienen ante una mano de naipes, el lanzamiento de un dado o lanzar una moneda al aire. Sin embargo este interés lúdico inicial trascendió en la historia del pensamiento, pues un análisis más fino de cualquier situación real nos lleva a considerar una porción de azar (imponderables) que está presente en la misma. Tanto es así que de lo único que tenemos seguridad es de nuestra muerte "biológica", la mayoría de las veces cuando decimos que algo será "seguro" en realidad estamos diciendo que es altamente probable que ocurra.

Al estudiar la realidad podemos distinguir dos tipos de experimentos, los determinísticos y los probabilísticos:

Los experimentos determinísticos, son aquellos que tienen sólo un resultado posible además este es predecible. Por ejemplo: si el experimento consiste en soltar una piedra desde lo alto de un edificio y observar el sentido del movimiento, el resultado único posible es que la piedra caiga en posición vertical hacia el suelo.
Los experimentos probabilísticos son aquellos que tienen más de un resultado posible y cada resultado no es predecible. Por ejemplo: lanzar una moneda al aire y observar qué lado muestra después de caer. Notemos que si bien sabemos de antemano que la moneda puede mostrar " cara" o " sello", no podemos predecir qué saldrá y el resultado lo conoceremos sólo después de que la moneda haya finalizado su movimiento.

Dado un experimento cualquiera, que denotaremos por E, denotado por Ω el **ESPACIO MUESTRAL** el que representa el conjunto de todos los posibles resultados de E. Como ejemplo tenemos:

a) E= Se lanza una moneda al aire $\Omega = \{cara, sello\}$
b) E=Se lanza un dado $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
c) E= Sexo de una persona $\Omega = \{masculino, femenino\}$
d) E= Pinta de la carta en un mazo inglés $\Omega = \{trebol, corazón, pica, diamante\}$

Se llama **suceso o evento** a cualquier subconjunto de Ω, los sucesos se denotan por letras mayúsculas. El hecho que A sea un suceso de Ω, lo denotamos por $A \subset \Omega$. Observamos inmediatamente que el conjunto ϕ es un suceso, $\phi \subset \Omega$ y le llamamos suceso vacío o suceso imposible.

Si jugamos cara y sello y previamente se nos pregunta por la "probabilidad" de sacar "cara", seguramente que es de 50%, pues hay sólo dos posibles resultados, pero además hemos supuesto que la posibilidad de obtener cara es idéntica a la de obtener sello, este concepto se denomina **"EQUIPROBABILIDAD**". En lenguaje técnico diremos que los resultados cara y sello son equiprobables, obviamente si es que la moneda que se lanza no está cargada.

Se llama medida de un conjunto a algún número que nos indique el tamaño del conjunto, la medida del conjunto A se denota por $m(A)$. Si el conjunto es finito y se pueden contar sus elementos, la medida natural que aparece es $m(A)$= "número de elementos del conjunto".

Por ejemplo si $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ entonces $m(\Omega) = 6$.

Si el conjunto es un intervalo de la recta real o una porción del plano cartesiano puede considerarse como $m(A)$=" longitud del intervalo" o $m(A)$= "área de la porción del plano cartesiano" según sea el caso.

ALGUNAS DEFINICIONES PARA CONTAR

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL CONTEO

Si algún suceso puede ocurrir de n_1 maneras diferentes, y siguiendo este suceso, un segundo suceso puede ocurrir de n_2 maneras diferentes y así sucesivamente entonces el número de maneras en que los sucesos puedan ocurrir está dado por $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$.

Ejemplo1. Supongamos que una placa de automóvil contiene dos letras seguidas de tres dígitos con el primer dígito diferente de cero. ¿Cuántas placas diferentes pueden fabricarse?

$27 \cdot 27 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = 656100$ placas diferentes se pueden fabricar.

