Trigonometría

Sebastián Espinosa

Escuela de Verano
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Clase 4
Identidades Trigonométricas

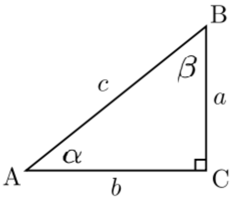
Introducción

En esta parte del curso veremos igualdades que existen entre las funciones trigonométricas, ya sea respecto a la suma o resta de ángulos como también entre las mismas funciones trigonométricas. Estas igualdades o relaciones se llaman identidades trigonométricas. En este curso veremos 4 identidades

- Identidad del complemento.
- Identidad fundamental.
- Identidad de los signos.
- Identidad de la suma/resta.

Identidad del complemento

Consideremos un triángulo rectángulo ABC, rectángulo en C, de lados a, b, c y ángulos $\alpha, \beta, 90^\circ$



A partir de las definiciones observamos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha) &= \frac{a}{c} = \cos(\beta) \\ \operatorname{sen}(\beta) &= \frac{b}{c} = \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Identidad del complemento

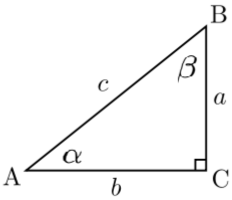
Pero también vemos que $\alpha + \beta = 90°$, es decir, $\beta = 90° - \alpha$, con lo que

$$\begin{aligned} \text{sen}(\alpha) &= \cos(90° - \alpha) \\ \cos(\alpha) &= \text{sen}(90° - \alpha) \end{aligned}$$

Esta identidad se conoce como identidad del complemento

Identidad Fundamental

Consideremos nuevamente un triángulo rectángulo ABC, rectángulo en C, de lados a, b, c y ángulos $\alpha, \beta, 90^\circ$



Sabemos que

$$\begin{aligned} \text{sen}(\alpha) &= \frac{a}{c} \\ \cos(\alpha) &= \frac{b}{c} \end{aligned}$$

Identidad Fundamental

es decir $a = c\,\mathrm{sen}(\alpha)$ y $b = c\cos(\alpha)$. Recordemos que el Teorema de Pitágoras nos dice que

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Podemos reemplazar entonces $a = c\,\mathrm{sen}(\alpha)$ y $b = c\cos(\alpha)$ obteniendo lo siguiente

$$\begin{aligned}
(c\,\mathrm{sen}(\alpha))^2 + (c\cos(\alpha))^2 &= c^2 \\
c^2\,\mathrm{sen}^2(\alpha) + c^2\cos^2(\alpha) &= c^2 \\
c^2(\mathrm{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)) &= c^2 \\
\mathrm{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= \frac{c^2}{c^2} \\
\mathrm{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= 1
\end{aligned}$$

Identidad de los signos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(-\alpha) &= -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Esta identidad es con respecto a los ángulos negativos, el negativo de un ángulo se lee como un ángulo que se mide en sentido horario. Normalmente un ángulo se mide positivo en sentido antihorario y negativo se mide horario.

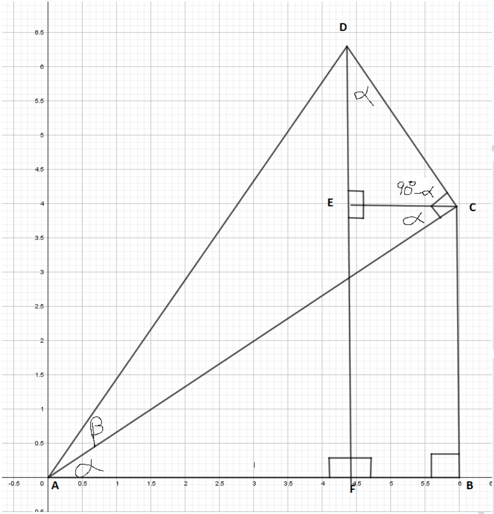
Identidad de la suma/resta

Vamos a demostrar una de las identidades más usadas en Trigonometría: La **identidad de la suma**. Sean α, β ángulos cualesquiera, tenemos la siguiente igualdad

