ESPACIO NULO DE *A*: RESOLUCIÓN DE *AX* = 0 ■ 3.2

Este tema versa sobre las soluciones espaciales de $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$. La matriz A puede se cuadrada o rectangular. **Una solución inmediata** es $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, la única posible para las matrices invertibles. Para el resto de las matrices, que no son invertibles, existen soluciones distintas de cero para $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$. Cada una de las soluciones de $\boldsymbol{x}$ pertenece al **espacio nulo** de $\boldsymbol{A}$. Aquí se pretende hallar todas las soluciones e identificar este importantísimo subespacio.

DEFINICIÓN: El ***espacio nulo de A se compone de todas las soluciones de Ax = 0.*** Estos vectores $\boldsymbol{x}$ pertenecen a $\mathbf{R}^n$. El espacio nulo que contiene todas las soluciones de $\boldsymbol{x}$ se designa como $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A})$.

Compruebe que los vectores solución forman un subespacio. Suponga que $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ pertenecen al espacio nulo (lo cual significa que $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{Ay} = \mathbf{0}$). Según las reglas de multiplicación de matrices $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \mathbf{0} + \mathbf{0}$. Asimismo, según las reglas $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{cx}) = \boldsymbol{c}\mathbf{0}$. Los valores por la derecha siguen siendo cero. Por lo tanto, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{cx}$ pertenecen también al espacio nulo $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A})$. Dado que podemos sumar y multiplicar sin abandonar el espacio nulo, se trata de un subespacio.

Recapitulando: Los vectores solución $\boldsymbol{x}$ tienen n componentes. Están contenidos en $\mathbf{R}^n$, con lo cual **el espacio nulo en un subespacio de** $\mathbf{R}^n$. El espacio de columnas $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A})$ es un subespacio de $\mathbf{R}^m$.

Si los valores a la derecha de $\boldsymbol{b}$ no son cero, las soluciones de $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ no forman un subespacio. El vector $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es una solución únicamente si $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$. Cuando el conjunto de soluciones no incluye a $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, no puede tratarse de un subespacio. En el tema 3.4 veremos cómo las soluciones de $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ (si existe alguna) se desplazan con respecto al origen a causa de una única solución.

Ejemplo 1: La ecuación $x + 2y + 3z = 0$ viene de la matriz de 1 por 3 $A = [1 \quad 2 \quad 3]$. Esta ecuación da lugar a un plano que atraviesa el origen. Este plano es un subespacio de $\mathbf{R}^3$. E*s* **el espacio nulo de *A***. Las soluciones de $x + 2y + 3z = 6$ también forman un plano, pero no un subespacio.

Ejemplo 2: Describa el espacio nulo de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

Solución Aplicar la eliminación a las ecuaciones lineales $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$:

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 = 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{bmatrix}$$

En realidad sólo hay una ecuación. La segunda ecuación es la primera multiplicada por 3. En la imagen de filas, la recta $x_1 + 2x_2 = 0$ es la misma que $3x_1 + 6x_2 = 0$. Esa fila es el espacio nulo $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A})$.

Para describir esta recta de soluciones, lo más eficiente es hallar un punto de la misma (una solución especial). Todos los demás puntos de la recta son múltiplos de éste. Decidimos que la segunda componente sería $x_2 = 1$ (una elección especial). Resolviendo la ecuación $x_1 + 2x_2 = 0$, tenemos que la primera componente debe ser $x_1 = -2$. A continuación la solución especial nos permite hallar el subespacio completo:

El espacio nulo $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A})$ contiene todos los múltiplos de $\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Esta es la mejor manera de describir el espacio nulo, calculando las soluciones especiales de $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$. ***El espacio nulo se compone de todas las combinaciones de dichas soluciones especiales***. Este ejemplo tiene una solución especial y el espacio nulo es una recta.

Para el plano del ejemplo 1 existen dos soluciones especiales:

$$[1\ \ 2\ \ 3]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \text{ tiene las soluciones especiales } \boldsymbol{s}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \boldsymbol{s}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Estos vectores $\boldsymbol{s}_1$ y $\boldsymbol{s}_2$ se inscriben en el plano $x + 2y + 3z = 0$, que es el espacio nulo de A = [1 2 3]. Todos los vectores del plano son combinaciones de $\boldsymbol{s}_1$ y $\boldsymbol{s}_2$.

Fíjense en la característica especial de $\boldsymbol{s}_1$ y $\boldsymbol{s}_2$ en este ejemplo. Los dos últimos elementos de ambas son unos y ceros. Estos componentes son "libres" y las hemos escogido a propósito. Las primeras, -2 y –3, vienen dadas por la ecuación $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$.

