HMFM008-1: Introducción a la Física Clásica
Profesor: Claudio Falcón
Auxiliares: Felipe Cubillos, Fernanda Padró, Paloma Vildoso

Guía 0

Herramientas matemáticas

La física corresponde a una ciencia que estudia fenómenos en donde intervienen cantidades medibles y que pueden cuantificarse, por lo tanto, el principal lenguaje que se utiliza es la matemática. A continuación, se presentan las principales herramientas que serán útiles de recordar a lo largo del curso.

1. Exponentes y radicales

Cuando multiplicamos más de una vez una cantidad por sí misma es conveniente utilizar la notación de potencia, consistente en una base y un superíndice denominado exponente. Por ejemplo, en el término x^n, x corresponde a la base y n al exponente, y equivale a realizar una multiplicación donde x actúa n veces.

Las principales reglas al momento de operar con exponentes son:

- **Regla de multiplicación:** el producto de dos términos con igual base y distintos exponentes corresponde al término base elevado a la suma de dichos exponentes, es decir:

$$x^m x^n = x^{m+n} \tag{1}$$

- **Exponente negativo:** si la base es distinta de cero y posee exponente negativo, se tiene la siguiente equivalencia:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \tag{2}$$

- **Exponente cero:** cualquier cantidad elevada a cero corresponde a la unidad:

$$x^0 = 1 \tag{3}$$

- **Regla de división:** el cociente de dos cantidades de igual base y distinto exponente corresponde a la base elevada a la resta de dichos exponentes, es decir:

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \tag{4}$$

- **Potencia de una potencia:** cuando una potencia se eleva a otra potencia se multiplican los exponentes y se conserva la base, es decir:

$$(x^m)^n = x^{mn} \tag{5}$$

- **Potencia del producto y el cociente:** cuando una multiplicación o división de términos está elevada a una potencia, el resultado corresponde a aplicar el exponente a cada uno de los términos involucrados, es decir:

$$\left(\frac{xy}{z}\right)^n = \frac{x^n y^n}{z^n} \tag{6}$$

- **Definición de radical:** si $x^n = a$, entonces a corresponde a la n-ésima potencia de x, pero esto también define que x es la n-ésima raíz de a. Una raíz, o radical, puede expresarse mediante un exponente racional, es decir:

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n} \tag{7}$$

- **Raíces del producto y el cociente:** cuando una multiplicación o división de términos está elevada a una potencia racional, el resultado corresponde a aplicar el exponente a cada uno de los términos involucrados, es decir:

$$\sqrt[n]{\frac{xy}{z}} = \frac{\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}}{\sqrt[n]{z}} \tag{8}$$

- **Raíz de una potencia:** la raíz de una potencia corresponde a un exponente racional, tal que:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n} \tag{9}$$

2. Ecuación de la recta

Existen incontables fenómenos físicos que se representan matemáticamente con una recta, o función lineal. Una de las formas de escribir la ecuación de la recta corresponde a:

$$y = mx + n \tag{10}$$

Donde m corresponde a la pendiente de inclinación de la recta con respecto al eje x y n es el punto en donde la recta intersecta al eje y, también conocido como coeficiente de posición.

Conocidos dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) que pertenecen a una recta, o si se quiere encontrar la recta que une dos puntos de un plano cartesiano, su ecuación paramétrica viene dada por:

$$y - y_1 = m(x - x_1), \qquad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{11}$$

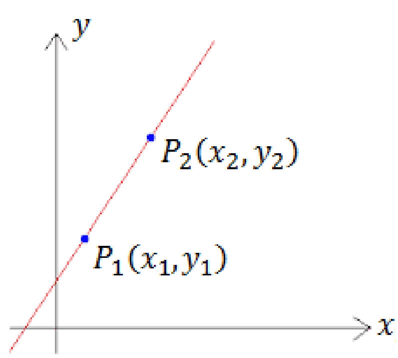

Figura 1: Recta que une los puntos P_1 y P_2, descritos respectivamente por (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

3. Solución de la ecuación cuadrática

En numerosos problemas de la física es necesario resolver ecuaciones de segundo grado, donde la incógnita está elevada a la segunda potencia. Dichas relaciones se denominan ecuaciones cuadráticas y es conveniente denotarla de la siguiente forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{12}$$

Entonces, si a es distinto de cero, existen dos soluciones posibles para la ecuación anterior, dadas por:

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{13}$$

Cabe destacar que a, b y c pueden ser números negativos.

