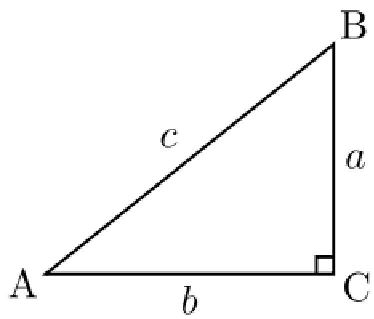
Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Verano 2021
Taller de Trigonometría

Pauta Guía de Trigonometría 1

Profesor: Sebastián Espinosa
Auxiliar: Valeria Arratia

1 Ejercicios

P1. Dado el siguiente triángulo rectángulo en C, con $a = 3$, $b = 4$, $\angle BAC = \alpha$. Obtenga c, $\operatorname{sen}(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ y $\tan(\alpha)$. Finalmente calcule $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$.



Solución: En base a la figura tenemos que:

- $c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^3 \Rightarrow c = \sqrt{25} = 5$,
- $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{3}{5}$,
- $\cos(\alpha) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{4}{5}$,
- $\tan(\alpha) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{3}{4}$,
- $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9+16}{25} = 1$.

P2. Usando los datos de la pregunta anterior, calcule $\sec(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$ y $\csc(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\alpha)$. Deduzca que

$$\operatorname{sen}(\alpha) = (\csc(\alpha))^{-1}$$

y que

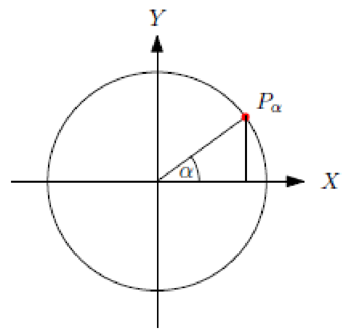
$$\cos(\alpha) = (\sec(\alpha))^{-1}$$

Solución: Basándonos en la figura anterior tenemos que

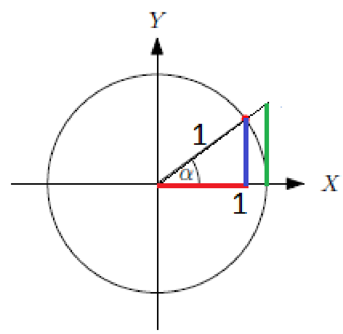
- $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{3}{5}$,
- $\csc(\alpha) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{5}{3}$,
- $\cos(\alpha) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{4}{5}$,
- $\sec(\alpha) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{5}{4}$.

Esto significa que $\sec(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} = 1$ y que $\csc(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1$. Luego por definición se tiene que $\sec(\alpha)$ es el recíproco (inverso multiplicativo) de $\cos(\alpha)$ y que $\csc(\alpha)$ es el recíproco de $\operatorname{sen}(\alpha)$.

P3. En la circunferencia de radio 1 se pide encontrar geométricamente las cantidades $\operatorname{sen}(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ y $\tan(\alpha)$

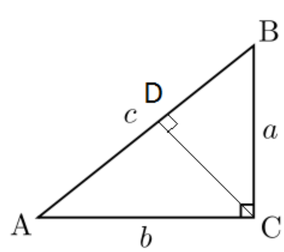


Solución: En base a la figura podemos observar lo siguiente

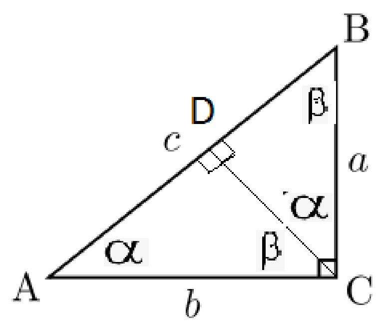


- El segmento en rojo corresponde a $\cos(\alpha)$, esto se debe a que, por definición, $\cos(\alpha) = \frac{\text{segmento rojo}}{1} =$ segmento rojo
- El segmento en azul corresponde a $\operatorname{sen}(\alpha)$, esto se debe a que, por definición, $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\text{segmento azul}}{1} =$ segmento azul
- El segmento en verde corresponde a $\tan(\alpha)$, esto se debe a que, por Teorema de Thales (o semejanza de triángulos) $\frac{\text{segmento rojo}}{\text{segmento azul}} = \frac{1}{\text{segmento verde}}$. reordenando tenemos que segmento verde $= \frac{\text{segmento azul}}{\text{segmento rojo}} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} =$ $\tan(\alpha)$ (Observar que este segmento es justamente tangente a la circunferencia de radio 1, de ahi proviene el nombre ;)).