Ejemplo2. Suponga que tiene que elegir el sabor y el tipo de recipiente para un helado que comprará. El helado puede venir en cono o en taza y tiene de chocolate, frutilla y vainilla. Entonces puede hacer el siguiente diagrama para ver las posibilidades que tiene.

```
               / tasa de chocolate
   / chocolate <
  /            \ cono de chocolate
 /
/        / tasa de fresa
<-- fresa <
\        \ cono de fresa
 \
  \           / tasa de vainilla
   \ vainilla <
              \ cono de vainilla
```

También lo puede ordenar de otra forma

```
           / tasa de chocolate
          /
   / tasa <-- tasa de fresa
  /       \
 /         \ tasa de vainilla
/
<
\
 \         / cono de chocolate
  \       /
   \ cono <-- cono de fresa
          \
           \ cono de vainilla
```

De cualquier manera, la cantidad de opciones que tiene son 6=3*2=2*3

PERMUTACIONES

Cualquier arreglo de un conjunto de n objetos en un orden dado se llama “permutación” de los objetos (tomados todos al mismo tiempo). Cualquier arreglo de cualquier $r \leq n$ de estos objetos en un orden dado se llama r-permutación o “arreglo” de n objetos tomados de a “r” al mismo tiempo.

El número de permutaciones de n objetos es $n!$ (número factorial)

Por ejemplo: ¿Cuántos números de 5 cifras diferentes se puede formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5? 5!=120

El número de permutaciones de r objetos tomados de n objetos totales es $\dfrac{n!}{(n-r)!}$

(se asume que los n objetos son distintos)

Ejemplo: ¿De cuántas maneras se pueden dar primer y segundo premio entre 10 personas? $\dfrac{10!}{(10-2)!} = \dfrac{10!}{8!} = 90$

PERMUTACIONES CON REPETICIONES

El número de permutaciones de n objetos de los cuales hay n_1 iguales, n_2 iguales, ..., n_r iguales es: $\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_r!}$

COMBINACIONES

Supongamos que tenemos una colección de n objetos. Una combinación de estos **n** objetos tomados de r a la vez es cualquier selección de r de los objetos, donde el orden no se tiene en cuenta y se calcula.

$$C_r^{\ n} = \binom{n}{r} \qquad \text{(número combinatorio)}$$

DEFINICIÓN CLÁSICA DE PROBABILIDAD, PROBABILIDAD DE LA UNIÓN, SUCESOS EXCLUYENTES, PROBABILIDAD CONDICIONAL, PROBABILIDAD TOTAL Y FÓMULA DE BAYES.

a) Interpretación de Probabilidad clásica:

Se define la probabilidad de que un evento ocurra como:

Número de resultados en los que se presenta el evento / número total de resultados posibles.

La probabilidad clásica, es argumentada por el principio de razón y suficiencia que establece que cada resultado elemental es equiprobable (simétrico). Si utilizamos objetos como monedas no alteradas, dados no cargados y mazos de barajas normales, entonces sin necesidad de lanzar una moneda, un dado o tomar una carta, podemos evaluar las probabilidades.

La probabilidad clásica supone también una especie de construcción de simetría en el mundo, no obstante existen situaciones en las cuales ésta no está presente o no se da la equiprobabilidad.

Ejemplo 1: La probabilidad que llueva un día de julio en Santiago, es mayor que la probabilidad que no llueva.

Ejemplo 2: Supongamos que tenemos una urna con 20 pelotas de las cuales 18 son rojas y 2 verdes.

a) ¿Cuál es la probabilidad de elegir una pelota verde en el primer intento?

$$P(V) = \frac{2}{2+18} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 10\%$$

¿Cuál es la probabilidad de elegir una pelota roja en el primer intento?

$$P(R) = \frac{18}{2+18} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10} = 90\%$$

"Todos estos cálculos se desarrollan sin realizar experimento alguno, que es la aplicación directa de la definición de Laplace".

b) Interpretación de Probabilidad frecuentista:

Corresponde a la frecuencia relativa o fracción de veces que se observa de un evento durante un gran número de intentos que se repiten en idénticas condiciones.

Este método utiliza la frecuencia relativa de las observaciones pasadas de un evento como una probabilidad. Determinamos qué tan frecuente ha sucedido algo en el pasado y usamos esa cifra para aproximar la probabilidad de que suceda de nuevo en el futuro.

Cuando utilizamos el planteamiento de frecuencia relativa para establecer probabilidades, el número que obtenemos como probabilidad adquirirá mayor precisión a medida que aumentan las observaciones.

"La probabilidad de un suceso es el límite al que converge la proporción de repeticiones en que el suceso tiene lugar".

Ejemplos:

1. Consideremos el lanzamiento de 1 moneda en 10 ocasiones, si se obtuvo 8 CARAS y 2 SELLOS. ¿Cuál es la probabilidad en cada caso?

