Espacios generados, dependencia lineal y bases

Departamento de Matemáticas, CSI/ITESM

17 de junio de 2008

Índice

16.1. Introducción

Nuestro interés consiste en reformular las definiciones de dependencia lineal, independencia lineal y espacio generado que ya se tenían para $\mathbf{R}^n$ pero en el contexto general de los espacios vectoriales. Es de notar que en las definiciones dadas sólo se hacía referencia a a suma de vectores, multiplicación de un vector por un escalar, a combinación lineal y al vector cero. Todo esto existe en el espacio vectorial en general. Nuestra meta consiste en decir qué cosas pueden permanecer y qué cosas pueden cambiar en un espacio generado. El concepto teóricamente más importante es el de base de un espacio vectorial. Las demostraciones de cada uno de los resultados son idénticas a las correspondientes para $\mathbf{R}^n$, por ello no se incluirán.

16.2. Espacio Generado

Definición 16.1
Sea V un espacio vectorial, y $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\dots$,$\mathbf{v}_k$ vectores de V. El conjunto formado por todas las posibles combinaciones lineales de los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\dots$,$\mathbf{v}_k$ se llama el *espacio generado* por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\dots$,$\mathbf{v}_k$. Este conjunto se representa por

$$\text{Gen}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$$

Si $V = \text{Gen}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ diremos que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ **genera** a V y que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ es un *conjunto generador* de V.

Ejemplo 16.1
Indique si la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

pertenece al espacio generado por las matrices:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Solución

Buscamos saber si existen constantes c_1, c_2 y c_3 tales que:

$$A = c_1\,A_1 + c_2\,A_2 + c_3\,A_3$$

Es decir,

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Si se efectua cada producto y se realiza la suma de las matrices en el lado izquierdo obtenemos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,c_1 - 4\,c_2 + 2\,c_3 & -2\,c_1 + 4\,c_2 + 1\,c_3 \\ -3\,c_1 + 6\,c_2 + 0\,c_3 & 0\,c_1 + 0\,c_2 - 2\,c_3 \end{bmatrix}$$

Si se igualan elementos correspondientes de estas matrices se obtiene:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2\,c_1 & - & 4\,c_2 & + & 2\,c_3 & = & -1 \\ -2\,c_1 & + & 4\,c_2 & + & 1\,c_3 & = & 0 \\ -3\,c_1 & + & 6\,c_2 & + & 0\,c_3 & = & 0 \\ 0\,c_1 & + & 0\,c_2 & - & 2\,c_3 & = & -2 \end{array}$$

Formando la matriz aumentada y aplicando Gauss-Jordan obtenemos:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -4 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Debido al pivote en la columna de las constantes, el sistema es inconsistente. Como el sistema es inconsistente, no existen c_1, c_2 y c_3 que cumplen:

$$A = c_1\,A_1 + c_2\,A_2 + c_3\,A_3$$

Por tanto, A no pertence al espacio $Gen\{A_1, A_2, A_3\}$ ∎.

Observación

Es importante observar la relación entre

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

y la matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -4 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

El efecto final es como si las matrices se convirtieran en un vector columna. El proceso de conversión consiste en acomodar en una *gran* columna todos y cada uno de los renglones. Esto consiste en un proceso de zig-zag sobre los renglones de la matriz. A este proceso de convertir una matriz en un vector columna lo llamaremos *vectorización de una matriz*.

Ejemplo 16.2
Indique si el polinomio

$$p(x) = 1 - 2\,x - x^2 - 19/4\,x^3$$

es una combinación lineal de los polinomios:

$$p_1(x) = 1 + 2\,x - 3\,x^2 + x^3$$

$$p_2(x) = -1 + x + x^2 + 3\,x^3$$

y

$$p_3(x) = -1 + 3\,x - 3\,x^2 + 4\,x^3$$

Solución
La pregunta es si existen valores para c_1, c_2 y c_3 de manera que

$$p(x) = c_1\,p_1(x) + c_2\,p_2(x) + c_3\,p_3(x)$$

Si sustuimos los polinomios, desarrollamos los productos por las constantes, y agrupamos los términos respecto a x, obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} 1 - 2\,x - x^2 - 19/4\,x^3 & = & c_1 - c_2 - c_3 + (2\,c_1 + c_2 + 3\,c_3)\,x + \\ & & (-3\,c_1 + c_2 - 3\,c_3)\,x^2 + (c_1 + 3\,c_2 + 4\,c_3)\,x^3 \end{array}$$

