Pauta Auxiliar 2

P1 Identidad de complemento

¿Cómo demostrar? 

Para demostrar debemos elegir un lado de la igualdad y desarrollarlo hasta llegar al otro.

pdq $\quad \operatorname{sen}(\alpha) = \cos(\beta)$

"por demostrar que" (se agrega por formalidad

Elegimos partir con $\operatorname{sen}(\alpha)$

entonces

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\ & \operatorname{sen}(\alpha) \\
= & \operatorname{sen}(90° - \beta) && \text{* por } \alpha + \beta \text{ ángulos complementarios } (\alpha+\beta = 90°) \\
= & \operatorname{sen}(90°)\cos(\beta) + \cos(90°)\operatorname{sen}(-\beta) && \text{* por identidad de la suma} \\
= & \operatorname{sen}(90°)\cos(\beta) - \cos(90°)\operatorname{sen}(\beta) && \text{* por identidad de los signos} \\
= & 1 \cdot \cos(\beta) - 0 \cdot \operatorname{sen}(\beta) && \text{* por ángulos notables} \\
= & \cos(\beta) \ //
\end{aligned}
$$

Así $\operatorname{sen}(\alpha) = \cos(\beta)$ ■ "el seno de un ángulo es el coseno de su complemento"

■ Se pone al finalizar una demostración

Importante: Se debe justificar cada paso de la demostración explicitando qué se utilizó.

P2 La idea es crear sumas y restas para obtener ángulos notables y utilizar las identidades de la suma para seno y coseno.

a) $\cos(120°) = \cos(60° + 60°)$

$= \cos(60°)\cos(60°) - \operatorname{sen}(60°)\operatorname{sen}(60°)$ * I. suma

$= \cos(60°)^2 - \operatorname{sen}(60°)^2$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ * Ángulos notábles

$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$ //

b) $\operatorname{sen}(105°) = \operatorname{sen}(60° + 45°)$

$= \operatorname{sen}(60°)\cos(45°) + \cos(60°)\operatorname{sen}(45°)$ * I. suma

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ * Ángulos notábles

$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ //

c) $\operatorname{sen}^2(30°) + \cos^2(30°) = 1$ // * I. Fundamental

d) $\cos(-45°) + \operatorname{sen}(-30°)$

$= \cos(45°) - \operatorname{sen}(30°)$ * I. signos

$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ //

P3

a) pdq $\quad \operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{sen}(2\alpha)\\
&= \operatorname{sen}(\alpha+\alpha)\\
&= \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) && * \text{ I suma}\\
&= 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) \quad //
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

b) pdq $\quad \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)$

$$
\begin{aligned}
&\cos(2\alpha)\\
&= \cos(\alpha+\alpha)\\
&= \cos(\alpha)\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) && * \text{ I. suma}\\
&= \cos(\alpha)^2 - \operatorname{sen}(\alpha)^2 \quad //
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Dato: Las identidades de a) y b) se conocen como los Identidades del ángulo doble.

c) Lo difícil de esta pregunta es saber con cuál lado empezar a demostrar.

El lado ... depende

Pero generalmente es el lado con más expresiones, como este caso.

Por lo tanto vamos a demostrar el lado izquierdo.

pdq $$\overset{(1)}{\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}} + \overset{(2)}{\frac{tg(\alpha)}{ctg(\alpha)}} + \overset{(3)}{\frac{\sec(\alpha)}{cosec(\alpha)}} = \frac{2ctg(\alpha)+1}{ctg(\alpha)^2}$$

Trabajamos cada expresión por separado para formar tangentes y cotangentes como el lado derecho.

(1) $$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = tg(\alpha)$$

(2) $$\frac{tg(\alpha)}{ctg(\alpha)}$$

(3) $$\frac{\sec(\alpha)}{cosec(\alpha)} = \frac{\frac{1}{\cos(\alpha)}}{\frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)}} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = tg(\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} + \frac{tg(\alpha)}{ctg(\alpha)} + \frac{\sec(\alpha)}{cosec(\alpha)}$$

$$= tg(\alpha) + \frac{tg(\alpha)}{ctg(\alpha)} + tg(\alpha)$$

$$= 2tg(\alpha) + \frac{tg(\alpha)}{ctg(\alpha)}$$

$$= \frac{2tg(\alpha)\cdot ctg(\alpha) + tg(\alpha)}{ctg(\alpha)}$$

$$= \frac{2 + tg(\alpha)}{ctg(\alpha)} \Big/ \cdot \frac{ctg}{ctg}$$ → Multiplicación por un 1 conveniente

$$= \frac{2ctg(\alpha) + 1}{ctg(\alpha)^2} \quad //$$

$\blacksquare$