La primera columna de A = [1 2 3] contiene el **pivote**, con lo cual la primera componente de $\boldsymbol{x}$ **no es libre**. Sólo realizamos la elección especial (uno o cero) de las componentes libres que corresponden a las columnas sin pivotes. Esta descripción de soluciones especiales se completa con un ejemplo más.

Ejemplo 3: Describa los espacios nulos de estas tres matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} A \\ 2A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \\ 2 & 4 \\ 6 & 16 \end{bmatrix} \quad \text{y } C = \begin{bmatrix} A & 2A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix}.$$

Solución: La ecuación $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución cero $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. El espacio nulo es $\boldsymbol{Z}$, que contiene un único punto, $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, perteneciente a $\mathbf{R}^2$. Para ilustrarlo utilizamos la eliminación:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ produce } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} x_1 = & 0 \\ x_2 = & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz cuadrada $\boldsymbol{A}$ es invertible. No existen soluciones especiales. El único vector del espacio nulo es $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

La matriz rectangular $\boldsymbol{B}$ tiene el mismo espacio nulo $\boldsymbol{Z}$. Las dos primeras ecuaciones de $\boldsymbol{Bx} = \mathbf{0}$ de nuevo requieren que $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Las dos últimas ecuaciones también obligarían a que $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Al añadir nuevas ecuaciones, se ve que el espacio nulo no puede ampliarse de ningún modo. Al añadir nuevas filas a la matriz, imponemos más condiciones a los vectores $\boldsymbol{x}$ del espacio nulo.

La matriz rectangular $\boldsymbol{C}$ es diferente. Se le han añadido columnas nuevas en lugar de filas. El vector solución $\boldsymbol{x}$ tiene **cuatro** componentes. La eliminación daría lugar a pivotes en las dos primeras columnas, pero las dos últimas columnas, que carecen de pivotes, quedarían "libres":

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix} \text{ se convierte en } U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array}$$

columnas pivote   columnas libres

Para las variables libres x_3 y x_4, realizamos elecciones especiales de unos y ceros. Las variables pivote x_1 y x_2 se determinan a partir de la ecuación $\boldsymbol{Ux} = \mathbf{0}$. Así, obtenemos dos soluciones especiales en el espacio nulo de $\boldsymbol{C}$ (así como en el espacio nulo de $\boldsymbol{U}$). Son las siguientes:

$$\boldsymbol{s}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{s}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{ variables} \\ \leftarrow \text{ pivote} \\ \leftarrow \text{ variables} \\ \leftarrow \text{ libres} \end{array}$$

Un comentario más para adelantarnos a lo que viene a continuación. La eliminación no se detendrá en la matriz triangular superior $\boldsymbol{U}$. Seguiremos simplificándola de dos formas:

1. ***Haciendo aparecer ceros por encima de los pivotes***, mediante eliminaciones en la parte superior.

2. ***Haciendo aparecer unos en los pivotes***, dividiendo la fila entera por su pivote.

Estos pasos no cambian el vector cero de la parte derecha de la ecuación. El espacio nulo no cambia. Este espacio nulo se vuelve fácilmente visible al llegar a la ***forma escalonada reducida por filas R***:

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ se transforma en } \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \end{array}$$

las columnas pivote contienen a ***I***

He restado la fila 2 de $\boldsymbol{U}$ de la fila 1, y a continuación he multiplicado la fila 2 por ½. Las dos ecuaciones originales se han simplificado hasta $x_1 + 2x_3 = 0$ y $x_2 + 2x_4 = 0$. Éstas son las ecuaciones para $\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ con la matriz identidad en la columna pivote.

Las soluciones especiales siguen siendo las mismas $\boldsymbol{s}_1$ y $\boldsymbol{s}_2$. Son mucho más fáciles de hallar a partir del sistema reducido $\boldsymbol{Rx} = \mathbf{0}$.

Antes de pasar a las matrices $\boldsymbol{A}$ de m por n, sus espacios nulos $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A})$ y las soluciones especiales en el espacio nulo, permítanme repetir un comentario. Para muchas matrices, la única solución para $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ es $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Sus espacios nulos contienen únicamente el vector $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. La única combinación de columnas que hace que $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ es, por lo tanto, la "combinación

cero” o “combinación trivial”. La solución es trivial (simplemente $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$), pero el concepto no lo es.
Este caso de un espacio nulo cero $\boldsymbol{Z}$ es de la mayor importancia. Significa que las columnas de A son independientes. Ninguna combinación de columnas produce el vector cero salvo la combinación cero. Todas las columnas contienen pivotes y no hay ninguna libre. Esta idea de independencia volverá a aparecer...

