Trigonometría

Sebastián Espinosa

Escuela de Verano
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Clase 2
Definiciones Básicas

Razones Trigonométricas

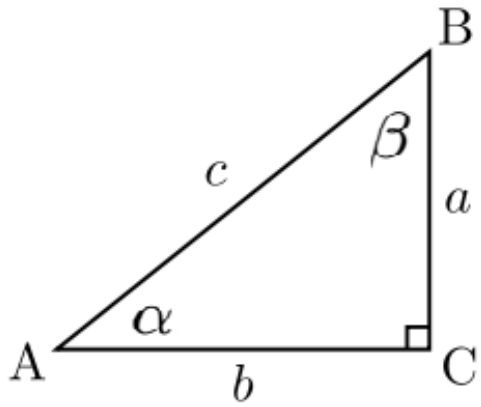
Vimos en la clase anterior que existen razones en el triángulo rectángulo, que, independiente de la longitud de los catetos e hipotenusa, mantienen su valor constante. A estas razones las llamaremos **razones trigonométricas**.

Razones Trigonométricas

Las razones dependen del ángulo sobre el cual se calcula la razón, cuando se trabajan con ángulos mayores a $180°$, o ángulos más generales se prefiere hablar de **funciones trigonométricas**, en este curso usaremos de forma indistinta razón o función trigonométrica. En las diapositivas siguientes definiremos cada una de ellas.

Seno

Consideremos un triángulo rectángulo ABC, rectángulo en C, de lados a, b, c y ángulos $\alpha, \beta, 90°$
Definimos el seno del ángulo α (se denota como sen(α)) como la razón entre el cateto **opuesto** al ángulo α y la **hipotenusa**.

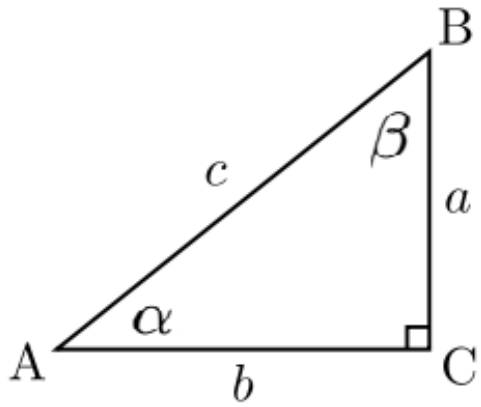


En la figura entonces tenemos que

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto al ángulo } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

Coseno

Consideremos un triángulo rectángulo ABC, rectángulo en C, de lados a, b, c y ángulos $\alpha, \beta, 90°$
Definimos el coseno del ángulo α (se denota como $\cos(\alpha)$) como la razón entre el cateto **adyacente** al ángulo α y la **hipotenusa**.

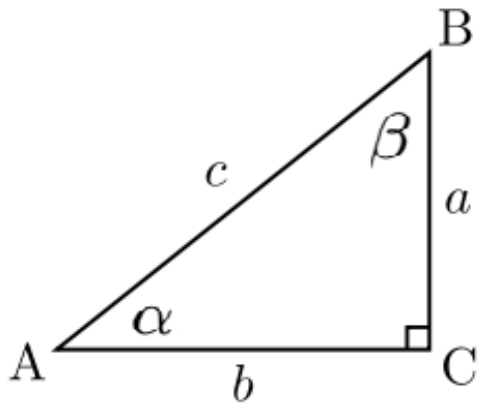


En la figura entonces tenemos que

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adyacente al ángulo } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

Tangente

Consideremos un triángulo rectángulo ABC, rectángulo en C, de lados a, b, c y ángulos $\alpha, \beta, 90°$
Definimos la tangente del ángulo α (se denota como $\tan(\alpha)$) como la razón entre el cateto **opuesto** al ángulo α y el cateto **adyacente** al ángulo α.

