

Trigonometría

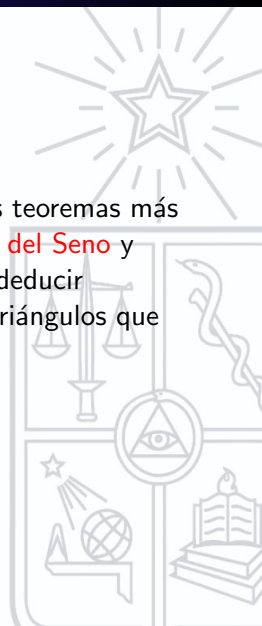
Sebastián Espinosa

Escuela de Verano
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Clase 5
Teoremas

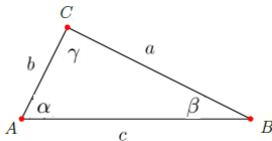
Introducción

Esta es la última parte del curso, donde veremos los teoremas más relevantes a partir de las clases anteriores: **Teorema del Seno** y **Teorema del Coseno**. Estos teoremas nos permiten deducir relaciones que existen entre los lados y ángulos de triángulos que no necesariamente son rectángulos.



Teorema del Seno

Consideremos un triángulo *cualquiera*¹ ABC, de lados a, b, c y ángulos α, β, γ



Tenemos la siguiente relación conocida como el Teorema del Seno

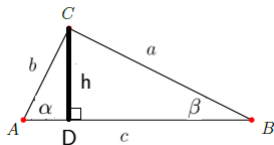
Teorema del Seno

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{a} = \frac{\text{sen}(\beta)}{b} = \frac{\text{sen}(\gamma)}{c}.$$

¹Cuando se refiere a cualquiera, quiere decir que puede tener cualquier ángulo interior, no es necesariamente ni equilátero, ni isósceles ni rectángulo.

Teorema del Seno

Demostración: Si se traza una altura de lado h en el vértice C obtenemos lo siguiente



Al hacer eso tenemos dos triángulos rectángulos: ADC rectángulo en D y el triángulo CDB también rectángulo en D . Aplicamos directamente la definición de seno de un ángulo y obtenemos lo siguiente.

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{h}{b} \quad \text{y} \quad \text{sen}(\beta) = \frac{h}{a}$$

Teorema del Seno

Despejando h en ambas igualdades tenemos que

$$\operatorname{sen}(\alpha)b = h \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(\beta)a = h$$

Igualando h :

$$\operatorname{sen}(\alpha)b = \operatorname{sen}(\beta)a$$

Que es lo mismo que

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{b}.$$

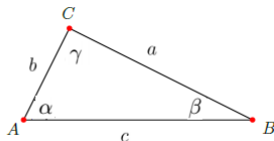
Notar que este mismo procedimiento se puede hacer con el ángulo γ y el lado c por lo que tendríamos que

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{b} = \frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{c}.$$



Teorema del Coseno

Consideremos un triángulo cualquiera ABC, de lados a, b, c y ángulos α, β, γ



Tenemos la siguientes relaciones conocidas como el Teorema del Coseno

Teorema del Coseno

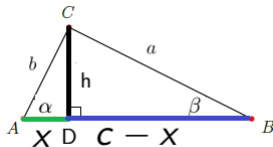
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$

Teorema del Coseno

Demostración: Si se traza una altura de lado h en el vértice C obtenemos lo siguiente



Al hacer eso tenemos dos triángulos rectángulos: ADC rectángulo en D y el triángulo CDB también rectángulo en D . El lado AD en verde es desconocido así que lo llamaremos x , por otro lado, el segmento DB en azul tendrá valor $c - x$ (ya que $\overline{AD} + \overline{DB} = c$)

Teorema del Coseno

Apliquemos el Teorema de Pitágoras en el triángulo CDB , con esto tenemos que

$$\begin{aligned}a^2 &= h^2 + (c - x)^2 \\ &= h^2 + c^2 - 2cx + x^2\end{aligned}$$

Donde en la última línea se aplicó el cuadrado de binomio.

Notemos que el triángulo ADC también se le puede aplicar el Teorema de Pitágoras con lo que tenemos que

$$\begin{aligned}b^2 &= h^2 + x^2 \\ b^2 - x^2 &= h^2\end{aligned}$$

Si esta última igualdad $h^2 = b^2 - x^2$ la reemplazamos en $a^2 = h^2 + c^2 - 2cx + x^2$, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2cx\end{aligned}$$



Teorema del Coseno

Finalmente, fijándonos nuevamente en el triángulo ADC tenemos que

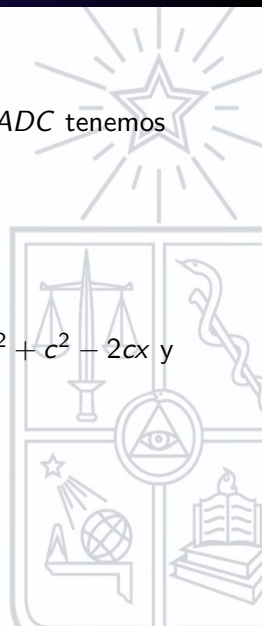
$$\cos(\alpha) = \frac{x}{b},$$

que es equivalente a

$$x = b \cos(\alpha)$$

Esto último lo reemplazamos en la ecuación $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$ y concluimos que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha).$$



Teorema del Coseno

Este mismo procedimiento se puede hacer con los lados b y c gracias a la simetría de la fórmula, con lo que tenemos el Teorema del Coseno para los tres lados, es decir,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$



Comentarios Finales

Realizar la última guía aplicando los conceptos vistos en esta clase y las anteriores. No duden en contactarnos en caso de cualquier consulta que tengan. Mucho éxito!