Por consiguiente, para que lo anterior se cumpla se requiere que:

$$\begin{array}{rcrcrcr} c_1 & - & c_2 & - & c_3 & = & 1 \\ 2\,c_1 & + & c_2 & + & 3\,c_3 & = & -2 \\ -3\,c_1 & + & c_2 & - & 3\,c_3 & = & -1 \\ c_1 & + & 3\,c_2 & + & 4\,c_3 & = & -19/4 \end{array}$$

Este sistema tiene como matriz aumentada que reducida queda:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & -19/4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vemos que el sistema tiene solución (En este ejemplo tiene solución única, pero lo que importa es si tiene o no solución). Por tanto, si existen c_1, c_2 y c_3 que satisfacen

$$p(x) = c_1\,p_1(x) + c_2\,p_2(x) + c_3\,p_3(x)$$

Por consiguiente,

$$p(x) \text{ sí pertenece a Gen}\,\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}\ \blacksquare$$

Observación
Es importante observar la relación entre

$$\begin{array}{rcl} 1 - 2\,x - x^2 - 19/4\,x^3 & = & c_1\,(1 + 2\,x - 3\,x^2 + x^3) + \\ & & c_2\,(-1 + x + x^2 + 3\,x^3) + \\ & & c_3\,(-1 + 3\,x - 3\,x^2 + 4\,x^3) \end{array}$$

y la matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & -19/4 \end{array}\right]$$

El efecto final es como si los polinomios se convirtieran en un vector columna. El proceso de conversión consiste en tomar **en orden**, iniciando con el término constante, **sólo los coeficientes** del polinomio y formar un vector columna. A este proceso de convertir un polinomio en un vector columna lo llamaremos *vectorización de un polinomio*.

Nota

También es importante señalar que el proceso para verificar si un vector en $\mathbf{R}^n$ es combinación lineal de un conjunto de vectores, que consistía en formar una matriz aumentada donde en la primera parte *entran* los vectores del conjunto como columnas y en la parte aumentada entra el vector como columna, sigue siendo válido usando **vectorización** en el caso de vectores que son polinomios o matrices.

Ejemplo 16.3

Indique si

$$\text{Gen}\left\{\begin{array}{l} p_1(x) = 1 + x + x^2 \\ p_2(x) = 1 \\ p_3(x) = -1 - x^2 \\ p_4(x) = x^2 \end{array}\right\} = \mathscr{P}_2$$

Solución

Debemos ver si cualquier polinomio $p(x) = a + b\,x + c\,x^2$ es **siempre** combinación lineal de los polinomios dados. Es decir, debemos ver que sin importar los valores de a, b y c existen c_1, c_2, c_3 y c_4 tales que:

$$p(x) = c_1\,p_1(x) + c_2\,p_2(x) + c_3\,p_3(x) + c_4\,p_4(x)$$

Por las notas anteriores, esto se convierte en la matriz aumentada que escalonada queda:

$$\left[\begin{array}{rrrr|c} 1 & 1 & -1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 & b \\ 1 & 0 & -1 & 1 & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrr|c} 1 & 1 & -1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & -1 & 1 & c-b \end{array}\right]$$

Puesto que los pivotes aparecen en la primera parte de la matriz aumentada, el sistema es consistente independientemente de los valores de a, b, y c. Por tanto, cualquier polinomio $p(x)$ es combinación lineal de p_1, p_2, p_3 y p_4. Por consiguiente, tal conjunto de vectores sí genera $\mathscr{P}_2$ ■

Observación

Es importante observar que la inclusión del polinomio cualquiera $p(x) = a + b\,x + c\,x^2$ no tiene un uso real cuando se pregunta si se genera todo el espacio. También es de observar que este tipo de preguntas se responden de igual manera que en el caso de vectores de $\mathbf{R}^n$: se forma una matriz con los vectores, y se aplica gauss-jordan. Si cada renglón tiene un pivote, el conjunto **sí** genera al espacio vectorial completo. Si existe un renglón sin pivote, el conjunto de vectores **no** genera al espacio vectorial completo. Pero los vectores, ya sean polinomios o matrices, deben vectorizarse.