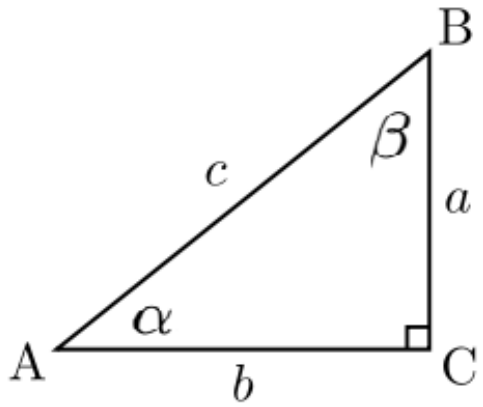


En la figura entonces tenemos que

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto al ángulo } \alpha}{\text{cateto adyacente al ángulo } \alpha} = \frac{a}{b}$$

Secante

Consideremos un triángulo rectángulo ABC, rectángulo en C, de lados a, b, c y ángulos $\alpha, \beta, 90°$
Definimos la secante del ángulo α (se denota como $\sec(\alpha)$) como la razón entre la **hipotenusa** y el cateto **adyacente** al ángulo α.

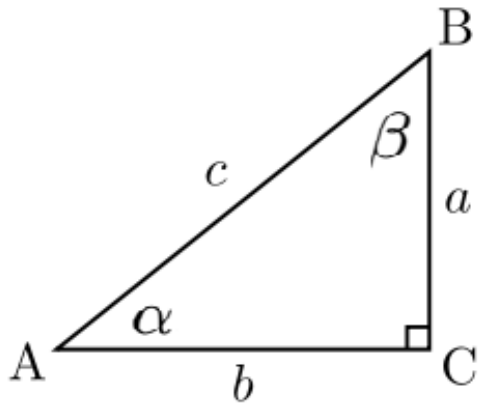


En la figura entonces tenemos que

$$\sec(\alpha) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente al ángulo } \alpha} = \frac{c}{b}$$

Cosecante

Consideremos un triángulo rectángulo ABC, rectángulo en C, de lados a, b, c y ángulos $\alpha, \beta, 90°$
Definimos la cosecante del ángulo α (se denota como $\csc(\alpha)$) como la razón entre la **hipotenusa** y el cateto **opuesto** al ángulo α .

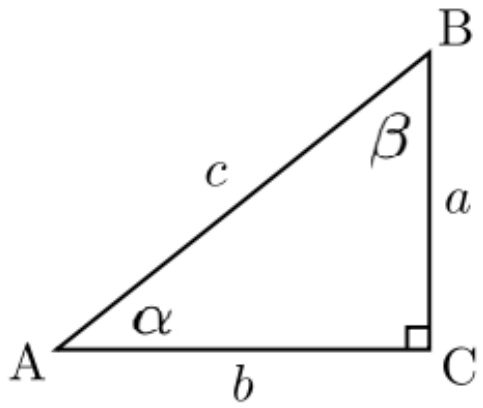


En la figura entonces tenemos que

$$\csc(\alpha) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto al ángulo } \alpha} = \frac{c}{a}$$

Cotangente

Consideremos un triángulo rectángulo ABC, rectángulo en C, de lados a, b, c y ángulos $\alpha, \beta, 90°$
Definimos la cotangente del ángulo α (se denota como $\cot(\alpha)$) como la razón entre el cateto **adyacente** al ángulo α y el cateto **opuesto** al ángulo α.

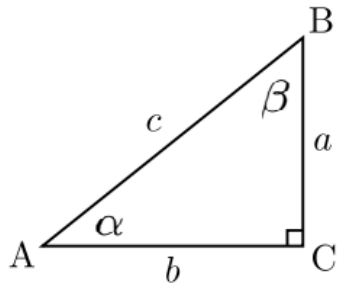


En la figura entonces tenemos que

$$\cot(\alpha) = \frac{\text{cateto adyacente al ángulo } \alpha}{\text{cateto opuesto al ángulo } \alpha} = \frac{b}{a}$$

Observaciones

Todas las razones trigonométricas se definen respecto al ángulo sobre el que se pide. Así por ejemplo



$$\cos(\beta) = \frac{\text{cateto adyacente al ángulo } \beta}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto al ángulo } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adyacente al ángulo } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{sen}(\beta) = \frac{\text{cateto opuesto al ángulo } \beta}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