4. Escalares y vectores

Existen ciertas cantidades físicas que pueden especificarse completamente por su magnitud, que está compuesta por un número y una unidad de medida, así como otras que se especifican necesariamente por su magnitud y su dirección (orientación y sentido), por ende consiste en una magnitud, una unidad y una dirección. Las primeras cantidades referidas corresponden a cantidades escalares, mientras que las segundas corresponden a vectores.

Acá es necesario detenerse un momento para mencionar cómo se opera con vectores, ya que el cálculo con escalares ya es conocido. En primer lugar, recordemos que un vector $\vec{v}$ se puede representar gráficamente en un plano cartesiano como un segmento de recta que surge en el origen y que llega a un cierto punto del plano de coordenadas (v_x, v_y). Las coordenadas anteriores permiten representar un vector de forma análitica. Además, v_x y v_y se denominan componentes de dicho vector.

Siguiendo la lógica anterior, se define el módulo de un vector en dos dimensiones como la cantidad:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{14}$$

Gráficamente, un primer método para sumar y restar vectores es dibujar el vector que aparezca más a la izquierda en la expresión y donde este termine dibujar el siguiente, respetando las direcciones y magnitudes de cada uno (esto último se refiere a que el dibujo debe ser a escala, por ejemplo, un cuadrado del cuaderno puede corresponder a avanzar 1 cm), entonces, el vector resultante de unir el origen del primer vector con el punto final del último vector operado, es el vector resultante de la operación; un segundo método corresponde a dibujar los dos vectores a operar con un mismo origen y proyectarlos nuevamente para formar un paralelepípedo, cuya diagonal es el vector resultante, operaciones más largas requieren iterar este método hasta finalizar. Véase la figura 2.

Analíticamente, si se tienen dos vectores $\vec{v} = (v_x, v_y)$ y $\vec{w} = (w_x, w_y)$, se puede calcular la suma de ellos como:

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_x + w_x, v_y + w_y) \tag{15}$$

Las principales propiedades de la suma se enumeran en la Tabla 2.

Otra operación interesante consiste en la multiplicación de un vector por un escalar, cuyos casos posibles se enumeran a continuación. Además, se representan gráficamente en la figura 3.

- Si $\lambda > 1$y $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces $\lambda\vec{v}$ es un vector en la dirección de $\vec{v}$, pero de mayor longitud.

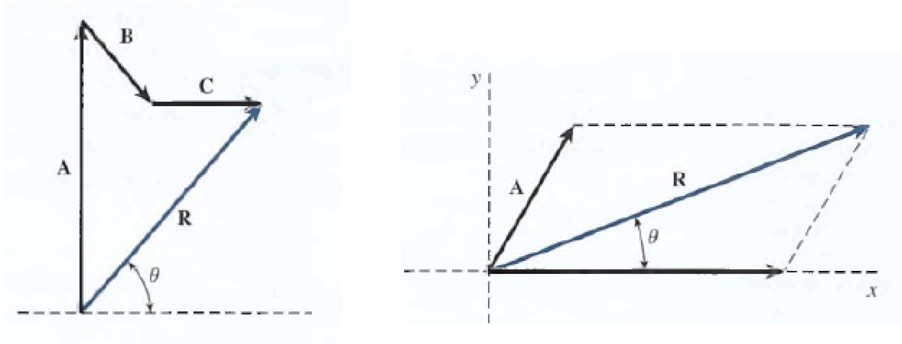

Figura 2: Ejemplo de los dos métodos para sumar vectores.

Conmutatividad	$\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$
Asociatividad	$(\vec{v}+\vec{w})+\vec{u}=\vec{v}+(\vec{w}+\vec{u})$
Identidad	$\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$
Inverso	$\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$
Distributividad	$\lambda(\vec{v}+\vec{w})=\lambda\vec{v}+\lambda\vec{w}, \quad \lambda\in\mathbb{R}$
Distributiva escalar	$(\lambda+\mu)\,\vec{v}=\lambda\vec{v}+\mu\vec{v}, \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$

Cuadro 1: Propiedades de la suma de vectores.

- Si $0<\lambda<1$ y $\vec{v}\neq\vec{0}$, entonces $\lambda\vec{v}$ es un vector en la dirección de $\vec{v}$, pero de menor longitud.
- Si $\lambda<-1$ y $\vec{v}\neq\vec{0}$, entonces $\lambda\vec{v}$ es un vector en la dirección opuesta de $\vec{v}$, pero de mayor longitud.
- Si $-1<\lambda<0$ y $\vec{v}\neq\vec{0}$, entonces $\lambda\vec{v}$ es un vector en la dirección opuesta de $\vec{v}$, pero de menor longitud.
- Si $\lambda=0$ y $\vec{v}\neq 0$, entonces $\lambda\vec{v}$ es el vector $\vec{0}=(0,0)$.
- Si $\lambda=1/|\vec{v}|$ y $\vec{v}\neq 0$, entonces $\lambda\vec{v}$ es un vector en la dirección de $\vec{v}$ y posee módulo 1, por lo que se denomina vector unitario y se denota como $\hat{e}_v$. Lo anterior nos permite escribir el vector como $\vec{v}=|\vec{v}|\,\hat{e}_v$.

