Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Verano 2021
Taller de Trigonometría

Pauta Guía de Trigonometría 2

Profesor: Sebastián Espinosa
Auxiliar: Valeria Arratia

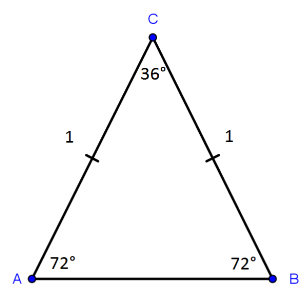
1 Ejercicios

P1. Obtenga el valor de $\text{sen}(120°), \cos(120°), \text{sen}(75°), \cos(75°)$ a partir de las identidades trigonométricas y las funciones trigonométricas de los ángulos notables 30°, 45° o 60°. (Notar que tanto 75° como 120° **no** son ángulos notables, por lo que requieren ser calculados de manera explícita).

Solución:

- $\text{sen}(120°) = \text{sen}(60° + 60°) = \text{sen}(60°)\cos(60°) + \cos(60°)\,\text{sen}(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos(120°) = \cos(60° + 60°) = \cos(60°)\cos(60°) - \text{sen}(60°)\,\text{sen}(60°) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{-1}{2}$
- $\text{sen}(75°) = \text{sen}(45° + 30°) = \text{sen}(45°)\cos(30°) + \cos(45°)\,\text{sen}(30°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$
- $\cos(75°) = \cos(45° + 30°) = \cos(45°)\cos(45°) - \text{sen}(30°)\,\text{sen}(30°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

P2. El objetivo de esta pregunta es calcular $\cos(72°)$ de manera exacta. Para lograr esto, consideremos el siguiente triángulo isósceles de angulos interiores 72°, 72° y 36° y los lados iguales miden 1.



A continuación realice los siguientes pasos:

i) Trace una bisectriz desde el punto A hacia el lado opuesto, este segmento intersectará el lado opuesto $\overline{BC}$ en el punto D. Llame el segmento $\overline{DC}$ como x. Mediante semejanza de triángulos deduzca que

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}$$

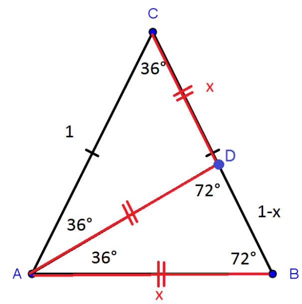
ii) Despeje x. Si lo requiere, puede ocupar la fórmula de la ecuación de segundo grado, es decir, $ax^2 + bx + c = 0$ sus 2 soluciones están dadas por $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Recuerde que al ocupar esta fórmula debe argumentar el por qué en este caso se queda con sólo una de las dos soluciones y cuál.

iii) Trace una altura desde C y calcule por definición $\cos(72°)$.

Solución:

i) Trazando una bisectriz tenemos la siguiente figura Esto significa que el triángulo ADC es semejante con el triángulo CAD, además los triángulos ADB y CDA son isósceles. Luego por semejanza de triángulos tenemos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}},$$



lo que es equivalente con

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}$$

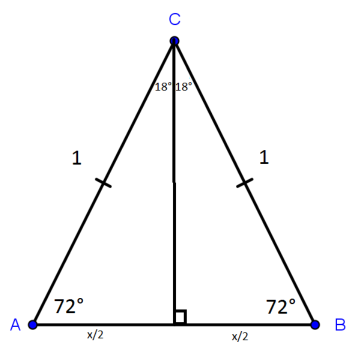
ii) Reordenando (multiplicación cruzada) tenemos que $x^2 = 1 \cdot (1-x) \iff x^2 + x - 1 = 0$. Esto es una ecuación de segundo grado, por lo que al resolverla tenemos las siguientes soluciones

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

nos quedamos con la solución positiva debido a que los segmentos de figuras geométricas no pueden tener valores negativos. Luego