   La probabilidad es de 8/10 y 2/10 respectivamente.

2. Se lanza un dado 18000 veces; se obtienen los resultados resumidos en la siguiente tabla, agrupados de acuerdo al número de tiradas.

RESULTADOS POSIBLES DEL DADO

Nº de tiradas	1	2	3	4	5	6
20	5	4	2	4	2	3
60	7	6	6	11	9	21
300	47	39	44	56	42	72
600	89	84	82	111	104	130
1200	174	166	185	203	207	265
2400	362	345	387	396	407	503
6000	946	885	1002	993	941	1233
18000	2911	2851	2833	2766	2806	3833

Calcule las probabilidades frecuentistas para la primera, cuarta y novena fila para cada uno de los resultados del dado. ¿Qué deducción se puede plantear a partir del análisis de estos resultados? ¿Se tienden a estabilizar estas probabilidades a medida que el número de lanzamientos crece?. La ley que avala esta tendencia, se denomina "Ley de los grandes números".

c) Interpretación Subjetiva de Probabilidad.

Las probabilidades subjetivas están basadas en las creencias de las personas que efectúan la estimación de probabilidad.

La probabilidad subjetiva se puede definir como la probabilidad asignada a un evento por parte de un individuo, basada en la evidencia que se tenga disponible.

Esa evidencia puede presentarse en forma de frecuencia relativa de presentación de eventos pasados o puede tratarse simplemente de una creencia meditada.

Las valoraciones subjetivas de la probabilidad permiten una más amplia flexibilidad que los otros dos planteamientos. Los tomadores de decisiones pueden hacer uso de cualquier evidencia que tengan a mano y mezclarlas con los sentimientos personales sobre la situación.
Las asignaciones de probabilidad subjetiva se dan con más frecuencia cuando los eventos se presentan sólo una vez o un número muy reducido de veces.
Como casi todas las decisiones sociales y administrativas de alto nivel se refieren a situaciones específicas y únicas, los responsables de tomar decisiones hacen un uso considerable de la probabilidad subjetiva.

Ejemplos:

Pensemos en la manera de razonar, actuar y decidir de un juez con relación a un delito.

En este caso, los jueces en base a la información que aparece en los expedientes, la cual conforma la base de evidencias, emiten un juicio de valor (presumiblemente culpable o inocente). Si el juez considera que hay suficientes pruebas que señalan la probable culpabilidad de una persona; entonces proceden a dictar un auto de detención al denominado en estos casos, el indicado; ya que hay indicio de culpabilidad del mismo. Ello da curso al inicio de un proceso el cual es el juicio. Toda esta fase aquí descrita, es análoga al inicio de un ejercicio de pronóstico usando el modelo bayesiano como técnica del proceso. El primer paso en tales ejercicios de pronósticos, será asignar (a priori) las probabilidades iniciales P°(Hi) a cada una de las hipótesis consideradas; tomando como base la información que se tenga disponible para ese momento. De igual manera, el juez (en caso de haber encontrado suficientes indicios de culpabilidad) formula, aunque no lo hace, formalmente dos hipótesis:

HIPÓTESIS 1: CULPABLE
HIPÓTESIS 2: INOCENTE

Si él considera que hay suficientes indicios de culpabilidad entonces, considera la probabilidad de que sea cierta la hipótesis 1: culpable, muy alta. Por ejemplo:

HIPÓTESIS 1: CULPABLE	P°(H1) = 0.90
HIPÓTESIS 2: INOCENTE	P°(H2) = 0.10

Estas probabilidades varían en base a las evidencias observadas y mostradas durante el juicio: o bien para hacer que aumente P(H1) o bien para disminuir P(H1) y aumente P(H2). Así, una persona que parecía ser culpable en base a la información inicial (juicios, a priori) puede resultar inocente durante la ejecución del juicio, como consecuencias de las evidencias dadas como pruebas de la parte defensora; para así generar las bases de un juicio de valor (a posteriori) favorable.

De ésta manera la lógica que opera en la mente de quienes tiene en sus manos la administración de la justicia es completamente análoga a la lógica que debe gobernar los ejercicios de pronóstico basados en la técnica de los modelos bayesianos. Por ello, una vez establecidas las probabilidades iniciales P°(Hi) para cada hipótesis; las mismas se irán modificando progresivamente según las evidencias observadas. Tales probabilidades, que consideran las evidencias ocurridas son las llamadas probabilidades revisadas o a posteriori, las cuales se calculan o estiman con la fórmula:

P(H1|H2) = [P(H2|H1)/P(H2)] * P(H1).