16.3. Generadores Conocidos de los Espacios Vectoriales

Es importante tener en mente los generadores *usuales* de los espacios vectoriales que trabajaremos.

Ejemplos

Es cierto que:

1. $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ genera a $\mathbf{R}^n$.

2. $\left\{1, x, x^2, \ldots, x^n\right\}$ genera a $\mathscr{P}_n$.

3. $\left\{1, x, x^2, \ldots\right\}$ genera a $\mathscr{P}$.

4. $\{\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{13}, \ldots, \mathbf{E}_{mn},\}$ genera a $\mathbf{M}_{m\times n}$.

16.4. Reducción del conjunto generador

En ciertas situaciones es importante determinar un conjunto de generadores *reducido*. Para ello, deberemos ser capaces de eliminar de un conjunto generador ciertos vectores que no aportan información al espacio generado. El siguiente resultado indica cuáles vectores se pueden eliminar de un conjunto generador.

Teorema

Si uno de los vectores $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\ldots$,$\mathbf{v_k}$ del espacio vectorial V es combinación lineal de los restantes, el generado permanece igual si se elimina dicho vector.

Ejemplo 16.4

Considere los vectores:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{v}_1 & = & -5 + 4\,x + x^3 \\ \mathbf{v}_2 & = & 5 - 2\,x - x^2 - 6\,x^3 \\ \mathbf{v}_3 & = & 2 - x + 2\,x^2 + 6\,x^3 \\ \mathbf{v}_4 & = & 6 - 2\,x - 6\,x^2 + 6\,x^3 \\ \mathbf{v}_5 & = & 9 - 4\,x + 3\,x^2 + 6\,x^3 \end{array}$$

y suponga que

$$W = \text{Gen}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$$

Indique qué opciones contienen vectores que se pueden remover del generador y que el conjunto restante puede seguir generando W

1. $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$

2. $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5$

3. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_5$

4. $\mathbf{v}_2$

Solución

Formamos $[\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_5|\mathbf{v}_3\mathbf{v}_4]$ y reducimos:

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} -5 & 5 & 9 & 2 & 6 \\ 4 & -2 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & -6 \\ 3 & -6 & 6 & 6 & 6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|rc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Concluimos que como queda un pivote en la parte derecha $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_4$ no pueden ser removidos **simultáneamente** y seguir generando el mismo espacio.

Formamos $[\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_4|\mathbf{v}_3\mathbf{v}_5]$ y reducimos:

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} -5 & 5 & 6 & 2 & 9 \\ 4 & -2 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -6 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & 6 & 6 & 6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Concluimos que como queda un pivote en la parte derecha $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_5$ no pueden ser removidos **simultáneamente** y seguir generando el mismo espacio.
Formamos $[\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\mathbf{v}_4|\mathbf{v}_1\mathbf{v}_5]$ y reducimos:

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} 5 & 2 & 6 & -5 & 9 \\ -2 & -1 & -2 & 4 & -4 \\ -1 & 2 & -6 & 0 & 3 \\ -6 & 6 & 6 & 3 & 6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Concluimos que como queda un pivote en la parte derecha $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_5$ no pueden ser removidos **simultáneamente** y seguir generando el mismo espacio.
Formamos $[\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_4\mathbf{v}_5|\mathbf{v}_2]$ y reducimos:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} -5 & 2 & 6 & 9 & 5 \\ 4 & -1 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & -6 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & 6 & 6 & -6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Concluimos que no como queda un pivote en la parte derecha $\mathbf{v}_2$ sí puede ser removido y seguir generando el mismo espacio ■

16.5. Dependencia Lineal

Después de espacios generados, el siguiente concepto en importancia en espacios vectoriales es el concepto de dependencia o independencia lineal. Este concepto es el mismo que en $\mathbf{R}^n$. Este concepto en $\mathbf{R}^n$ involucraba combinaciones lineales y el vector cero. Estos están presentes en cualquier espacio vectorial.

