Pauta Control 2

Precálculo I. 20 de enero de 2023.

Prof. de Cátedra: Pablo R. Dartnell R.
Prof. Aux.: Máximo Flores Valenzuela, Nicolás Cornejo, Gonzalo Ovalle J., Francisco Urbina

P1. (a) (**1,5 pts.**) Calcule la siguiente suma:

$$S = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + 99 \cdot 101$$

Indicación: No es necesario simplificar el resultado final.

Solución: Notar que la suma S se reescribe como:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{50} (2k-1)(2k+1) &= \sum_{k=1}^{50} 4k^2 - 1 \\
&= 4 \cdot \sum_{k=1}^{50} k^2 - \sum_{k=1}^{50} 1 \\
&= 4 \cdot \frac{50 \cdot (50+1) \cdot (2 \cdot 50 + 1)}{6} - (50 - 1 + 1) \\
&= 2 \cdot \frac{50 \cdot 51 \cdot 101}{3} - 50 \\
&= 2 \cdot 50 \cdot 17 \cdot 101 - 50 \\
&= 50 \cdot (2 \cdot 17 \cdot 101 - 1) \\
&= 171650
\end{aligned}$$

(*Obs.: No es necesario llegar al resultado simplificado.*)

Distribución de puntajes:

- **0,7 pts.** Por correcta identificación de la sumatoria a calcular.
- **0,8 pts.** Por el correcto cálculo de la sumatoria planteada.
- En caso de que se haya planteado una sumatoria incorrecta pero se haya resuelto correctamente, se asignó **0,5 pts.**.

(b) (**1,5 pts.**) Usando solo los axiomas de cuerpo de los números reales, pruebe que $\frac{6}{2} = 3$.

Solución: Comenzamos trabajando el lado izquierdo hasta llegar al derecho:

$$\begin{aligned}
\frac{6}{2} &= 6 \cdot 2^{-1} && \text{(Def. de cuociente)} \\
&= (5+1) \cdot 2^{-1} && \text{(Def. de 6)} \\
&= ((4+1)+1) \cdot 2^{-1} && \text{(Def. de 5)} \\
&= (((3+1)+1)+1) \cdot 2^{-1} && \text{(Def. de 4)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= ((((2+1)+1)+1)+1)\cdot 2^{-1} && \text{(Def. de 3)}\\
&= (((2+1)+1)+(1+1))\cdot 2^{-1} && \text{(Ax. Asociatividad)}\\
&= ((2+(1+1))+(1+1))\cdot 2^{1} && \text{(Ax. Asociatividad)}\\
&= ((2+2)+2)\cdot 2^{-1} && \text{(Def. de 2)}\\
&= (2+2)\cdot 2^{-1}+2\cdot 2^{-1} && \text{(Ax. Distributividad)}\\
&= (2\cdot 2^{-1}+2\cdot 2^{-1})+2\cdot 2^{-1} && \text{(Ax. Distributividad)}\\
&= (1+1)+1 && \text{(Def. de inverso multiplicativo)}\\
&= 2+1 && \text{(Def. de 2)}\\
&= 3 \ \blacksquare && \text{(Def. de 3)}
\end{aligned}
$$

Distribución de puntajes:

- Puntaje asignado de forma proporcional al número de pasos hechos correctamente, esto debido a las múltiples formas de resolverlo.

(c) (**3 pts.**) Resuelva la siguiente inecuación:

$$\frac{|x|-5}{|x+5|} \geq 1$$

Solución: Notemos de inmediato que $x=-5$ no es solución (no satisface la inecuación). Por lo tanto, trabajaremos con $x \neq -5$. Dado esto, $|x+5|>0$, podemos multiplicar por dicho factor sin alterar el sentido:

$$|x|-5 \geq |x+5|$$

Los puntos críticos son $x=0$ y $x=-5$. Separémonos en casos:

<u>Caso 1:</u> $x \in (-\infty,-5)$. Estamos a la izquierda de ambos puntos críticos, por lo tanto $x+5<0$ y $x<0$. Así, $|x|=-x$ y $|x+5|=-(x+5)$, por lo tanto la inecuación queda:

$$-x-5 \geq -(x+5) \iff -x-5 \geq -x-5$$

Esto es cierto para cualquier número real x (se cumple la igualdad), por lo tanto la solución es $x \in \mathbb{R}$. Sin embargo, para obtener la solución del caso tenemos que intersectar con el intervalo de trabajo:

$$S_1 = \mathbb{R} \cap (-\infty,-5) = (-\infty,-5)$$

<u>Caso 2:</u> $x \in (-5,0)$. Estamos a la derecha de $x=-5$ y a la izquierda de $x=0$, así, $x+5>0$ y $x<0$. La inecuación queda:

$$-x-5 \geq x+5 \iff x \leq -5$$

La solución del caso es:

$$S_2 = (-5,0) \cap (-\infty,-5] = \emptyset$$

<u>Caso 3:</u> $x \in (0,+\infty)$. Aquí ya estamos a la derecha de ambos puntos críticos, por lo tanto $x>0$ y $x+5>0$. Así, la inecuación queda:

$$x-5 \geq x+5 \iff -5 \geq 5$$

Esto no es cierto para ningún real. Así, la solución de este caso es:

$$S_3 = \emptyset \cap (0, +\infty) = \emptyset$$

Ya descartamos el caso $x = -5$, pero falta ver qué pasa con el punto crítico $x = 0$. Evaluémoslo en la inecuación:

$$|0| - 5 \geq |0 + 5| \iff -5 \geq 5$$

Esto tampoco se cumple, por lo tanto $x = 0$ no es solución. La solución global es la unión de los intervalos que nos dio cada caso:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = (-\infty, -5) \cup \emptyset \cup \emptyset = (-\infty, -5)$$

Distribución de puntajes:

- **0,4 pts.** Por correcta identificación de puntos críticos y división de casos.
- **0,7 pts.** Por cada caso resuelto de forma correcta.
- **0,5 pts.** Por obtención de la solución final.
- Si hubo un incorrecto planteamiento de casos o resolución, se asignó **0,3 pts.**.

P2. (a) (**3 pts.**) Determine la ecuación de la circunferencia que pasa por $(-2, 0)$, tiene radio 5 y la coordenada x del centro es 1. ¿Es única la solución?

Solución: Para empezar, nos piden calcular la ecuación de una circunferencia, las cuales tienen la siguiente forma:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Donde (x_0, y_0) es el centro de la circunferencia y r su radio. Además nos dicen coordenada x del centro es 1 y su radio es 5, es decir, $x_0 = 1$ y $r = 5$. Así la ecuación de la circunferencia con centro $(x_0, y_0) = (1, y_0)$ resulta:

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 + (y - y_0)^2 &= 5^2 = 25 \\ \iff x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y_0 y + y_0^2 &= 25 \qquad (1) \end{aligned}$$

Para concluir, basta notar que el punto $(-2, 0)$ pertenece a la circunferencia buscada por lo que tiene que satisfacer la ecuación anterior. Insertando sus coordenadas en la ecuación tenemos:

$$(-2)^2 - 2(-2) + 1 + 0^2 - 2y_0 \cdot 0 + y_0^2 = 25 \qquad (2)$$

Es decir, $y_0^2 = 25$. Así, $y_0 = \pm 5$. Luego, los 2 centros posibles para la circunferencia pedida son $(1, -5)$ y $(1, 5)$, por lo tanto, la solución **no** es única. La ecuación queda:

$$(x - 1)^2 + (y \pm 5)^2 = 25 \qquad (3)$$

Distribución de puntajes:

- **1 pts.** Por llegar a (1).
- **1 pts.** Por pasar de (1) a (2).
- **1 pts.** Por pasar de (2) a (3).

(b) (**3 pts.**) Considere una circunferencia C que tiene radio $r > 0$ y centro $(0, b)$, con $b < 0$, y una recta L de ecuación $y = mx$. Demuestre que la circunferencia C intersecta a la recta L sí y solo sí $r\sqrt{1+m^2} + b \geq 0$.