Ejemplo:

¿Cuál es la probabilidad de que el próximo año haya una recesión económica? o

¿Cuál es la probabilidad de que haya guerra en CHILE el próximo año? o

¿Cuál es la probabilidad que pase de curso? o

¿Cuál es la probabilidad de obtener promedio siete en matemática final? o

¿Cuál es la probabilidad de obtener promedio sobre seis en matemática?

De cualquiera de éstas interpretaciones de Probabilidad aparecen dos resultados fundamentales:

1) $p(\phi) = 0$, la probabilidad del suceso imposible es nula.

2) $p(\Omega) = 1$, la probabilidad del espacio muestral es 1.

Dos sucesos A y B se dicen excluyentes, si es IMPOSIBLE que ocurran juntos a la vez, en símbolos $A \cap B = \phi$. Por ejemplo se lanza un dado y sea A= salga par , B= salga impar, el suceso que salga par e impar a la vez es ϕ.

AXIOMAS DE PROBABILIDAD

1) $0 \leq p(A) \leq 1$
2) Si $A \cap B = \phi$ entonces $p(AUB) = p(A) + p(B)$.

Para enfrentar un problema de cálculo de probabilidades, se debe poner especial cuidado en definir los sucesos de interés. Ejemplifiquemos con algunas situaciones elementales del experimento “lanzar un dado”:

E= Se lanza un dado $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

Definamos los sucesos siguientes y calculemos sus probabilidades de ocurrencia:

1) A: “el dado muestra as “, así A={1} y m(A)=1, con lo que $p(A) = \frac{1}{6}$.
2) B:” El dado muestra un número impar “, así B={1,3,5} y m(B)=3, con lo que

$$p(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Sin embargo, la realidad presenta sucesos compuestos, los que se forman uniéndolos, intersectándolos y complementándolos. Efectuemos estas composiciones y estudiemos su significado, en consecuencia: dados los sucesos A y B se tiene:

1) $A \cap B$: sucede A y B a la vez.
2) $A \cup B$: sucede A o B , así $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
3) A^c : no sucede A, así $p(A^c) = 1 - p(A)$.

Decimos de los sucesos A y B son INDEPENDIENTES, si la ocurrencia de uno de ellos no altera la ocurrencia del otro, la hipótesis de independencia se expresa así:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)\,.$$

EJEMPLOS DE EVENTOS SEGUROS E IMPOSIBLES

S= SEGURO, I= IMPOSIBLE.

1. Que un hombre quede embarazado naturalmente. (I)
2. Que una hormiga levante un camión. (I)
3. Que las personas mueran. (S)
4. Lanzar una pelota y que caiga en el cielo. (I)
5. Prender un cigarro bajo el agua. (I)
6. Que las personas en su vida no tomen agua. (I)
7. Que los perros hablen. (I)
8. Pestañear al menos una vez al día. (S)

Utilizando propiedades de conjuntos podemos enunciar:

1. $P(\varnothing) = 0$.
2. $P(S) = 1$.
3. $0 \le P(A) \le 1$, para todo evento que sea subconjunto del espacio muestral.
4. $P(A \cup A^c) = P(S) = 1$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
6. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
7. Si entre dos eventos no hay elementos comunes, es decir $A \cap B = \varnothing$ se tiene $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, en este caso se dirá que los eventos son excluyentes.
8. $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Resumen de los tres tipos de probabilidades

La probabilidad **CLÁSICA** está basada en el juego. La suposición fundamental es que el juego es justo y que todos los resultados elementales tienen la misma probabilidad.	La probabilidad **FRECUENTISTA**: cuando un experimento se puede repetir. La probabilidad de un resultado es la proporción de ocasiones en las que aparece a largo plazo.
La probabilidad **SUBJETIVA O PERSONAL:** la mayoría de los sucesos de la vida real son irrepetibles. La probabilidad subjetiva es la valoración personal que hace el individuo de las posibilidades de obtener un resultado. Por ejemplo la probabilidad de que cada alumno en un curso de obtener promedio superior a 6.5 en matemática es distinta de acuerdo a sus habilidades desarrolladas (experiencia de por medio) hasta el momento, aunque teóricamente debiera ser la misma para todos.	Un objetivista utiliza la definición clásica de probabilidad o la de la frecuentista. Un subjetivista o Bayesiano, aplica las leyes formales del azar a sus probabilidades personales

