Pauta Control 1
Precálculo I. 13 de enero de 2023.
Prof. de Cátedra: Pablo R. Dartnell R.
Prof. Aux.: Máximo Flores Valenzuela, Nicolás Cornejo, Gonzalo Ovalle J., Francisco Urbina

P1. (a) (**3 pts.**) Demuestre, sin usar tablas de verdad, que la siguiente proposición es una tautología:

$$\overline{(p \iff q)} \iff (\bar{p} \iff q)$$

Solución: Primera opción: Método algebraico:

$$\begin{aligned}
\overline{(p \iff q)} &\iff \overline{(p \implies q) \wedge (q \implies p)} && \text{(Doble implicancia)}\\
&\iff \overline{(\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee p)} && \text{(Caract. } \implies \text{)}\\
&\iff \overline{(\bar{p} \vee q)} \vee \overline{(\bar{q} \vee p)} && \text{(De Morgan)}\\
&\iff (p \wedge \bar{q}) \vee (q \wedge \bar{p}) && \text{(De Morgan)}\\
&\iff [(p \wedge \bar{q}) \vee q] \wedge [(p \wedge \bar{q}) \vee \bar{p}] && \text{(Distributividad)}\\
&\iff [(p \vee q) \wedge (\bar{q} \vee q)] \wedge [(p \vee \bar{p}) \wedge (\bar{q} \vee \bar{p})] && \text{(Distributividad)}\\
&\iff [(p \vee q) \wedge V] \wedge [V \wedge (\bar{q} \vee \bar{p})] && \text{(Tercio excluso)}\\
&\iff (p \vee q) \wedge (\bar{q} \vee \bar{p}) && \text{(Identidad)}\\
&\iff (\bar{p} \implies q) \wedge (q \implies \bar{p}) && \text{(Caract. } \implies \text{)}\\
&\iff (\bar{p} \iff q) \ \blacksquare && \text{(Doble implicancia)}
\end{aligned}$$

[Obs.: No se asigna puntaje por mencionar el nombre de las propiedades.]

Segunda opción: Método exploratorio: Suponemos que el lado izquierdo es falso, entonces $p \iff q$ es verdadero. Sabemos que esto solo ocurre si:

$$p \iff V \wedge q \iff V, \text{ o bien } p \iff F \wedge q \iff F$$

En el primer caso, tenemos al lado derecho: $F \iff V$ lo que es falso. En el segundo, nos queda $V \iff F$, que también es falso. Luego, en este caso sí son equivalentes ambos miembros.

Ahora veamos qué pasa si el lado izquierdo es verdadero. Esto significa que $p \iff q$ es falso. O sea,

$$p \iff F \wedge q \iff V, \text{ o bien } p \iff V \wedge q \iff F$$

En el primer caso, el lado derecho queda $V \iff V$ lo que sabemos que es verdadero, y en el segundo, $F \iff F$ que también es verdadero. Así, en este caso también son equivalentes ambos lados.

Luego, se concluye que lo pedido es una tautología.

Distribución de puntajes:

- **1 pts.** puntos por llegar hasta justo antes de la distribución.
- **1 pts.** puntos por distribuír correctamente y uso del tercio excluso.
- **1 pts.** por concluír identificando las implicancias a obtener.

- En caso de existir errores tempranos, se asignó puntaje de manera proporcional al desarrollo algebraico correcto posterior.
- Para métodos exploratorios se distribuyó el puntaje en función de la argumentación entregada.

(b) (**3 pts.**) Encuentre los valores de verdad de las siguientes proposiciones: *(1,5pts. cada una)*

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ \ x \leq y$$
$$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ \ x \leq y$$

Escriba también la negación de ambas.

Solución: Para la primera, basta tomar $y = x$. Como sabemos que $x \leq x$, la proposición es verdadera. Su negación es $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ \ x > y$.

Para la segunda, tenemos dos opciones.

Primera opción: Nos dice que existe un número real que es mayor o igual a todos los demás. Procedamos por contradicción, supongamos que dicho real existe (llamémosle y). Pero en $\mathbb{R}$ siempre existe $y + 1$, que es mayor estricto que y. Por lo tanto, es imposible que haya un real mayor que todos los otros, siempre el sucesor genera una contradicción. Entonces la proposición es falsa. Su negación es $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})\ \ x > y$.

