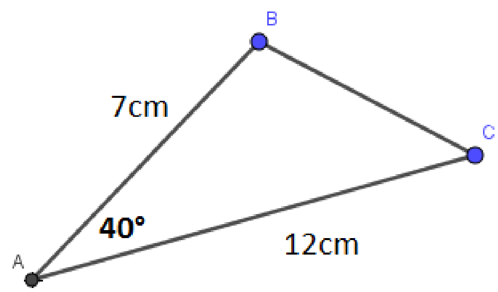
Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Verano 2021
Taller de Trigonometría

Pauta Guía de Trigonometría 3

Profesor: Sebastián Espinosa
Auxiliar: Valeria Arratia

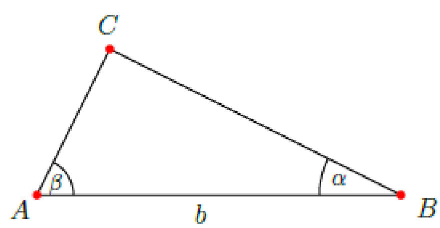
1 Ejercicios

P1. En la figura, obtenga el valor del segmento $\overline{BC}$ sabiendo que $\cos(40°) = 0,766$

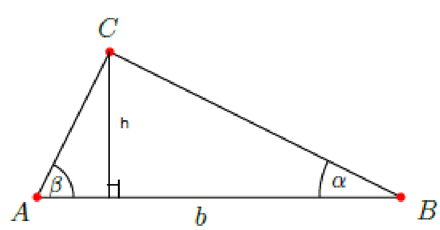


Solución: Ocupando el Teorema del coseno tenemos que $\overline{BC}^2 = 7^2+12^2-2\cdot 7\cdot 12\cdot \cos(40°) = 49+144-168\cdot 0,766 \approx 64,304 \Rightarrow \overline{BC} \approx 8,02$

P2. Desafío: Determinar el área del triángulo de la figura, en términos de α, β y b. (Notar que el triángulo ABC **no** es rectángulo)



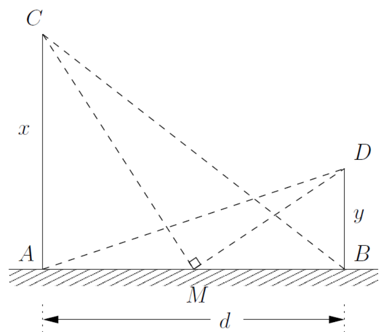
Solución:



Se sabe que el área se puede calcular como $\frac{bh}{2}$ donde h es la altura del triángulo (ver figura), además el ángulo faltante es $\angle ACB = 180° - \alpha - \beta$. Ocupemos el Teorema del Seno, lo que nos dice que $\frac{\text{sen}(\alpha)}{\overline{AC}} = \frac{\text{sen}(180°-\alpha-\beta)}{b}$, reordenando tenemos que, $\overline{AC} = \frac{\text{sen}(\alpha)b}{\text{sen}(180°-\alpha-\beta)}$. Además $\text{sen}(\beta) = \frac{h}{\overline{AC}}$, es decir, $h = \text{sen}(\beta)\overline{AC} \Rightarrow h = \frac{\text{sen}(\beta)\,\text{sen}(\alpha)b}{\text{sen}(180°-\alpha-\beta)}$. Finalmente el área queda como $\frac{\text{sen}(\beta)\,\text{sen}(\alpha)b^2}{2\,\text{sen}(180°-\alpha-\beta)}$.

P3. Desafío: Determine las alturas x e y de las torres verticales AC y BD de la figura, sabiendo que la distancia horizontal entre sus bases A y B es conocida e igual a $d > 0$, que $\angle CBA = 2\angle DAB$ y que el ángulo $\angle CMD$ es recto, donde M es el punto medio de AB.
Indicación: Puede usar la siguiente identidad trigonométrica sin tener que demostrarla.