Resolución de $Ax = 0$ por eliminación

Esto es importante. Resolvemos m ecuaciones con n incógnitas, y los valores por la derecha son todos cero. Los valores por la izquierda se simplifican operando por filas, obtenemos uno por uno *(read off)* los valores de la solución (o soluciones). Recuerden las dos etapas par resolver $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$:

1. Eliminación hacia adelante para obtener a partir de $\boldsymbol{A}$ una $\boldsymbol{U}$ triangular (o su forma reducida $\boldsymbol{R}$).

2. Sustitución hacia atrás en $\boldsymbol{Ux} = \mathbf{0}$ o $\boldsymbol{Rx} = \mathbf{0}$ para hallar $\boldsymbol{x}$.

Advertirán diferencias en la sustitución hacia atrás, cuando $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{U}$ tengan menos de n pivotes. En este capítulo admitimos todas las matrices, no sólo las bonitas (es decir, las matrices cuadradas con inversa).

Los pivotes siguen siendo distintos de cero. Por debajo de los pivotes, las columnas siguen siendo cero. Pero es posible que una columna no tenga pivote. En ese caso, no dejen de calcular. Continúen con la columna siguiente. El primer ejemplo corresponde a una matriz de 3 por 4:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & 10 \\ 3 & 3 & 10 & 13 \end{bmatrix}.$$

Sin duda, $a_{11} = 1$ es el primer pivote. Eliminemos el 2 y el 3 bajo este pivote:

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{(restar } 2x \text{ fila 1)} \\ \text{(restar } 3x \text{ fila 1)} \end{array}$$

En la segunda columna, hay un cero en el lugar que le correspondería al pivote. Buscamos por debajo del cero un elemento distinto de cero para realizar un cambio de filas. **El elemento inferior también es cero**. No se puede hacer nada con la segunda columna mediante el proceso de eliminación. Esto es un indicio de problemas, que en cualquier caso ya nos esperábamos, al tratarse de una matriz rectangular. No hay ninguna razón para abandonar, así que seguimos con la tercera columna.

El segundo pivote es 4 (pero está en la tercera columna). Al restarle la fila 2 a la fila 3, despejamos esta columna bajo en pivote. Así llegamos a:

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{4} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textit{(sólo dos pivotes)} \\ \textit{(la última ecuación} \\ \textit{se convirtió en } 0 = 0) \end{array}$$

En la cuarta columna también hay un cero en la posición del pivote, pero no se puede hacer nada. No existen filas inferiores para realizar un intercambio, y hemos llegado al final de la eliminación hacia adelante. La matriz tiene tres filas, cuatro columnas y **sólo dos pivotes**. La $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ inicial parecía componerse de tres ecuaciones, pero la tercera es la suma de las dos primeras. Queda automáticamente resuelta (0 = 0) al hallar las dos primeras ecuaciones. La eliminación revela la verdadera naturaleza interna de un sistema de ecuaciones.

Ahora volvemos a la sustitución para hallar todas las soluciones de $\boldsymbol{Ux} = \mathbf{0}$. Con cuatro incógnitas y sólo dos pivotes, existen muchas soluciones. La cuestión es cómo escribirlas todas. Un buen método es separar las ***variables pivote*** de las ***variables libres***.

P Las variables ***pivote*** son x_1 y x_3, dado que las columnas 1 y 3 contienen pivotes.
F Las variables ***libres*** son x_2 y x_4, dado que las columnas 2 y 4 no contienen pivotes.

A las variables libres x_2 y x_4 se les puede dar cualquier valor. Después, mediante sustitución regresiva se hallan las variables pivote x_1 y x_3. (En el capítulo 2 no había variables libres. Cuando $\boldsymbol{A}$ es invertible, todas las variables son pivotes.) Para las variables libres, lo más fácil es elegir unos y ceros. Éstos nos proporcionan las **soluciones especiales**.****

Soluciones especiales:

- Pongamos que $x_2 = 1$ y $x_4 = 0$. Por sustitución hacia atrás $x_3 = 0$ y $x_1 = -1$.
- Pongamos que $x_2 = 0$ y $x_4 = 1$. Por sustitución hacia atrás $x_3 = -1$ y $x_1 = -1$.

