

HMFM010-1 Introducción al Cálculo (Etapa II)**Profesor:** Pablo Dartnell R.**Auxiliar:** Alejandro Bravo G.

Semana 2
13 de enero de 2025

P1 [Bernoulli III y número e]

a) Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{n}{n^2+1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

y deduzca que $\left(1 + \frac{n}{n^2+1}\right)^n \rightarrow e$.b) Sea $(u_n) \in (0, 1)$ y $\frac{1}{nu_n} \rightarrow 0$. Demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - u_n)^n = 0$.

c) Calcule los siguientes límites:

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n$

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^{(n-1)^2}$

P2 [Exponencial y logaritmo]

a) Calcule los siguientes límites:

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(n^2 \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1\right) - 1\right)$

v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(3 + 2e^n)$

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n}$

vi) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{e} - 1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$

iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln(n))^2}{n}$

vii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}}$

iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(1 + e^{an}), a > 0$

b) Sea (h_n) una sucesión tal que $n \cdot h_n \rightarrow L \in \mathbb{R}$. Pruebe que $h_n \rightarrow 0$ y que $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + h_n)^n = e^L$.c) Sea $x \in \mathbb{R}$ y (h_n) una sucesión nula. Pruebe que $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + xh_n)^{\frac{1}{h_n}} = e^x$.**P3 [Límites de funciones]**

Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow b} \frac{|x^2 - b^2|}{x - b}, \text{ con } b \in \mathbb{R}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} (x)^{\frac{1}{1-x}}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x^2)}{1 - \cos(5x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x}, \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{ax} - 1}{x - 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)}$

h) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x) - \cos(x)}{x - \frac{\pi}{4}}$

P4 [Límites por definición usando sucesiones y $\varepsilon - \delta$]

Demuestre por definición de límite que:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ no existe}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} 3x - 5 = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 4} 7x - 1 = 27$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 5} x^2 = 25$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 8} \sqrt{x+1} = 3$$

P5 [Continuidad y límites laterales]

a) Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{si } x < 1 \\ 2x, & \text{si } x = 1 \\ x^3 + 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Determinar (i) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, (ii) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, (iii) ¿existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$? y (iv) ¿es f continua en $x = 1$?

b) Estudie si existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ para

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 3}{x^2 + 3}, & \text{si } x < 1 \\ \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x - 1}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

c) Determine para qué valores de a y b la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^3 - 1}{x^2 + x - 2}, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x, & \text{si } x = 1 \\ \frac{x^2 + (b-1)x - b}{x - 1}, & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

es continua en todo $\mathbb{R}$.

d) Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice **aditiva** si $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Pruebe que si f es aditiva y continua en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces es continua en todo punto $x \in \mathbb{R}$.

Hint: Lo que busca probar es que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \forall a \in \mathbb{R}$. Primero pruebe, usando un cambio de variable, que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x - x_0 + a)$. Luego, compruebe que $f(-x_0) = -f(x_0)$. Finalmente, usando continuidad en x_0 y aditividad, concluya.