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$



Solución:
Usemos por separado la información de cada parte del enunciado. En primer lugar, notemos que para los ángulos $\angle CBA$ y $\angle DAB$ conocemos los catetos opuestos y adyacentes de sus respectivos triángulos. Luego, usando la función tangente, si llamamos $\angle DAB = \alpha$, tendríamos que

$$\tan(\alpha) = \frac{y}{d}\ , \quad \tan(2\alpha) = \frac{x}{d}\ .$$

Por otro lado, sabemos del enunciado que

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)},$$

por lo que una primera ecuación que relaciona a las incógnitas x e y es la siguiente

$$\frac{x}{\cancel{d}} = \frac{2\frac{y}{\cancel{d}}}{1 - \frac{y^2}{d^2}} \iff 1 - \frac{y^2}{d^2} = 2\frac{y}{x}\ .$$

Una segunda ecuación sale de observar el hecho de que los triángulos DBM y MAC son semejantes (se puede notar usando que M es punto medio y que además define el ángulo recto indicado, que los ángulos interiores de los triángulos mencionados coinciden por completo). Luego, tendremos además que

$$\frac{x}{d/2} = \frac{d/2}{y} \iff x = \frac{d^2}{4y}\ .$$

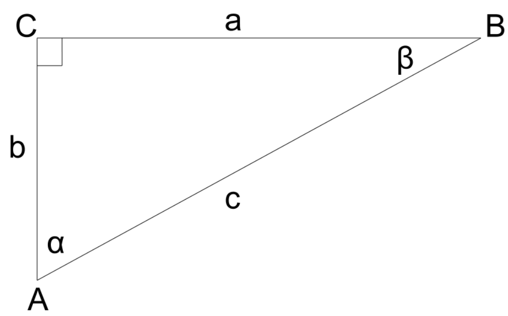
Reemplazando esto en la primera ecuación obtenida, tendremos

$$1 - \frac{y^2}{d^2} = 8\frac{y^2}{d^2} \iff y^2 = \frac{d^2}{9} \implies y = \frac{d}{3},$$

donde hemos descartado la raíz negativa pues y es una distancia. Con esto, concluimos además que

$$x = \frac{d^2}{4y} = \frac{3}{4}d\ .$$

P4. Desafío: Demuestre que en el triángulo ABC de la figura, rectángulo en C, con catetos a y b e hipotenusa c, y ángulos agudos α y β, se verifica que $\sec(2\beta) + \tan(2\beta) = \frac{a+b}{a-b}$.



Solución: Notemos que

$$\begin{aligned}\sec(2\beta)+\tan(2\beta) &= \frac{1}{\cos(2\beta)}+\frac{\operatorname{sen}(2\beta)}{\cos(2\beta)}\\ &= \frac{1+\operatorname{sen}(2\beta)}{\cos(2\beta)}.\end{aligned}$$

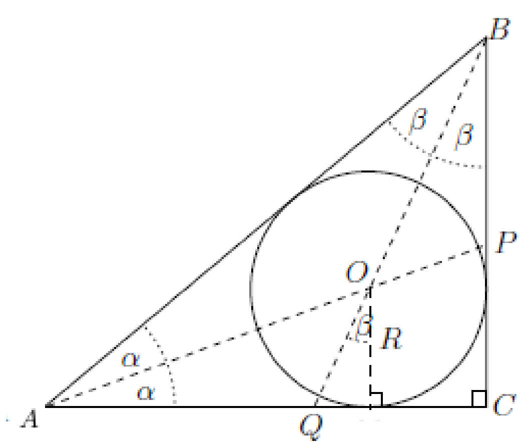
Pero de la figura, $\operatorname{sen}(\beta)=\frac{b}{c}$ y $\cos(\beta)=\frac{a}{c}$ de donde

$$\operatorname{sen}(2\beta)=2\operatorname{sen}(\beta)\cos(\beta)=\frac{2ab}{c^2},\quad \cos(2\beta)=\cos^2(\beta)-\operatorname{sen}^2(\beta)=\frac{a^2-b^2}{c^2}$$