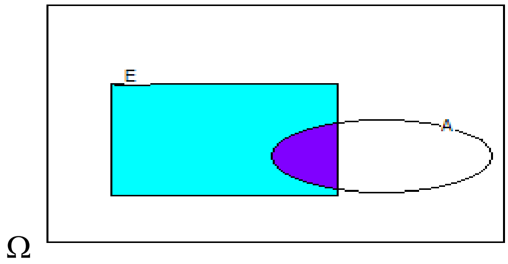
PROBABILIDAD CONDICIONAL E INDEPENDENCIA

PROBABILIDAD CONDICIONAL

Sea E un suceso arbitrario de un espacio muestral Ω, con P(E) positiva. La probabilidad de que un suceso A suceda una vez que E ha ocurrido o, en otras palabras, la probabilidad condicional de A dado E, escrito por:

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

Diagrama



En particular, si el conjunto Ω es un espacio equiprobable tenemos:
$P(A \cap E) = \frac{|A \cap E|}{|\Omega|}$, $P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$, $P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{|A \cap E|}{|E|}$.

TEOREMA: Si A, E$\subset \Omega$, entonces $P(A|E) \cdot P(E) = P(E|A) \cdot P(A)$

Demostración de tarea.

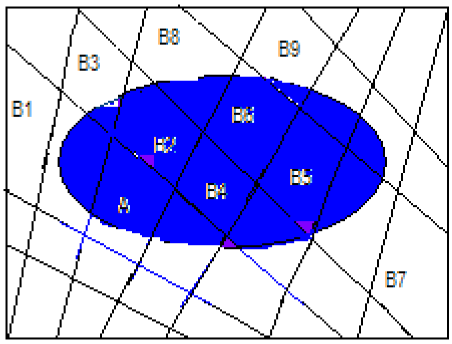
Ejemplos:

1. Se lanza un par de dados. Si la suma es 6.
   a) Encontrar la probabilidad de que uno de los números sea un 2.
   b) Encontrar la probabilidad de que por lo menos uno de los números sea un 2 sabiendo que la suma es 6

2. Un matrimonio tiene dos hijos. Encontrar la probabilidad de que ambos sean varones si :
   i) se sabe que uno de los hijos es un varón.
   ii) Se sabe que el hijo mayor es un varón.

DEFINICIÓN.

Diremos que los sucesos $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_k$ representa una partición del espacio muestral Ω si : a) $B_i \cap B_j = \phi \quad \forall i \neq j$ b) $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = \Omega$ c) $P(B_i) \geq 0 \quad \forall i$



Ω

Ejemplo: En el lanzamiento de un dado $B_1 = \{1,2\}$, $B_2 = \{3,4,5\}$, $B_3 = \{6\}$ representa una partición de Ω. En cambio $C_1 = \{1,2,3,4\}$ y $C_2 = \{4,5,6\}$ NO lo cumplen.

Observación: $A = (A \cap B_1) \dot{\cup} (A \cap B_2) \dot{\cup} (A \cap B_3) \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} (A \cap B_k)$

$$\Rightarrow \quad P(A) = P(A \cap B_1) + \ldots + P(A \cap B_k)$$

$$\Rightarrow \quad P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A|B_k) \cdot P(B_k)$$

$$\Rightarrow \quad P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

$$\Rightarrow \quad P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)}$$

Ejemplos ilustrativos.

Experimento n°1.

Tenemos 2 bolsas, cada una con 10 bolas entre blancas, negras y rojas.

Bolsa 1: 4B,2R,4N
Bolsa 2: 1B,2N,7R

Tiramos un dado, si sale 1 ó 2 extraemos una bola de la bolsa 1, si sale 3,4,5,6, extraemos una bola de la bolsa 2. Ganamos si al final sale bola roja, si no perdemos

¿Qué es más fácil, ganar o perder?
¿Cuál es la probabilidad de que la bola venga de la bolsa 1, sabiendo que gané?

Experimento n°2.