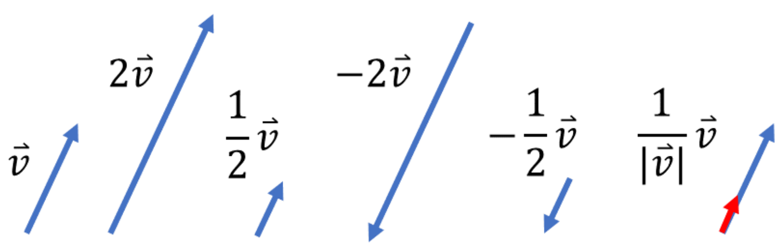

Figura 3: Ejemplo de los distintos casos de multiplicación de un vector por un escalar. En el último caso se describe el vector rojo.

5. Propiedades trigonométricas

La trigonometría es una rama de la matemática cuyo significado etimológico es "la medición de los triángulos". En términos generales, es el estudio de las razones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. Es de mucha relevancia en el área de la geometría analítica y en la de ecuaciones diferenciales, así como también en física y astronomía.

5.1. Definición de las cantidades trigonométricas elementales

La trigonometría estudia principalmente la relación entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo y una circunferencia. Con este propósito se definen una serie de funciones. Consideremos el triángulo de la figura 4. El seno es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa, el coseno es la razón entre el cateto adyacente o contiguo al ángulo y la hipotenusa, mientras que la tangente es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto adyacente. De forma matemática, respectivamente:

$$\sin(x) = \frac{b}{r}\,, \qquad \cos(x) = \frac{a}{r}\,, \qquad \tan(x) = \frac{a}{b} \tag{16}$$

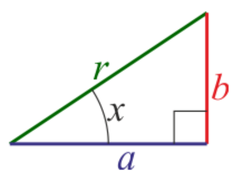

Figura 4: Ejemplo de triángulo rectángulo y sus principales parámetros.

En ocasiones también es útil utilizar el inverso multiplicativo de estas cantidades, dadas respectivamente por:

$$\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)} = \frac{r}{b}\,, \qquad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{r}{a}\,, \qquad \operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{a}{b} \tag{17}$$

5.2. Identidades y propiedades útiles

Mediante el uso del teorema de Pitágoras, es posible corroborar las siguientes identidades trigonométricas:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1\,, \qquad \tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)\,, \qquad \operatorname{cotan}^2(x) + 1 = \operatorname{cosec}^2(x) \tag{18}$$

Por otro lado, si denotamos la tangente de un ángulo x como $u = \tan(x)$, es posible expresar las funciones seno y coseno, respectivamente, como:

$$\sin(x) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\,, \qquad \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \tag{19}$$

Otra propiedad relevante es la paridad de las funciones. La función $\sin(x)$ es impar con respecto al origen, es decir, $\sin(-x) = -\sin(x)$. En contraste, la función coseno es impar con respecto al origen, es decir, $\cos(-x) = \cos(x)$.

En ocasiones también es útil conocer expresiones para las funciones trigonométricas de la suma o resta de dos ángulos. Estas corresponden a las siguientes relaciones:

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(x) \pm \cos(x)\sin(y) \qquad \cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)} \tag{20}$$

Finalmente, las relaciones entre sumas y productos de senos y cosenos vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \sin(x) \pm \sin(y) &= 2\sin\left(\frac{x \pm y}{2}\right)\cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right) \\ \cos(x) + \cos(y) &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \cos(x) - \cos(y) &= -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{aligned} \tag{21}$$

5.3. Teorema del seno y del coseno

Es posible extender la definición de las funciones trigonométricas a triángulos que no sean necesariamente rectángulos. Consideremos el triángulo dado en la figura 5. El teorema del seno postula las siguientes relaciones:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c} \tag{22}$$

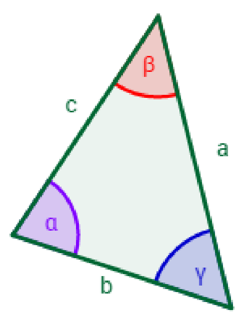

Figura 5: Triángulo arbitrario y sus principales parámetros.