Luego, usando que $c^2=a^2+b^2$ se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1+\operatorname{sen}(2\beta)}{\cos(2\beta)} &= \frac{1+\frac{2ab}{c^2}}{\frac{a^2-b^2}{c^2}}\\ &= \frac{c^2+2ab}{a^2-b^2}\\ &= \frac{a^2+b^2+2ab}{a^2-b^2}\\ &= \frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}\\ &= \frac{a+b}{a-b}\end{aligned}$$

P5. Desafío: El triángulo ABC de la figura es rectángulo en C y tiene su círculo inscrito de radio R, centrado en O. Las bisectrices por los vértices A y B que pasan por O, cortan a los lados BC y AC en los puntos P y Q respectivamente.



Se desea demostrar que:

$$\frac{1}{\overline{AQ}} + \frac{1}{\overline{BP}} = \frac{1}{R}$$

para ello, usando los ángulos auxiliares α y β de la figura, se pide realizar lo siguiente:

a) Encuentre una expresión para $\overline{AO}$ en términos de R y el ángulo α

b) Encuentre una expresión para $\overline{AQ}$ en términos de $\overline{AO}$, α, β

c) Usando las partes anteriores, calcule $\frac{1}{\overline{AQ}}$ en términos de R, α y β.

d) Siga el procedimiento análogo para encontrar $\frac{1}{\overline{BP}}$ en términos de R, α y β y deducir la propiedad buscada.

Solución:

a) De la figura es claro que $\sin(\alpha) = \frac{R}{\overline{AO}} \Leftrightarrow \overline{AO} = \frac{R}{\sin(\alpha)}$

b) Podemos usar el teorema del seno, notemos que el ángulo $\angle AQO = 90^\circ + \beta$ y $\angle AOQ = 90^\circ - (\alpha + \beta)$, con esto se tiene que $\frac{\sin(\angle AOQ)}{\overline{AQ}} = \frac{\sin(\angle AQO)}{\overline{AO}} \Leftrightarrow \frac{\sin(90^\circ - (\alpha+\beta))}{\overline{AQ}} = \frac{\sin(90^\circ + \beta)}{\overline{AO}} \Leftrightarrow \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\overline{AQ}} = \frac{\cos(\beta)}{\overline{AO}} \Leftrightarrow \overline{AQ} = \frac{\cos(\alpha+\beta)\overline{AO}}{\cos(\beta)}$

c) Sabemos que $\overline{AQ} = \frac{\cos(\alpha+\beta)\overline{AO}}{\cos(\beta)}$ y que $\overline{AO} = \frac{R}{\sin(\alpha)}$, luego $\overline{AQ} = \frac{\cos(\alpha+\beta)\overline{AO}}{\cos(\beta)} \Leftrightarrow \frac{\cos(\alpha+\beta)\frac{R}{\sin(\alpha)}}{\cos(\beta)} \Leftrightarrow \frac{\cos(\alpha+\beta)R}{\cos(\beta)\sin(\alpha)} \Leftrightarrow \frac{1}{\overline{AQ}} = \frac{\cos(\beta)\sin(\alpha)}{\cos(\alpha+\beta)R}$

d) Dada la simetría del problema el caso $\overline{BP}$ es idéntico al anterior, salvo que los ángulos se intercambian en el resultado final, esto es, $\frac{1}{\overline{BP}} = \frac{\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha+\beta)R}$, sumando se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\overline{AQ}} + \frac{1}{\overline{BP}} &= \frac{\cos(\beta)\sin(\alpha)}{\cos(\alpha+\beta)R} + \frac{\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha+\beta)R} \\
&= \frac{\cos(\beta)\sin(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha+\beta)R} \\
&= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)R} \\
&= \frac{\tan(\alpha+\beta)}{R}
\end{aligned}$$

Pero dado el triángulo, sabemos que $2\alpha + 2\beta + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha + \beta = 45^\circ$, con esto $\frac{\tan(\alpha+\beta)}{R} = \frac{\tan(45^\circ)}{R} = \frac{1}{R}$ donde se concluye lo pedido.