P4. Desafío: Dado el siguiente triángulo rectángulo en C, con $a = 3$, $b = 4$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Se traza la altura $\overline{CD}$ desde C, demuestre que $\overline{CD} = \sqrt{\overline{AD} \cdot \overline{DB}}$ (Observar que la altura $\overline{CD}$ no necesariamente es bisectriz) *Indicación:* Encuentre triángulos semejantes.

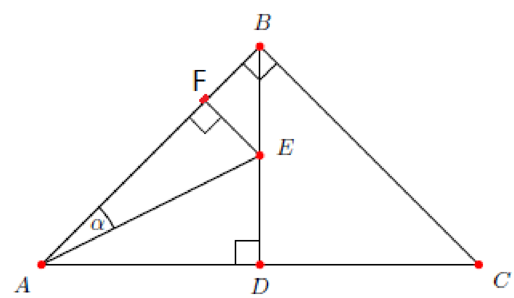


Solución: En base a la figura podemos observar lo siguiente

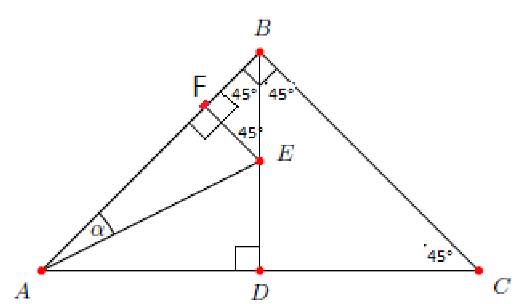


Los ángulos α y β, interiores al triángulo rectángulo, son complementarios, luego al trazar la altura nos encontramos que $\angle BAC = \angle DCB$ y que $\angle DBC = \angle DCA$. Fijándonos en el triángulo rectángulo BDC tenemos que $\tan(\beta) = \frac{\overline{DC}}{\overline{DB}}$, por otra parte, fijándonos en el triángulo rectángulo ADC tenemos que $\tan(\beta) = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$. Finalmente igualando ambas expresiones tenemos que $\frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$ que es equivalente a $\overline{CD} = \sqrt{\overline{AD} \cdot \overline{DB}}$.

P5. Desafío: En la figura, el triángulo ABC es rectángulo isósceles, y E es el punto medio de BD. Calcule $\cot(\alpha)$. *Indicación:* Comience asignándole un valor al segmento $\overline{AB}$ y deduzca el valor de los segmentos faltantes.



Solución: En base a la figura, recordando que el triángulo es isósceles rectángulo, tenemos que sus ángulos interiores son $45°, 45°$ y $90°$. Además $\overline{BD}$ es altura de un triángulo isósceles, por lo que también es bisectriz y transversal de gravedad.



El objetivo es encontrar $\cot(\alpha) = \frac{\overline{AF}}{\overline{EF}}$, para esto, partiremos llamando $\overline{AB} = a$ y a partir de este segmento obtendremos los restantes:

- $\overline{AB} = \overline{BC} = a$, por pitágoras, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2a^2 \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{2}a$
- $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{BD} = \frac{\sqrt{2}a}{2}$ porque la altura es transversal de gravedad en el triángulo isósceles respecto a su base. Además el triángulo también es BDC es rectángulo isósceles.
- $\overline{BE} = \frac{\sqrt{2}a}{4}$ ya que es la mitad de $\overline{BD}$ porque E es punto medio.

- El triángulo BFE es rectángulo isósceles, por lo que $\overline{BF} = \overline{FE}$, además, $\text{sen}(45^\circ) = \frac{\overline{BF}}{\overline{BE}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\overline{BF}}{\frac{\sqrt{2}a}{4}} \Rightarrow \overline{BF} = \frac{a}{4}$, con esto $\overline{EF} = \frac{a}{4}$.
- $\overline{AF} = \overline{AB} - \overline{BF} = a - \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}$.
- Finalmente $\cot(\alpha) = \frac{\overline{AF}}{\overline{EF}} = \frac{\frac{3a}{4}}{\frac{a}{4}} = 3$.