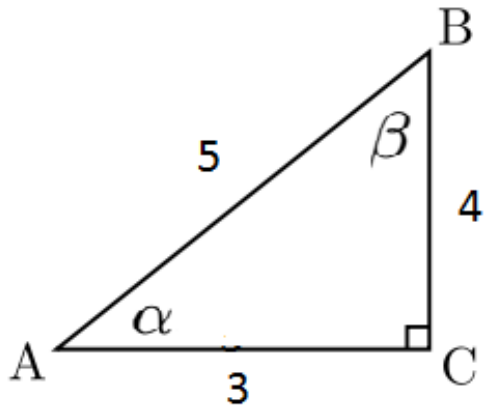
Observaciones

- Los valores sen(α), cos(α), tan(α), sec(α), csc(α), cot(α) corresponden a valores únicos para cada ángulo. Es por eso que se les llaman **funciones trigonométricas**
- Usando estas razones si supiésemos un ángulo y un cateto de un triángulo rectángulo, podemos inmediatamente calcular el otro cateto y la hipotenusa.
-

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Ejemplos

En base a la figura podemos calcular las siguientes razones trigonométricas



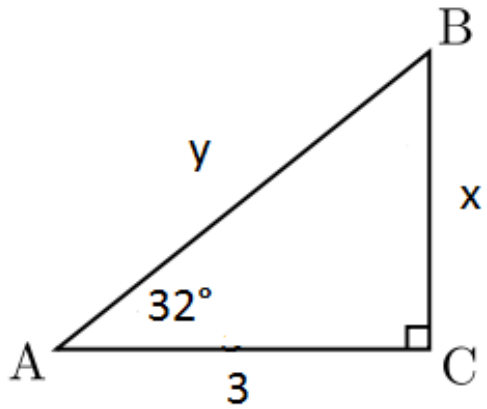
$$\text{sen}(\alpha) = \frac{4}{5} = 0.8 \qquad \text{sen}(\beta) = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$\cos(\alpha) = \frac{3}{5} = 0.6 \qquad \cos(\beta) = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$\tan(\alpha) = \frac{4}{3} = 1.\overline{3} \qquad \tan(\beta) = \frac{3}{4} = 0.75$$

Ejemplos

Sabiendo que el triángulo rectángulo tiene un ángulo agudo de $32°$. Calculemos el valor de x e y



- Sabemos que $\tan(32°) = \frac{x}{3}$, es decir, despejando x tenemos que $x = 3 \cdot \tan(32°)$
- Sabemos que $\cos(32°) = \frac{3}{y}$, es decir, despejando y tenemos que $y = \frac{3}{\cos(32°)}$

Preguntas por responder

- ¿Cuanto vale $\tan 32^\circ$? La *calculadora* nos dice que $\tan 32^\circ \approx 0,661$, luego en la pregunta anterior $x \approx 3 \cdot 0,661 = 1,983$.
- ¿Cuanto vale $\cos 32^\circ$? La *calculadora* nos dice que $\cos 32^\circ \approx 0,848$, luego en la pregunta anterior $y = \frac{3}{\cos(32^\circ)} \approx \frac{3}{0,848} = 3,596$.
- ¿Es posible obtener $\cos 32^\circ$ o $\tan 32^\circ$ sin calculadora? ¿Existen ángulos sobre los cuales pueda calcular su razón trigonométrica de manera *exacta*?
- Si $\text{sen}(\alpha) = 0,8$, ¿Cuál es el ángulo agudo α? ¿Se puede determinar?

Preguntas por responder

En general resolver estas preguntas no son un problema fácil, se suele utilizar la calculadora (por ejemplo, pueden verificar que $\text{sen}(53.13^\circ) \approx 0.8$), hay razones trigonométricas de muchos ángulos que no se pueden obtener de manera exacta. Sin embargo, existen algunos ángulos, los llamados ángulos notables que permiten calcular sus razones trigonométricas exactas para dichos ángulos. Estos se verán en la siguiente clase.