Segunda opción: Trabajar directamente con la negación. Sabemos que es:

$$(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})\ \ x > y$$

En este caso, basta tomar $x = y + 1$, pues $y + 1 > y$ siempre se cumple. Por lo tanto la negación es verdadera, y la proposición original, falsa.

Distribución de puntajes:

- **1 pts.** por cada valor de verdad argumentado correctamente.
- **0,5 pts.** por cada negación correctamente obtenida. Se asigna **0,3 pts.** si solo los cuantificadores se niegan correctamente.

P2. (a) (**3 pts.**) Sean A, B, X, Y conjuntos no vacíos y $X \subseteq Y$. Demuestre que:

$$A \cap [X \cup (B \setminus (A \setminus X))] \subseteq A \cap Y$$

Solución: Tomemos las hipótesis como ciertas, y partamos del lado izquierdo:

$$\begin{aligned}
A \cap [X \cup (B \setminus (A \setminus X))] &= A \cap [X \cup (B \cap (A \setminus X)^c)] && \text{(Def. diferencia)}\\
&= A \cap [X \cup (B \cap (A \cap X^c)^c)] && \text{(Def. diferencia)}\\
&= A \cap [X \cup (B \cap (A^c \cup X))] && \text{(De Morgan) (1)}\\
&= A \cap [X \cup (B \cap A^c) \cup (B \cap X)] && \text{(Distributividad)}\\
&= A \cap [X \cup (B \cap A^c)] && \text{(Absorción) (2)}\\
&= (A \cap X) \cup (A \cap (B \cap A^c)) && \text{(Distributividad)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (A \cap X) \cup \emptyset && \text{(Consistencia)}\\
&= A \cap X && \text{(Identidad)}\\
&\subseteq A \cap Y \quad \blacksquare && \text{(Hipótesis } X \subseteq Y\text{) (3)}
\end{aligned}
$$

[Obs.: No se asigna puntaje por mencionar el nombre de las propiedades.]

Distribución de puntajes:

- **1 pts.** por llegar a (1).
- **1 pts.** por pasar de (1) a (2).
- **1 pts.** por concluir correctamente usando la hipótesis (entre (2) y (3)).

(b) (**3 pts.**) Sean $A, A' \subseteq E$ y $B, B' \subseteq F$. Demuestre:

$$(A \cup A') \times B = (A \times B) \cup (A' \times B)$$

Solución: Ocupando la definición de producto cartesiano, y partiendo del lado con más información, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
(A \times B) \cup (A' \times B) &= \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\} \cup \{(x, y) \mid x \in A' \wedge y \in B\}\\
&= \{(x, y) \mid (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A' \wedge y \in B)\} && \text{(Def. } \cup\text{) (1)}\\
&= \{(x, y) \mid (x \in A \vee x \in A') \wedge y \in B\} && \text{(Distrib.)}\\
&= \{(x, y) \mid (x \in A \cup A') \wedge y \in B\} && \text{(Def. } \cup\text{) (2)}\\
&= (A \cup A') \times B \quad \blacksquare && \text{(Def. } \times\text{) (3)}
\end{aligned}
$$

Distribución de puntajes:

- **1 pts.** por llegar a (1).
- **1 pts.** por pasar de (1) a (2).
- **1 pts.** por concluir correctamente usando la hipótesis (entre (2) y (3)).

P3. (**6 pts.**) Demuestre por inducción que se tiene la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Solución: Partamos demostrando el caso base $n = 1$. Notemos que se cumple:

$$\sum_{k=0}^{1} k^3 = 0^3 + 1^3 = 1 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4}$$

[*Obs.: Pueden tomar como caso base $n = 0$ o $n = 1$. Ambos son válidos.*]

Hipótesis inductiva:

$$\text{Para algún } n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Paso inductivo: Demostrar la propiedad para $n+1$. Entonces, debemos demostrar que:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right] \\
&= (n+1)^2\left[\frac{n^2+4n+4}{4}\right] \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Luego, por el principio de inducción, se concluye la propiedad pedida.

Distribución de puntajes:

- **1 pts.** Verificar el caso base
- **1 pts.** Plantear la hipótesis inductiva
- **1 pts.** Plantear el paso inductivo
- **1 pts.** Separar el término $n+1$ de la sumatoria
- **1 pts.** Aplicar la hipótesis inductiva
- **1 pts.** Concluir la demostración