Solución: Primero, construyamos la ecuación de la circunferencia:

$$C : (x-0)^2 + (y-b)^2 = r^2, \text{ o sea, } x^2 + (y-b)^2 = r^2 \qquad (1)$$

Ahora bien, para buscar las intersecciones, debemos despejar una variable de cualquiera de las dos ecuaciones y reemplazarla en la otra. Como la recta es $y = mx$, nos conviene reemplazar este valor en la ecuación de la circunferencia:

$$\begin{aligned} x^2 + (mx-b)^2 = r^2 &\iff x^2 + m^2x^2 - 2mbx + b^2 = r^2 \\ &\iff x^2(1+m^2) - 2mbx + (b^2 - r^2) = 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

(3) Esto es una ecuación cuadrática en x, cuyas soluciones son las intersecciones de la recta con la circunferencia. Para que haya al menos una intersección, necesitamos que el discriminante sea mayor o igual a 0:

$$\begin{aligned} \Delta = b^2 - 4ac \geq 0 &\implies (-2mb)^2 - 4(1+m^2)(b^2 - r^2) \geq 0 \\ &\implies 4m^2b^2 - 4(b^2 - r^2 + m^2b^2 - m^2r^2) \geq 0 \\ &\implies 4m^2b^2 - 4b^2 + 4r^2 - 4m^2b^2 + 4m^2r^2 \geq 0 \\ &\implies -4b^2 + 4r^2 + 4m^2r^2 \geq 0 \\ \text{(dividimos en 4)} &\implies -b^2 + r^2 + m^2r^2 \geq 0 \\ &\implies r^2(1+m^2) - b^2 \geq 0 \qquad (4) \\ \text{(suma por diferencia)} &\implies (r\sqrt{1+m^2} + b)(r\sqrt{1+m^2} - b) \geq 0 \end{aligned}$$

Ahora bien, notemos que $b < 0$, entonces $-b > 0$. Por lo tanto,

$$r\sqrt{1+m^2} - b = r\sqrt{1+m^2} + (-b) > 0$$

Si dividimos por dicho factor, llegamos a la desigualdad que queríamos demostrar. (5)

Distribución de puntajes:

- **0,5 pts.** Por llegar a (1).
- **0,5 pts.** Entre (1) y (2).
- **1 pts.** Por el razonamiento de (3).

- **0,5 pts.** Por llegar a ecuación (4).
- **0,5 pts.** Por concluir hasta (5).

P3. (a) (**3 pts.**) Encuentre e identifique el lugar geométrico de la siguiente relación, señalando los elementos principales según corresponda (vértice, foco, centro, etc.):

$$4x^2 + 25y^2 - 40x + 96 = 0$$

Solución: Podemos completar el cuadrado de x. Dado que x^2 está acompañado de un 4, podemos dividir por dicho número:

$$x^2 - 10x + \frac{25}{4}y^2 + 24 = 0$$

Como $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$, nos falta sumar 1 para obtener el cuadrado perfecto:

$$(x-5)^2 + \frac{25}{4}y^2 = 1$$

Podemos reacomodar el término que acompaña a y de la siguiente forma:

$$(x-5)^2 + \frac{y^2}{(4/25)} = 1 \iff (x-5)^2 + \frac{y^2}{(2/5)^2} = 1$$

Identificamos $x_0 = 5$, $y_0 = 0$, $a = 1$, $b = 2/5$. Como $a > b$, esta es una elipse horizontal, con centro en $C = (5, 0)$, excentricidad $e = \frac{\sqrt{1 - 4/25}}{1} = \sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$, focos $F_1 = \left(5 + \frac{\sqrt{21}}{5}, 0\right)$ y $F_2 = \left(5 - \frac{\sqrt{21}}{5}, 0\right)$ y directrices $D_1 : x = 5 + \frac{5}{\sqrt{21}}$ y $D_2 : x = 5 - \frac{5}{\sqrt{21}}$.