Definición 16.2
Se dice que un conjunto de vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_k$ es *linealmente dependiente* si hay escalares c_1, c_2, ..., c_k *no todos ceros* tales que

$$c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\,\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

Se dice *linealmente independiente* si no es linealmente dependiente; esto es, que la única combinación lineal que da el vector cero es la que tiene todos sus coeficientes cero. Se dice que un conjunto de vectores infinito es linealmente dependiente si posee un conjunto de vectores finito que es linealmente dependiente.

Ejemplo 16.5
Indique si el conjunto formado por las siguientes matrices es linealmente dependiente o independiente.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución
Lo que debemos determinar es cómo deben ser las constantes c_1, c_2, c_3 y c_4 para que se cumpla:

$$c_1\,A_1 + c_2\,A_2 + c_3\,A_3 + c_4\,A_4 = \mathbf{0}$$

Siguiendo las observaciones hechas con anterioridad, esto se convierte en la matriz aumentada que se reduce en:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Puesto que el sistema tiene solución única, los únicos valores que cumplen la anterior igualdad son:

$$c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ c_3 = 0,\ c_4 = 0.$$

Por lo tanto, el conjunto formado con esas matrices es linealmente independiente ■
Si el sistema hubiera tenido una columna sin pivote en la parte de la matriz de coeficientes, el sistema hubiera tenido una variable libre, y por tanto el sistema hubiera tenido infinitas soluciones, y por tanto, el conjunto en ese caso hubiera sido linealmente dependiente.

Observación

Es importante observar que incluir la matriz de ceros no tiene un uso real cuando se pregunta si un conjunto es dependiente o independiente. También es de observar que este tipo de preguntas se responden de igual manera que en el caso de vectores de $\mathbf{R}^n$: se forma una matriz con los vectores, y se aplica gauss-jordan. Si cada columna tiene un pivote, el conjunto **sí** es linealmente independiente. Si existe una columna sin pivote, el conjunto de vectores es lineamente dependiente. Pero los vectores, ya sean polinomios o matrices, deben vectorizarse.

16.6. Pruebas de dependencia lineal

Como se ha visto, para determinar si un conjunto es linealmente dependiente o independiente ha de aplicarse el proceso de Gauss-Jordan. Sin embargo, **a veces** se pueden revisar a simple vista ciertas pruebas y concluir sin necesidad de Gauss-Jordan. Las pruebas pueden sumarizarse en el siguiente resultado.

Teorema

Sea S un conjunto de vectores del espacio vectorial V, S es linealmente dependiente si

- teniendo un solo vector el vector es el vector cero, o
- tiene al vector cero como elemento, o
- teniendo dos vectores uno es un múltiplo escalar del otro, o
- contiene un subconjunto de vectores que es linealmente dependiente, o
- hay un vector de S que es combinación de los vectores restantes en S.

16.7. Unicidad de la combinación lineal

Teorema

Sea $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}\}$ un conjunto de vectores del espacio vectorial V que es linealmente independiente. Entonces

1. Si $\mathbf{v}$ es un vector que pertenece al generado por S, entonces $\mathbf{v}$ se escribe de forma única como combinación lineal de S. Esto es, si

$$\mathbf{v} = a_1\,\mathbf{v_1} + a_2\,\mathbf{v_2} + \cdots a_k\,\mathbf{v_k} = b_1\,\mathbf{v_1} + b_2\,\mathbf{v_2} + \cdots b_k\,\mathbf{v_k}$$

   entonces $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$,..., $a_k = b_k$.
2. Si $\mathbf{v}$ es un vector que no pertenece al generado por S, entonces $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}, \mathbf{v}\}$ es linealmente independiente.

16.8. Base

El concepto de base es uno de las más importantes en los espacios vectoriales. Este concepto tiene que ver con conjuntos de generadores *minimales*. Es decir, con conjuntos generadores donde cada vector aporta información **que los vectores restantes en el conjunto no poseen**.

