Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

Ejercicios Resueltos de Transformaciones Lineales

1). Si $V_1 = (1,-1)$, $V2 = (2,-1)$, $V_3=(-3,2)$ y $W_1=(1,0)$, $W_2=(0,-1)$, $W_3=(1,1)$. ¿Existe una transformación lineal **T: $\mathbf{R}^2$ à R,** tal que $T(v_i) = W_i$ para i = 1,2,3 ?

Solución:

Si $\{ v_1, v_2 , v_3 \}$es base de $\mathbf{R}^2$, entonces existe una única transformación lineal **T: $\mathbf{R}^2$ à R**

Pero:

$(-3,2) = -(1,-1) – (2,-1)$

$\Rightarrow$ $\{ v_1, v_2 , v_3 \}$ no es linealmente Independiente

$\Rightarrow$ $\{ v_1, v_2 , v_3 \}$no es base de $\mathbf{R}^2$

$\Rightarrow$ no existe tal transformación lineal

2) . Sea **T: $\mathbf{R}^3$ à $\mathbf{R}^3$,** transformacion lineal , tal que :

T (1,1,1) = (1,0,2) ; T (1,0,1) = (0,1,1) ; T (0,1,1) = (1,0,1)

Encontrar T (x,y,z)

Solución:

Por demostrar que el conjunto {(1,1,1), (1,0,1),(0,1,1)} es base de $\mathbf{R}^3$

Sea a.b.c $\in$ **R,** tal que .

$$a(1,1,1) + b(1,0,1) + c(0,1,1) = (0,0,0)$$

$$\begin{array}{l} \mathbf{a + b = 0} \\ \mathbf{a + c = 0} \\ \mathbf{a + b + c = 0} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a = b = c = 0}$$

Luego {(1,1,1),(1,0,1),(0,1,1)} es linealmente Idependiente

Sea $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, entonces existen escalares $a,b,c \in \mathbf{R}$ tal que:

$$a(1,1,1) + b(1,0,1) + c(0,1,1) =(x,y,z)$$

$$\begin{array}{l} \mathbf{a + b = x} \\ \mathbf{a + c = y} \\ \mathbf{a + b + c = z} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a = x + y - z \ ; \quad b = z - y \ ; \quad c = z - x}$$

Luego {(1,1,1),(1,0,1),(0,1,1)} es base de $\mathbf{R}^3$
Existe una única T transformación lineal de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^3$ tal que :

T(1,1,1) = (1,0,2) , T(1,0,1) = (0,1,1) , T(0,1,1) = (1,0,1)
T(x,y,z) = T(a(1,1,1) + b(1,0,1) + c(0,1,1))
T(x,y,z) = aT(1,1,1) + bT(1,0,1) + cT(0,1,1)
T(x,y,z) = (x+y-z)T(1,1,1) + (z-y)T(1,0,1) + (z-x)T(0,1,1)
T(x,y,z) = (x+y-z)(1,0,2) + (z-y)(0,1,1) + (z-x)(1,0,1)
T(x,y,z) = (y , z-y , x+y)

3) .Sea **T:** $\mathbf{R}^2$ à **R** transformación lineal definida por
T (x,y,z) = 2x -3y +z
a) Encontrar $[T]_{\beta}^{\alpha}$ donde β = { (1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)} y α ={2}
b) Encontrar **kernel (T), Imagen (T), Nulidad(T) y Rango (T)**

Solución:

a)
T(1,0,0) = 2 = 1(2)
T(1,0,0) = 2-3 = -1 = -1/2 (2)
T(1,1,1) = 2-3+1 = 0 = 0(2)

Luego:

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

b)
Kernel (T) = { (x,y,z) $\in$ $\mathbf{R}^3$ **/ T(x,y,z) = 0** }
Kernel (T) = { (x,y,z) $\in$ $\mathbf{R}^3$ **/ 2x- 3y + z =0** }
Kernel (T) = { (x,y,z) $\in$ $\mathbf{R}^3$ **/ -2x+ 3y = z** }
Kernel (T) = { (x,y,-2x+3y) $\in$ $\mathbf{R}^3$ **/ (x,y)** $\in$ $\mathbf{R}^2$ }
Kernel (T) = $\langle (1,0,-2),(0,1,3) \rangle$ es base de Kernel (T)
$\Rightarrow$ Nulidad (T) = 2

Imagen (T) ={ T(x,y,z) /(x,y,z) $\in$ $\mathbf{R}^3$ }
Imagen (T) ={ 2x -3y +z / (x,y,z) $\in$ $\mathbf{R}^3$ }
Imagen (T) = 2
$\Rightarrow$ Rango (T) = 1

13. Sea **T :** $\mathbf{R}^4$ à $\mathbf{R}^3$ una transformación lineal definida por.

T(1,1,1,1) = (7,2,3)
T(1,1,1,0) =(6,1,7)
T(1,1,0,0) = (4,1,5)
T(1,0,0,0) = (1,0,1).. Hallar T(x,y,z,w)

Solucion:

El conjunto { (1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0) } es una base de $\mathbf{R}^4$.
Si (x,y,z,w) $\in$ $\mathbf{R}^4$**,** entonces existen escalares a,b,c,d, tal que:

a(1,1,1,1) + b(1,1,1,0) +c(1,1,0,0) +d(1,0,0,0) = (x,y,z,w)

a+b+c+d = x
a+b+c = y
a+b = z
a = w

$\Rightarrow$ a=w , b=z-w , c=y+w-z , d= x-y-w