Estas soluciones especiales resuelven $\boldsymbol{Ux} = \mathbf{0}$ y, por lo tanto, $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$. Están contenidas en el espacio nulo. Lo bueno es que *todas las soluciones son una combinación de las especiales*.

$$\textbf{\textit{Solución completa}} \quad \boldsymbol{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\textbf{especial}} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\textbf{especial}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\textbf{completa}}. \qquad (1)$$

Por favor, fíjense bien es esta respuesta. Es el objetivo principal de esta sección. El vector $\boldsymbol{s}_1$ = (-1, 1, 0, 0) es la solución especial cuando $x_2 = 1$ y $x_4 = 0$. La segunda solución nos da unos valores de $x_2 = 0$ y $x_4 = 1$. ***Todas las soluciones son combinaciones lineales de*** $\boldsymbol{s}_1$ ***y*** $\boldsymbol{s}_2$**.** Las soluciones especiales están contenidas en el espacio nulo $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A})$, y sus combinaciones lo llenan por completo.

El código **nulbasis** de MATLAB dichas soluciones especiales. Aparecen en las columnas de una ***matriz de espacio nulo N***. La solución completa para $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ es una combinación de dichas columnas. Una vez que sabemos las soluciones especiales, tenemos el espacio nulo entero.

Existe una solución especial por cada variable libre. Si no hay variables libres (lo cual significa que hay n pivotes), la única solución para $\boldsymbol{Ux} = \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ es la trivial, $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Todas las variables son variables pivote. En ese caso, los espacios nulos de A y U contienen sólo el vector cero. Al no haber variables, y con pivotes en todas las columnas, el resultado de **nulbasis** es una matriz vacía.

Ejemplo 4: Hallar el espacio nulo de $\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.

La segunda columna de ***U*** no tiene pivote. Así que x_2 está libre. Uno de los valores de la solución especial es $x_2 = 1$. La sustitución hacia atrás hasta $9x_3 = 0$ da $x_3 = 0$. Además $x_1 + 5x_2 = 0$ o $x_1 = -5$. Las soluciones de $\boldsymbol{Ux} = \mathbf{0}$ son múltiplos de una solución especial.

$$\boldsymbol{x} = x_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El espacio nulo de ***U*** es una recta perteneciente a $\mathbf{R}^3$.
Contiene múltiplos de las solución especial.
Posee una variable libre, y ***N* = nulbasis** (*U*) tiene una columna.

En seguida proseguiremos con la eliminación en ***U***, para obtener **ceros por encima de los pivotes y unos en los pivotes**. El 7 desaparece y el pivote cambia del 9 al 1. El resultado final de esta eliminación será ***R***:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \text{ se reduce a } R = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esto deja aún más claro que la solución especial es $\boldsymbol{s} = (-5, 1, 0)$.

Matrices escalonadas

La eliminación hacia delante va de ***A*** a ***U***. El proceso comienza con una matriz ***A*** de *m* por *n*. Se realiza mediante operaciones con las filas, intercambios de filas incluidos. Cuando una columna no tiene pivote, se pasa a la siguiente. La "escalera" ***U*** de *m* por *n* es una ***matriz escalonada.***

Esta es una matriz escalonada de 4 por 7 con los tres pivotes resaltados en negrita:

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} & x & x & x & x & x & x \\ 0 & \boldsymbol{x} & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{x} & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tres variables pivote x_1, x_2, x_6
Cuatro variables libres x_3, x_4, x_5, x_7
Cuatro soluciones especiales en $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{U})$

Pregunta: ¿Cuáles son el espacio de columnas y el espacio nulo de esta matriz?

Respuesta: Las columnas tienen cuatro elementos, así que pertenecen a $\mathbf{R}^4$. (¡No a $\mathbf{R}^3$!) El cuarto elemento de todas las columnas es cero. Todas las combinaciones de las mismas (todos los vectores del espacio de columnas) tienen la cuarta componente igual a cero. *El espacio de columnas* $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U})$ **se compone de todos los vectores de la forma** $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \mathbf{0})$. Para estos vectores podemos resolver $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{b}$ por sustitución hacia atrás. Dichos vectores ***b*** son todas las combinaciones posibles de las siete columnas.

El espacio nulo $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{U})$ es un subespacio de $\mathbf{R}^7$. Las soluciones de $\boldsymbol{Ux} = \mathbf{0}$ son todas las combinaciones de las cuatro especiales, **una por cada variable libre**:

1. Las columnas 3, 4, 5 y 7 no tienen pivotes. Así que las variables libres son x_3, x_4, x_5 y x_7.

2. Den a una de las variables libres el valor de 1 y a las demás el de cero.

3. Resuelvan $\boldsymbol{Ux} = \mathbf{0}$ para las variables pivote x_1, x_2 y x_6.

4. Esto nos da una de las cuatro soluciones especiales en la matriz de espacio nulo $\boldsymbol{N}$.

Las filas distintas de cero de una matriz escalonada son las primeras. Los pivotes son sus primeros elementos distintos de cero, y van hacia abajo en forma de escalera. Las operaciones normales con filas (en el código de aprendizaje **plu**) dan lugar a columnas de ceros bajo cada uno de los pivotes.