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)$$

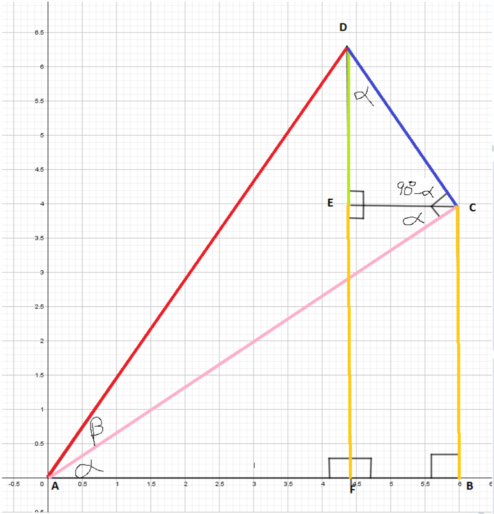
Identidad de la suma/resta

Veamos la siguiente figura



Identidad de la suma/resta

Veamos la siguiente figura



Identidad de la suma/resta

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \frac{DF}{AD} \\
&= \frac{EF+DE}{AD} \\
&= \frac{EF}{AD}+\frac{DE}{AD} \\
&= \frac{EF}{AD}\cdot\frac{AC}{AC}+\frac{DE}{AD}\cdot\frac{CD}{CD} \\
&= \frac{CB}{AD}\cdot\frac{AC}{AC}+\frac{DE}{AD}\cdot\frac{CD}{CD} \quad \text{Ya que } CB = EF \\
&= \frac{CB}{AC}\cdot\frac{AC}{AD}+\frac{DE}{CD}\cdot\frac{CD}{AD} \\
&= \frac{\text{C.o. } \triangle\, ABC}{\text{H. } \triangle\, ABC}\cdot\frac{\text{C.a. } \triangle\, ACD}{\text{H. } \triangle\, ACD}+\frac{\text{C.a. } \triangle\, DEC}{\text{H. } \triangle\, DEC}\cdot\frac{\text{C.o. } \triangle\, ACD}{\text{H. } \triangle\, ACD} \\
&= \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)
\end{aligned}$$

Identidad de la suma/resta

Esta identidad se conoce como identidad de la suma de ángulos en Trigonometría. Esta fórmula se puede extender a la resta, obteniendose lo siguiente

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}(\alpha+(-\beta)) \\
&= \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(-\beta)+\cos(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(-\beta) \\
&= \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\cos(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta) \quad \text{/identidad de signos}
\end{aligned}$$

También, ocupando la identidad del complemento

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}(90^\circ-(\alpha+\beta)) \\
&= \operatorname{sen}((90^\circ-\alpha)-\beta) \\
&= \operatorname{sen}(90^\circ-\alpha)\cdot\cos(\beta)-\cos(90^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta) \\
&= \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)
\end{aligned}$$

Donde en la tercera y cuarta línea se ocuparon la identidad de la resta y la identidad del complemento respectivamente.

Identidad de la suma/resta

Para la resta en coseno, obtenemos algo similar

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) \\ &= \cos(\alpha) \cdot \cos(-\beta) - \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(-\beta) \\ &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\beta)\end{aligned}$$

Resumen de identidades

Identidad del Complemento

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha)$$
$$\cos(\alpha) = \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha)$$

Identidad Fundamental

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Resumen de identidades

Identidad de los signos

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$$
$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

Identidad de la suma/resta

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)$$
$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \cos(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)$$

Ejemplo

Obtengamos $\cos(120^\circ)$

$$\begin{aligned}
\cos(120^\circ) &= \cos(60^\circ + 60^\circ) \\
&= \cos(60^\circ)\cdot\cos(60^\circ) - \operatorname{sen}(60^\circ)\cdot\operatorname{sen}(60^\circ) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Observaciones

- Con las identidades previamente vistas ahora podemos calcular de manera exacta las razones trigonométricas de más ángulos. Por ejemplo, es posible calcular $\operatorname{sen}(120^\circ)$ o $\operatorname{sen}(90^\circ)$.
- Lo visto recientemente de identidades nos permite extender lo que sabemos de Trigonometría para ángulos no necesariamente dentro de un triángulo rectángulo. Por ejemplo, prueben con calcular $\operatorname{sen}(180^\circ)$ mediante el uso adecuado de las identidades trigonométricas.
- Con estas herramientas podemos pasar al Teorema del Seno y Teorema del Coseno, lo que nos permite extender lo que sabemos de Trigonometría aplicado en triángulos cualesquiera, no necesariamente rectángulo. Estos teoremas los veremos en la clase 5.