Tenemos 3 cajas:
La caja 1 contiene 10 ampolletas, de las cuales 4 están defectuosas.
La caja 2 contiene 6 ampolletas, de las cuales 1 está defectuosa.
La caja 3 contiene 8 ampolletas, de las cuales 3 están defectuosas.

Seleccionamos una caja al azar y luego sacamos una ampolleta al azar ¿Cuál es la probabilidad de que la ampolleta esté defectuosa?

¿Cuál es la probabilidad de que la ampolleta extraída venga de la caja 1, sabiendo que es defectuosa?

Experimento n°3.

Una caja contiene 3 monedas, una de las monedas es corriente, otra moneda tiene dos caras, y la tercera moneda está cargada de tal manera que la probabilidad de obtener cara es 1/3. Encontrar la probabilidad de obtener cara.

INDEPENDENCIA

Dos eventos A y B son independientes si y sólo si P(B|A) = P(B) o P(A|B) = P(A).
En otro caso, A y B son dependientes.

La condición P(B|A) = P(B) implica que P(A|B) = P(A), y viceversa.

EJEMPLO:

Una moneda se lanza tres veces; se obtiene el espacio equiprobable:

$$\Omega = \{ccc, ccs, \mathrm{csc}, css, scc, scs, ssc, sss\}\ .$$

Considere los sucesos: A={el primer lanzamiento resulta cara},
B={el segundo lanzamiento resulta cara}
C={sólo dos caras resultan en dos lanzamientos seguidos}

Determine que A y C son independientes y B y C son dependientes.

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

I. Ejercicios del texto apoyo.

WALPOLE, R., MYERS, R. 8ª o 9ª edición. Probabilidad y Estadística. Mc Graw Hill.

2.1, 2.4, 2.7, 2.8, 2.12, 2.15, 2.16, 2.17, 2.18, 2.21 al 2.15, 2,27 al 2.30, 2.49 al 2.54, 2.57 al 2.61, 2.64, 2.66, 2.73 al 2.102

II. Ejercicios adicionales de la unidad.

1.
(i) ¿Cuántas placas de automóviles pueden fabricarse si cada placa contiene 2 letras diferentes, seguidas de 3 dígitos diferentes?
(ii) Resolver el problema, si el primer dígito no puede ser 0.

2. ¿Cuántos números enteros y positivos, menores que 500, se pueden formar con los dígitos (diferentes)?

3.
(i) Encontrar el número de maneras en las cuales cinco personas pueden sentarse en una fila.
(ii)¿De cuántas maneras, si dos de las personas insisten en sentarse juntas?

4. En una reunión hay 4 mujeres y 3 hombres. ¿De cuántas maneras podemos sentar a estas 7 personas, si los hombres siempre deben estar juntos?

5. Hay 6 carreteras entre A y B y 4 carreteras entre B y C

a) ¿De cuántas maneras se puede viajar de A a C pasando por B?
b) De cuántas maneras se puede hacer el viaje de ida y vuelta de A a C pasando por B?
c) ¿De cuántas maneras se puede hacer el viaje de A a C ida y vuelta sin usar la misma carretera más de una vez?

6. a) Encontrar el número de maneras en las cuales 4 niños y 4 niñas pueden sentarse en una fila si los niños y las niñas deben ocupar sillas alternadas.

b) Encontrar el número de maneras si se sientan de manera alternada y si un niño y una niña deben ocupar asientos adyacentes.

c) Encontrar el número de maneras si se sientan en forma alternada y si un niño y una niña no deben sentarse en puestos adyacentes.

7. Considerar todos los enteros positivos con 3 dígitos diferentes

a) ¿Cuántos son mayores que 700? b) ¿Cuántos son divisibles por 5?

8. ¿Cuántos palabras distintas podemos formar con las letras de la palabra "PARALELEPIPEDO"?

9. Encontrar n si: a) $P(n,2)=20$ b) $P(n,3)=720$ c) $P(n,3) = 7P(n,2)$

10. Una clase tiene 9 niños y 3 niñas

a) ¿De cuántas maneras puede el maestro escoger un comité de 4?
b) ¿Cuántos de estos tendrán por lo menos una niña?
c) ¿Cuántos de estos tendrán exactamente una niña?

11. Una señora tiene 11 amigos y amigas cercanos
a) ¿De cuántas maneras puede invitar a 5 de ellos a cenar?
b) ¿De cuántas maneras si dos de ellos están casados y no van a asistir separadamente?