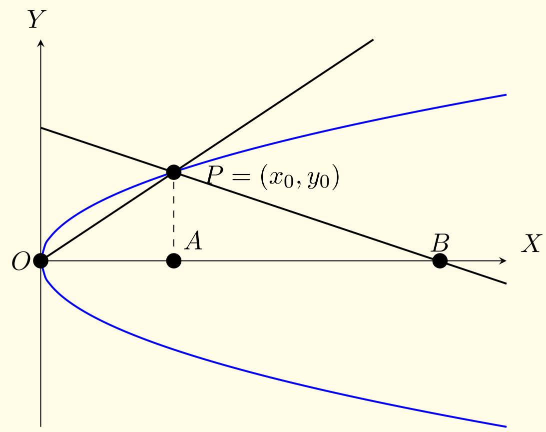
Distribución de puntajes:

- **1 pts.** Por completar el cuadrado de la variable x.
- **1 pts.** Por acomodar la ecuación para que quede como una elipse.
- **1 pts.** Por reconocer los elementos principales del lugar geométrico.

(b) (**3 pts.**) Considere la parábola de ecuación $y^2 = 4px$ con $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fijo y $P = (x_0, y_0)$ un punto de ella. La recta perpendicular a $\overline{OP}$ por P corta al eje OX en B y la proyección del punto P sobre el eje OX es A. Demuestre que el trazo $\overline{AB}$ tiene longitud constante.

Indicación: $O = (0,0)$ es el origen del sistema de coordenadas.

Solución: Lo primero es bosquejar la situación:



(*Obs.: Por la escala del dibujo, pareciera que $\overline{OP}$ no es perpendicular a $\overline{PB}$, sin embargo, lo más importante del bosquejo es la ubicación de los puntos, la orientación de la parábola y las rectas.* ***Como $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la parábola puede abrir hacia la derecha o izquierda. Los dos bosquejos estarían bien.***)

Con la información que tenemos, podemos construir la ecuación de la recta $\overline{OP}$. Notemos que la pendiente es:

$$m_{OP} = \frac{y_0 - 0}{x_0 - 0} = \frac{y_0}{x_0}$$

Con la ecuación punto-pendiente, obtenemos que $\overline{OP} : y = \frac{y_0}{x_0}x$. Luego, como B está en el eje OX, podemos decir que $B = (x_B, 0)$. Con esto obtenemos la ecuación de la recta $\overline{PB}$:

$$m_{PB} = \frac{0 - y_0}{x_B - x_0} = \frac{-y_0}{x_B - x_0} \implies \overline{PB} : y = \frac{-y_0}{x_B - x_0} \cdot (x - x_B)$$

Como $\overline{PB}$ y $\overline{OP}$ son perpendiculares, se cumple:

$$m_{PB} \cdot m_{OP} = -1 \implies \frac{-y_0}{x_B - x_0} \cdot \frac{y_0}{x_0} = -1$$

De la última ecuación se obtiene $(\star)$ $y_0^2 = x_0(x_B - x_0)$. Como P está en la parábola, satisface su ecuación, es decir, $y_0^2 = 4px_0$. Podemos reemplazar esta última información en la ecuación $(\star)$. Se sigue que:

$$4px_0 = x_0(x_B - x_0)$$

Como $x_0 \neq 0$ (sino, P coincidiría con O), podemos dividir por x_0, quedando con:

$$4p = x_B - x_0$$

Finalmente, como A es la proyección de P sobre OX, se tiene que $A = (x_0, 0)$. Así, $\overline{AB}$ se calcula como:

$$\overline{AB} = d(A, B) = x_B - x_0 = 4p$$

Dado que $4p$ es constante, se concluye que $\overline{AB}$ también lo es.

Distribución de puntajes:

- **1 pts.** Por bosquejar correctamente la situación.
- **0,5 pts.** Por calcular las ecuaciones de $\overline{OP}$ y $\overline{PB}$.
- **0,5 pts.** Por aplicar la condición de perpendicularidad ($m_1 \cdot m_2 = -1$).
- **0,5 pts.** Por aplicar la condición de pertenencia de P a la parábola.
- **0,5 pts.** Por juntar las ecuaciones obtenidas y concluir.