Definición 16.3
Sea B un conjunto no vacío de vectores del espacio vectorial V distinto de cero, B es una *base* para V si:

1. B es linealmente independiente, y
2. B genera a V.

Ejemplo 16.6
Indique en cuáles opciones el conjunto dado es base para $\mathbf{M}_{22}$:

1. $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \right\}$
2. $B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \right\}$
3. $B_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \right\}$
4. $B_4 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -1 & -16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -33 & 18 \end{bmatrix} \right\}$

Solución
Veamos si B_1 es base: Formemos la matriz cuyas columnas son los elementos de B_1 vectorizados y reduzcamos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 & 4 \\ 5 & -6 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -4 & -6 \\ 5 & 2 & -5 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como en cada renglón hay pivote, B_1 genera a $\mathbf{M}_{22}$. Como en cada columna hay pivote, B_1 es linealmente independiente. Como B_1 genera a $\mathbf{M}_{22}$ y es linealmente independiente, B_1 es base para $\mathbf{M}_{22}$.
Veamos si B_2 es base: Formemos la matriz cuyas columnas son los elementos de B_2 vectorizados y reduzcamos:

$$\begin{bmatrix} -4 & -3 & 6 & -5 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & -4 & 0 \\ -5 & -2 & -5 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -392/1893 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 364/1893 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 794/1893 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1048/1893 \end{bmatrix}$$

Como en cada renglón hay pivote, B_2 genera a $\mathbf{M}_{22}$. Como hay una columna sin pivote, B_2 es linealmente dependiente. Como B_2 es linealmente dependiente, B_2 no es base para $\mathbf{M}_{22}$.
Veamos si B_4 es base: Formemos la matriz cuyas columnas son los elementos de B_4 vectorizados y reduzcamos:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 4 & -33 \\ 4 & -16 & 1 & 18 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/4 & 13/2 \\ 0 & 1 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como hay al menos un renglón sin pivote, B_4 no genera a $\mathbf{M}_{22}$. Con eso basta para decir que B_4 no es base para $\mathbf{M}_{22}$. Como hay una columna sin pivote, B_4 es linealmente dependiente. Con eso también bastaba para afirmar que B_4 no es base para $\mathbf{M}_{22}$ ■

16.9. Todo espacio tiene base

Una de las necesidades más grandes en espacios vectoriales es la de determinar una base para un espacio vectorial. El siguiente resultado es de tipo teórico y da la garantía de bases siempre existen.

Teorema

Cualquier espacio vectorial tiene una base.

16.10. Unicidad de la representación

El siguiente resultado ayudará a definir el concepto *vector de coordenadas* de un vector respecto a una base dada. Desde un punto de vista teórico, caracteriza en forma precisa lo que es una base.

Teorema

Un subconjunto $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}\}$ de un espacio vectorial V es una base para V si y sólo si para cada vector $\mathbf{v}$ en V existen escalares c_1, c_2,...,c_k **únicos** tales que

$$\mathbf{v} = c_1\,\mathbf{v_1} + c_2\,\mathbf{v_2} + \cdots + c_k\,\mathbf{v_k}$$

Demostración

Sea $\mathbf{v}$ un elemento cualquiera de V. Como B genera a V entonces existen c_1, c_2,...,c_k escalares tales que

$$\mathbf{v} = c_1\,\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$$

Esto prueba la existencia de los coeficientes c_i. Veamos ahora que los coeficientes son únicos. Supongamos que existan a_1, a_2,...,a_k escalares tales que

$$\mathbf{v} = a_1\,\mathbf{v}_1 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k$$

si restamos las anteriores igualdades se tiene:

$$\mathbf{0} = (c_1 - a_1)\,\mathbf{v}_1 + \cdots + (c_k - a_k)\mathbf{v}_k$$

como el conjunto B es linealmente independiente, entonces los coeficientes de la anterior combinación lineal deben todos ser cero:

$$c_i - a_i = 0,\ \forall i = 1, \ldots, k$$

es decir, $c_i = a_i$, $\forall i = 1, \ldots, k$. Esto prueba que los coeficientes de la combinación lineal son únicos ■