12. Del ejercicio anterior supongamos que 6 son mujeres

a) ¿De cuántas maneras puede ella invitar 3 ó más de sus amigas a una fiesta?
b) ¿De cuántas maneras puede ella invitar 3 ó más de ellos, si desea que asista el mismo número de hombres que de mujeres (incluyéndose ella)?

13. ¿Qué función define un espacio de probabilidad en S= {a1, a2, a3}

i) $P(a_1) = 1/4$, $P(a_2) = 1/3$, $P(a_3) = 1/2$

ii) $P(a_1) = 2/3$, $P(a_2) = -1/3$, $P(a_3) = 2/3$

iii) $P(a_1) = 1/6$, $P(a_2) = 1/3$, $P(a_3) = 1/2$

14. Sea P una función de probabilidad en $S = \{a_1, a_2, a_3\}$. Encontrar $P(a_1)$ si:

i) $P(a_2) = 1/3$ y $P(a_3) = \frac{1}{4}$.

ii) $P(a_1) = 2P(a_2)$ y $P(a_3) = \frac{1}{4}$.

15. Sean A y B sucesos con $P(A \cup B) = 7/8$, $P(A \cap B) = 1/4$, $P(A^c) = 5/8$.
Encontrar P (A), P (B) y $P(A \cap B^c)$.

16. Una moneda está cargada de tal manera que la posibilidad de que aparezcan caras es tres veces mayor que la posibilidad de que aparezcan sellos. Encontrar P (H) y P (T).

17. Tres estudiantes A, B y C intervienen en una prueba de natación. A y B tienen la misma probabilidad de ganar y cada uno tiene el doble de la de C. Encontrar la probabilidad de que gane B o C.

18. Un dado está cargado de tal manera que los números pares tienen doble posibilidad de aparecer que los números impares. Encontrar la probabilidad de que:

(i) aparezca un número par

(ii) aparezca un número primo
(iii) aparezca un número impar
(iv) aparezca un número primo impar.

19. En un campeonato de natación, las posibilidades de que A gane son 2 a 3 y las de que B gane son 1 a 4. Encontrar la probabilidad P y las posibilidades de que A o B ganen el campeonato.

20. Una clase contiene 5 estudiantes de matemáticas, 4 estudiantes de física, 8 estudiantes de química y 3 estudiantes de Biología. Se escoge un estudiante para representar la clase, encontrar la probabilidad de que el estudiante sea: (i) un físico (ii) un biólogo (iii) un Químico o Biólogo.

21. Se saca una tarjeta al azar de entre 50 tarjetas numeradas del 1 al 50. Encontrar la probabilidad de que el número en la tarjeta sea.
i) divisible por 5. ii) primo iii) termine con el dígito 2.

22. En una clase de 10 niñas hay 3 con ojos azules. Si se escogen dos niñas al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que:
a) ambas tengan los ojos azules?
b) ninguna tenga los ojos azules?
c) por lo menos una tenga los ojos azules?

23. Tres pernos y tres tuercas se colocan en una caja, si dos objetos se escogen al azar, encontrar la probabilidad de que uno sea un perno y el otro sea una tuerca.

24. Diez estudiantes A, B…, están en una clase. Si se conforma un comité de tres, escogidos al azar entre los miembros de la clase, encontrar la probabilidad de que:

i) A pertenezca al comité.
ii) B pertenezca al comité.
iii) A y B pertenezcan al comité.

25. Una clase consta de 6 niñas y 10 niños. Si se escogen 3 estudiantes al azar para conformar un comité, encontrar la probabilidad de que:

i) se seleccionen 3 niños. ii) se seleccionen exactamente 2 niños.
iii) se seleccionen, por lo menos, un niño.
iv) se seleccionen exactamente 2 niñas.

26. Se lanza un par de dados. Si dos de los números que aparecen son diferentes, encontrar la probabilidad de que:

a) la suma sea seis. b) aparezca un uno. c) la suma sea 4 o menos.

27. Se sabe que las acciones sufren alzas y bajas. Se realiza un estudio en la Bolsa de Valores de Santiago, obteniendo la siguiente información: el 25% de las acciones corresponden al sector servicios (S), el 30% al sector industrial y exportaciones (I) y el 45% restante a los demás sectores de la economía (O). Durante los cuatro días que duró el estudio, en el sector servicios bajó el 25% de las acciones, en el sector industrial y

exportaciones bajó el 38% de las acciones y en los demás sectores de la economía bajó el 33% de las acciones.