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

iii) Trazando la altura y recordando las propiedades del triángulo isósceles tenemos que



Luego por definición de coseno, tenemos que

$$\cos(72°) = \frac{x/2}{1} = \frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

P3. Demuestre la siguiente identidad trigonométrica usando identidades trigonométricas conocidas

$$\sec^2(\alpha) - \tan^2(\alpha) = 1$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\sec^2(\alpha) - \tan^2(\alpha) &= \frac{1}{\cos^2(\alpha)} - \frac{\text{sen}^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} \quad /\text{Definición secante y tangente} \\
&= \frac{1 - \text{sen}^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} \\
&= \frac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} \quad /\text{Identidad fundamental} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{1}$$

P4. Se sabe que $\operatorname{sen}(180^\circ) = 0$ y que $\cos(180^\circ) = -1$. Use estos resultados para demostrar la **identidad del suplemento**

$$\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)$$
$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

Solución:

- $\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen}(180^\circ)\cos(\alpha) - \cos(180^\circ)\operatorname{sen}(\alpha) = 0 \cdot \cos(\alpha) - (-1) \cdot \operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)$
- $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos(180^\circ)\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(180^\circ)\operatorname{sen}(\alpha^\circ) = (-1) \cdot \cos(\alpha) - 0 \cdot \operatorname{sen}(\alpha^\circ) = -\cos(\alpha)$

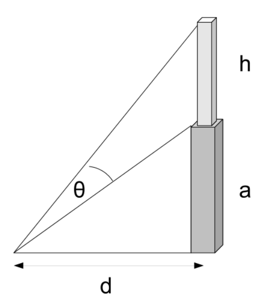
P5. Desafío: Demuestre la siguiente identidad trigonométrica usando identidades trigonométricas conocidas

$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\tan(\beta - \alpha) &= \frac{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}{\cos(\beta - \alpha)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha) - \cos(\beta)\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\beta - \alpha)} \quad \text{/Identidad suma de la suma en seno} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha) - \cos(\beta)\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\beta)\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\alpha)} \quad \text{/Identidad suma de la suma en coseno} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha) - \cos(\beta)\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\beta)\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\alpha)} \cdot \frac{\frac{1}{\cos(\beta)\cos(\alpha)}}{\frac{1}{\cos(\beta)\cos(\alpha)}} \\
&= \frac{\frac{\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\beta)\cos(\alpha)} - \frac{\cos(\beta)\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\beta)\cos(\alpha)}}{\frac{\cos(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\beta)\cos(\alpha)} + \frac{\operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\beta)\cos(\alpha)}} \\
&= \frac{\frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\beta)} - \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{1 + \frac{\operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\beta)\cos(\alpha)}} \\
&= \frac{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}
\end{aligned} \tag{2}$$

P6. Desafío: La figura muestra una estatua de altura h sobre un pedestal de altura a. Desde un punto situado a una distancia d de la base del monumento, la estatua se ve bajo un ángulo θ.



Pruebe que $\tan\theta = \dfrac{dh}{d^2 + a(a+h)}$.

Indicación: Use el hecho que $\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}{1 + \tan(\beta)\tan(\alpha)}$. *Use ángulos auxiliares adecuados para usar esta fórmula.*

Solución: Sean β y α los ángulos de los triángulos con catetos d y $h + a$, y d y a respectivamente. De esto, tenemos que

$$\tan\beta = \frac{h+a}{d}, \quad \tan\alpha = \frac{a}{d}$$

Además, como $\theta = \beta - \alpha$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\tan\theta &= \tan(\beta - \alpha) \\
&= \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha} \\
&= \frac{\frac{h+a}{d} - \frac{a}{d}}{1 + \frac{h+a}{d} \cdot \frac{a}{d}} \\
&= \frac{d(h+a) - da}{d^2 + a(a+h)} \\
&= \frac{dh}{d^2 + a(a+h)}
\end{aligned}$$