HMFM010-1 Introducción al Cálculo (Etapa II)
Profesor: Pablo Dartnell R.
Auxiliar: Alejandro Bravo G.

Para estudiantes de Educación Básica y Media.
UNIVERSIDAD DE CHILE

Semana 1

06 de enero de 2025

P1 [Axioma del supremo]

a) Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$, no vacíos y acotados superiormente. Pruebe que $\sup(A \cup B)$ existe y que

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$$

b) Sean A y B conjuntos de reales positivos, no vacíos y acotados superiormente. Probar que AB es acotado superiormente y $\sup(AB) = \sup(A) \cdot \sup(B)$. Nota: $AB = \{x \cdot y : x \in A,\ y \in B\}$.

c) Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$, conjuntos no vacíos. Suponga que $x \leq y$ para cada $x \in A$ y cada $y \in B$. Suponga que existen $\sup(A)$ e $\inf(B)$. Pruebe que $\sup(A) \leq \inf(B)$.

d) Considere dos conjuntos $V, W \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos tales que:

$$\forall x \in V, \forall y \in W : x + y < 0,$$

demuestre que ambos conjuntos son acotados superiormente y que además $\sup(\mathrm{V}) + \sup(\mathrm{W}) \leq 0$.

e) Muestre que $\sup\left(\sqrt{A}\right) = \sqrt{\sup(A)}$, donde $A \subseteq \mathbb{R}_+$, es no vacío y acotado superiormente. Considere $\sqrt{A} = \{\sqrt{x} : x \in A\}$.

f) Sea b un número real. Definamos el conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0,\ x \leq b + \varepsilon\}$$

Pruebe que A es acotado superiormente y que tiene supremo. Demuestre además que $\sup(A) = b$.

P2 Cacule los límites de las siguientes sucesiones:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3+7}{5n-8n^3}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \sqrt{n+3}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1})\sin(n!)}{n+7}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+n)^2}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$, con $a \geq b > 0$

h) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+n}{na_n^2+1}$, donde $a_n \to L > 0$

i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n} + \frac{3}{n} cos\left(\frac{n^n}{n!}\right) + \frac{2n+1}{3-3n}}{\frac{2^n}{n!} + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{1-\frac{n!}{n^n}}}$

P3 [Cotas y axioma del supremo]

a) Sean los conjuntos:

$$[a,b]\,;[a,b)\,;(a,b]\,;(a,b)\,;(-\infty,b)\,;(-\infty,b]\,;(a,\infty)\,;[a,\infty)\,;\mathbb{R},$$

determine, de existir, el mínimo, ínfimo, supremo y máximo (para cada caso).

b) Demuestre que si un conjunto tiene máximo, ese máximo es igual al supremo.

c) Determine y justifique si existe mínimo, ínfimo, supremo y máximo del siguiente conjunto: $D = (6, 100] \cup (150, 350]$.

d) Demuestre la caracterización del supremo dada por $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists x \in A)\, x > s - \varepsilon$, con A un conjunto acotado superiomente no vacío y s el supremo.

P4 Demuestre por definición de límite que:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n+8}{3n+7} = 2$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{1}{n} + 1} = 1$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n^8$ diverge

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\cos(n\pi)}{n^2+1} = 0$

P5 [Bernoulli]

a) Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, para $q \in (0,1)$, usando la Desigualdad de Bernoulli I y el teorema del sandwich.

b) Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, con $a > 1$, usando la Desigualdad de Bernoulli I y el teorema del sandwich.

c) Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, con $a > 0$, usando la Desigualdad de Bernoulli II y el teorema del sandwich.

P6 [Sucesiones monótonas]

a) Considere la sucesión definida por la recurrencia:

$$M_1 = a, \qquad M_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2 + M_n^2}{a+1}}, \text{ con } 0 < a < b,$$

i) Demuestre que M_n es acotada superiormente por b.

ii) Demuestre que M_n es creciente.

iii) Justifique que el límite de M_n existe y calcúlelo.

b) Sea $a \in (0,1)$ fijo. Considere la sucesión a_n definida por:

$$a_1 = a, \qquad a_{n+1} = a_n\,(2 - a_n)\,,$$

i) Demuestre que $\forall r \in \mathbb{R}$ se tiene que $r(2-r) < 1$.

ii) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in (0,1)$.

iii) Demuestre que a_n es una sucesión creciente y calcule su límite.

c) Considere la sucesión $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

$$P_0 > 0, \qquad P_{n+1} = \frac{bP_n}{a + P_n},$$

donde a, b son constantes positivas.

i) Demuestre que si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, los únicos valores posibles de su límite son 0 y $b - a$.

ii) Pruebe que si $a > b$, entonces $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y converge a 0.

P7 *a*) Considere el siguiente conjunto:

$$A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$$

Encuentre por inspección, si es que existen, $\min(A)$ y $\sup(A)$.

b) Demuestre, usando la propiedad arquimediana en forma apropiada, que $\sup(A)=1$.

P8 [Límite por definición]

a) Sea (a_n) una sucesión que converge a 1 y (b_n) una sucesión tal que $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq b_n \leq 1$. Usando la definición de convergencia, demuestre que (b_n) converge a 1.

b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = L$, demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{X_n} = \sqrt{L}$, para $L > 0$.