Contando los pivotes se deduce un teorema de enorme importancia. Supongan que $\boldsymbol{A}$ tiene más columnas que filas. ***Con*** $n > m$ ***existe al menos una variable libre.*** El sistema $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ tiene al menos una solución especial. ¡Esta solución *no* es *cero*!

3B Si $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ tiene más incógnitas que ecuaciones ($\boldsymbol{A}$ tiene más columnas que filas), entonces tiene soluciones distintas de cero.

En otras palabras, una matriz corta y ancha ($n > m$) tiene siempre vectores distintos de cero en su espacio nulo. Al menos tiene que haber $n - m$ variables libres, ya que el número de pivotes no puede sobrepasar m. (La matriz sólo tiene m filas, y en una fila nunca hay dos pivotes.) Por supuesto, es posible que una fila **no** tenga pivote, lo cual supone una variable libre más. Pero lo importante es que cuando existe una variable libre, se le pude dar valor 1. Entonces la ecuación $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ tendrá una solución distinta de cero.

Recapitulando: Como máximo existen m pivotes. Cuando $n > m$, el sistema $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ tiene una variable libre y una solución distinta de cero. En realidad hay infinitas soluciones, ya que cualquier múltiplo de $c\boldsymbol{x}$ lo es. El espacio nulo contiene al menos una recta de soluciones. Con dos variables libres, existen dos soluciones especiales y el espacio nulo es aún mayor.

El espacio nulo es un subespacio. Su "dimensión" es el número de variables libres. Este concepto clave (la ***dimensión*** de un subespacio) se define y explica en este capítulo.

Matriz escalonada reducida R

Partiendo de la matriz escalonada $\boldsymbol{U}$, podemos ir un paso más allá. Continúen a partir de:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos dividir entre 4 la segunda fila. Así, ambos pivotes se hacen 1. **Podemos restarle 2 veces esta nueva fila a la anterior**. Eso da como resultado un cero tanto por encima como por debajo del pivote. La ***matriz escalonada reducida por filas*** es:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los pivotes de ***R*** son unos. Todos los demás elementos de las columnas pivote son ceros. Los ceros por encima de los pivotes proceden de la ***eliminación hacia arriba***.

Si *A* es invertible, su forma escalonada reducida por filas es la matriz identidad *R* = *I*. Éste es el último paso de la reducción por filas.

Los ceros de ***R*** hacen que sea fácil hallar las soluciones especiales (las mismas que antes):

1. Pongamos que $x_2 = 1$ y $x_4 = 0$. Resolvemos $Rx = 0$. Así, tenemos que $x_1 = -1$ y $x_3 = 0$.

2. Pongamos que $x_2 = 0$ y $x_4 = 1$. Resolvemos $Rx = 0$. Así, tenemos que $x_1 = -1$ y $x_3 = -1$.

Los números -1 y 0 se encuentran en la columna 2 de ***R*** (con signos positivos). Los números -1 y -1 se encuentran en la columna 4 (con signos positivos). Invirtiendo los signos obtenemos las soluciones especiales de la matriz ***R***. Las solución general a $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{Ux} = \mathbf{0}$ o $\boldsymbol{Rx} = \mathbf{0}$ consiste en una combinación de ambas soluciones especiales: ***El espacio nulo N(A) = N(U) = N(R) contiene:***

$$\boldsymbol{x} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad = \textit{(solución completa de } Ax = 0)$$

El próximo apartado del libro desplaza su centro de atención de ***U*** a ***R***. La orden [*R, pivcol*] = **rref(A)** de MATLAB da como resultado ***R***, así como una lista de columnas pivote.

■ REPASO DE LAS IDEAS CLAVE ■

1. El espacio nulo ***N***(***A***) contiene todas las soluciones de $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$.

2. La eliminación da como resultado una matriz escalonada ***U***, o una ***R*** reducida por filas, con columnas pivote y columnas libres.

3. Cada columna libre produce una solución especial para $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$. La variable libre es igual a 1 y las demás variables libres son igual a 0.

4. La solución completa de $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ es una combinación de las soluciones especiales.

5. Si $n > m$, entonces ***A*** tiene al menos una columna sin pivotes, que producirá una solución especial. Por lo tanto, existen vectores ***x*** distintos de cero en el espacio nulo de ***A***.