Por otro lado, el teorema del coseno postula las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \end{aligned} \tag{23}$$

Observación: Este teorema es el caso general al conocido *Teorema de Pitágoras*, donde uno de los ángulos vale 90^o (o $\pi/2$).

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{24}$$

5.4. Círculo unitario

Se define como círculo unitario a un círculo con centro en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas y radio igual a 1. Cada punto del círculo unitario (x, y) se puede representar como las funciones trigonométricas $(\cos t, \sin t)$, donde t es el ángulo que forma el segmento que une el origen con el punto y el eje x positivo, como se muestra en la Figura 6. Las coordenadas de un punto en el círculo unitario nos dan directamente los valores del coseno y el seno del ángulo correspondiente y nos permite visualizar gráficamente cómo varían las funciones seno y coseno a medida que aumenta el ángulo.

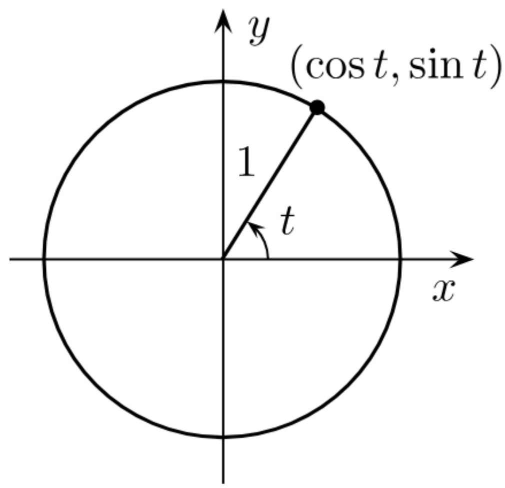

Figura 6: Esquema círculo unitario.

La importancia del circulo unitario radica en que permite calcular los valores de las razones trigonométricas para cualquier ángulo sin necesidad de utilizar triángulos rectángulos. Además, Facilita visualmente la comprensión de las propiedades de las funciones trigonométricas y sus gráficas.

Ejemplo: Si tomamos un punto P en el círculo unitario que forma un ángulo de 30^o con el eje x positivo, sus coordenadas serán aproximadamente $(x, y) = (0.87, 0.5)$. Por lo tanto, las funciones trigonométricas son $\cos 30^o \approx 0.87$ y $\operatorname{sen} 30^o \approx 0.5$.

Ejercicio: Si los valores de $\operatorname{sen} t = 37$ y t está en el segundo cuadrante, halle $\cos t$.
Ejercicio: Si los valores de $\cos t = 2425$ y t está en el cuarto cuadrante, halle $\operatorname{sen} t$.

5.5. Paridad

La paridad de una función es una característica que nos indica cómo se comporta la gráfica de esa función al reflejarla respecto al eje y o al origen.

Función par: Una función es par si al reemplazar la variable independiente (generalmente x) por su opuesto $(-x)$, el valor de la función no cambia. Es decir, $f(-x) = f(x)$. La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje y. Imagina que doblas la gráfica por el eje y: las dos partes coincidirán perfectamente.
Ejemplo: La función $f(x) = x^2$ es par, ya que $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

Función impar: Una función es impar si al reemplazar la variable independiente por su opuesto, el valor de la función cambia de signo. Es decir, $f(-x) = -f(x)$. La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen. Si giras la gráfica 180 grados alrededor del origen, la gráfica original y la girada coincidirán.
Ejemplo: La función $f(x) = x^3$ es impar, ya que $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

Las funciones trigonométricas también tienen paridad:

- Seno es una función impar. Esto significa que $\operatorname{sen} -x = -\operatorname{sen} x$. Si rotamos un ángulo $-x$ (en sentido horario) a partir del eje x positivo, llegamos a un punto simétrico respecto al origen del punto que obtenemos al rotar un ángulo x (en sentido antihorario). Las ordenadas de estos puntos (que corresponden al valor del seno) son opuestas.
- Coseno es una función par. Esto significa que $\cos -x = \cos x$. Si rotamos un ángulo $-x$, las abscisas de los puntos correspondientes (que corresponden al valor del coseno) son iguales.
- Tangente es una función impar. Esto significa que $\tan -x = -\tan x$.

Conocer la paridad de una función puede simplificar cálculos, especialmente en trigonometría y cálculo. Además, nos ayuda a entender la forma de la gráfica de una función sin necesidad de trazar muchos puntos

5.6. Valores útiles

En la siguiente table se ilustran los valores de las funciones trigonométricas con los ángulos mas comunes:

Grados	0	30^o	45^o	60^o	90^o	180^o	270^o	360^o
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	no definida	0	no definida	0

Cuadro 2: Valores de relaciones trigonométricas