Se toma al azar una acción, transada en la Bolsa de Valores de Santiago:

a.- ¿Con qué probabilidad es una acción que presentó alza?
b.- Si la acción tomada al azar sufrió una baja, ¿Cuál es la probabilidad de que se trate de una acción del sector servicios?

28. Se lanza un par de dados. Encontrar la probabilidad de que la suma sea 10 o mayor sí:
i) aparece un 5 en el primer dado
ii) aparece un 5 en, por lo menos, uno de los dados.

29. Sean A y B eventos con P(A)=1/2, P(B)=1/3 y $P(A \cap B) = 1/4$ .Encontrar
i) $P(A/B)$ ii) $P(B/A)$ iii) $P(AUB)$ iv) $P(A^c/B^c)$ v) $P(B^c/A^c)$.

30. Sean A y B eventos con P(A) = 3/8, P(B)=5/8 y P(AUB)=3/4.
Encontrar P(A/B) y P(B/A).

31. En cierta Universidad, el 4% de los hombres y el 1% de las mujeres miden más de 180 cm. Además, el 60% de los estudiantes son mujeres. Ahora bien, si se selecciona al azar un estudiante y es de estatura mayor de 180cm, ¿Cuál es la probabilidad de que este estudiante sea una mujer?

32. Tenemos tres urnas, como sigue:

La urna A contiene 3 fichas rojas y 5 fichas blancas.
La urna B contiene 2 fichas rojas y 1 ficha blanca.
La urna C contiene 2 fichas rojas y 3 fichas blancas.

Se selecciona una urna al azar y se saca 1 ficha de la urna. Si la ficha es roja, ¿Cuál es la probabilidad de que hubiera salido de la urna A?

33. Hay 3 monedas en una caja, una de ellas tiene 2 caras, la segunda es normal y la tercera muestra cara con probabilidad del 75%.
Dado que cuando se elige una de las tres monedas al azar y se lanza con resultado cara.
¿Cuál es la probabilidad que esta sea la moneda de 2 caras?

34. Pedro quiere enviar una carta a María, la probabilidad que Pedro escriba la carta es de 0.8.
La probabilidad de que el correo no la pierda es 0.9. La probabilidad de que el cartero la entregue es de 0.9. Dado que María no ha recibido la carta.

¿Cuál es la probabilidad que Pedro no haya escrito la carta?

35. Se dispone de una urna que contiene 5 fichas blancas y 10 fichas negras y además de un dado normal.

El experimento consiste en lanzar el dado y luego escoger una de la urna sin reposición tantas fichas como puntos se obtiene en el dado.

a) ¿Cuál es la probabilidad que dos de las fichas extraídas sean blancas?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el dado muestre 3 si todas las fichas extraídas fueron blancas?

36. Se han registrado el número de pasajeros que llegan a un hotel en dos días distintos, y el peso (kgs) de sus respectivos equipajes, los que se muestran en la siguiente tabla:

Peso en Kilos	DIA		
	LUNES	MARTES	Total
Menos de 10	25		100
10 a 20		30	
Mayor a 20			80
Total	100		250

a. Determine la probabilidad de que un pasajero llegue el día Lunes y su equipaje pese más de 20 kilos.
b. ¿Con qué probabilidad un pasajero tiene un equipaje con peso entre 10 y 20 kilos y llega el día Lunes?
c. Si un pasajero tiene un equipaje con peso menor a 10 kilos, ¿Con qué probabilidad llegó el Martes?
d. Dado que el pasajero llega un día Martes, ¿Cuál es la probabilidad de que su equipaje pese menos de 20 kilos?

37. En época de verano se estima que, de todas las personas que llegan al aeropuerto Arturo Merino Benítez, el 60% viaja a Estados Unidos, el 30% viaja a Europa y el resto lo hace al sur de Chile.

De las personas que viajan a Europa ,el 60 % lo hace como viaje de placer mientras que esta cifra es del 80% para los que viajan a Estados Unidos y del 90% para los que viajan al sur de Chile. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que viaja por placer lo haga hacía el sur de Chile?