



Clase 2: Modelamiento Matemático y Herramientas Computacionales



@comunidadingenio



/comunidadingenio.cl/



Modelamiento Matemático

¿Que es un modelo?



Modelamiento Matemático

¿Que es un modelo **matemático**?

Es una manera de representar algún aspecto de la realidad a través del uso de herramientas matemáticas.

Modelamiento Matemático

Desde la antigüedad, la humanidad ha buscado representar mediante el **cálculo matemático** el comportamiento de **sistemas y procesos**.

El uso de modelos matemáticos ha permitido resolver diversos problemas a lo largo de la historia, desde la gestión de recursos hasta el desarrollo de nuevas tecnologías.

Modelamiento Matemático

¿Se les ocurren algunos ejemplos de aplicación de herramientas matemáticas para resolver problemas?

Herramientas Matemáticas

Para construir un modelo se necesita disponer de los siguientes elementos:

- Parámetros del modelo
- Variables del modelo
- Funciones matemáticas

Normalmente se utilizan letras para representar a las variables del modelo (frecuentemente se usa “x”)

Herramientas Matemáticas

Funciones matemáticas más usadas en ingeniería:

Funciones lineales

- $f(x) = a x$
- $f(x) = a x + b$
- $f(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2$
- $f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$

Herramientas Matemáticas

Funciones matemáticas más usadas en ingeniería:

Funciones Trigonométricas

- $\sin(x)$
- $\cos(x)$
- $\tan(x)$

Función Inversa

Si $f(x) = y$

entonces la función inversa de f es:

- $f^{-1}(y) = x$

Optimización

¿Qué es optimización?

Según Wikipedia:

*“En matemáticas la **optimización** o programación matemática intenta dar respuesta a un tipo general de problemas matemáticos donde se desea elegir **el mejor** entre un **conjunto de elementos**.”*

Optimización

Un problema de optimización se encuentra formado por los siguientes elementos:

- Variables de optimización (o decisión)
- Restricciones de igualdad (modelo matemático)
- Restricciones de desigualdad (inecuaciones)
- Función de costos o penalización

Sumatorias

Como el problema de optimización normalmente debe manejar un conjunto de elementos, la función objetivo del problema corresponderá a la suma de cada uno sus costos asociados.

Para el caso donde hay muchas variables de decisión, la función objetivo se define mediante **sumatorias**

Sumatorias

La sumatoria es un operador matemático que representa la suma entre varios elementos **(ipueden llegar a ser infinitos términos!)**

$$\sum_{i=1}^3 a_i = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\sum_{i=1}^5 i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 2$$

Problema de Programación Lineal

¿Qué es un Problema de Programación Lineal (PPL)?

El PPL es un problema de optimización donde la función objetivo que se minimiza (o maximiza) es una función lineal.

Problema de Programación Lineal

¿Cómo logramos la implementación computacional de un PPL?

Podemos usar la herramienta Solver de Excel

Aprendamos con un Ejemplo

Se busca maximizar la función

$$f(x, y) = 10x + 8y$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$30x + 20y \leq 120$$

$$2x + 2y \leq 9$$

$$4x + 6y \leq 24$$

$$x, y \geq 0$$

Aprendamos con un Ejemplo

Definamos la función objetivo y restricciones en el Excel:

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Ejemplo Programación PPL en Excel					
3							
4		Funcion objetivo					
5							
6		Variables de Decision:	X	Y			
7			10	8	Parametros de la función objetivo		
8							
9							
10		Restricciones:					Valor parte izquierda de las restricciones
11		Restricción 1:	30	20	<=	120	
12		Restricción 2:	2	2	<=	9	
13		Restricción 3:	4	6	<=	24	
14							
15							
16							

Función Objetivo:

- $C4 = C7 * C8 + D7 * D8$

Restricciones:

- $G11 = C11 * C8 + D11 * D8$

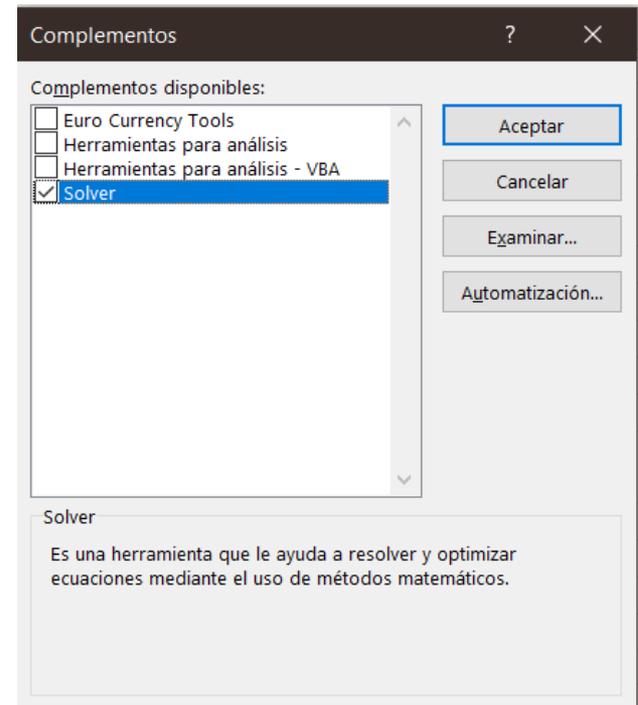
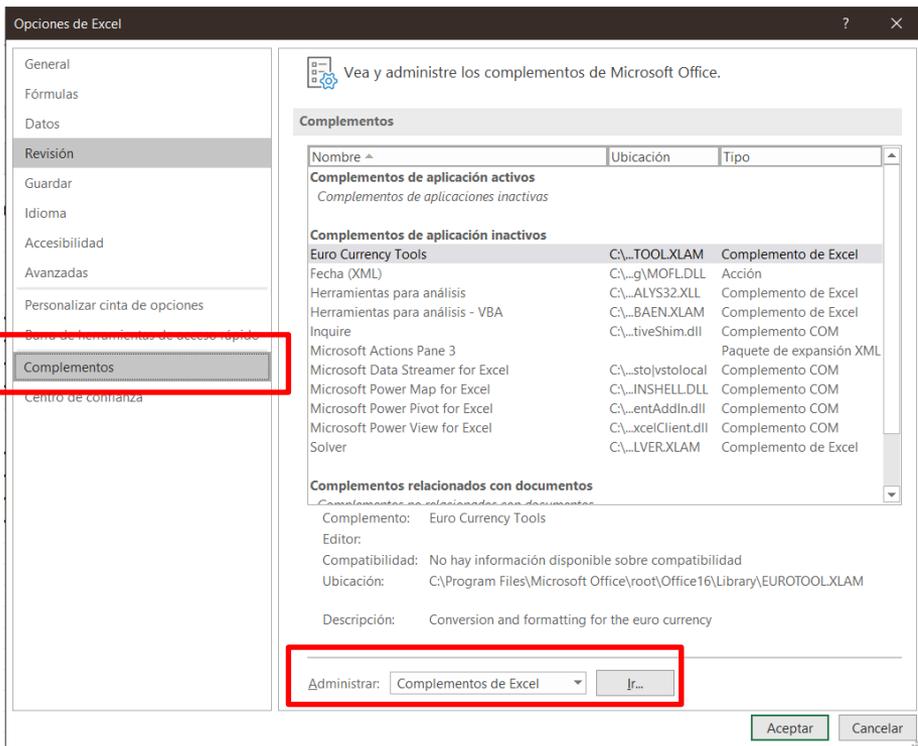
- $G12 = C12 * C8 + D12 * D8$

- $G13 = C13 * C8 + D13 * D8$

Aprendamos con un Ejemplo

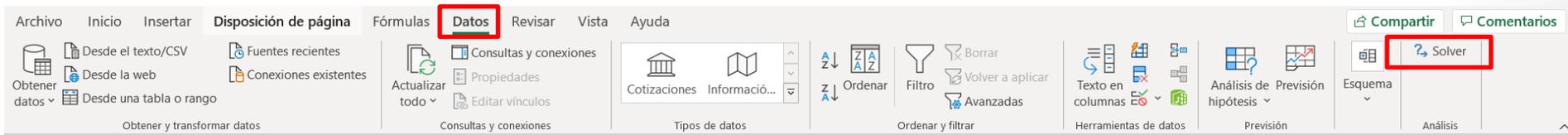
Verificamos que tengamos la herramienta activada

Van a la pestaña **Archivo**>**Opciones**



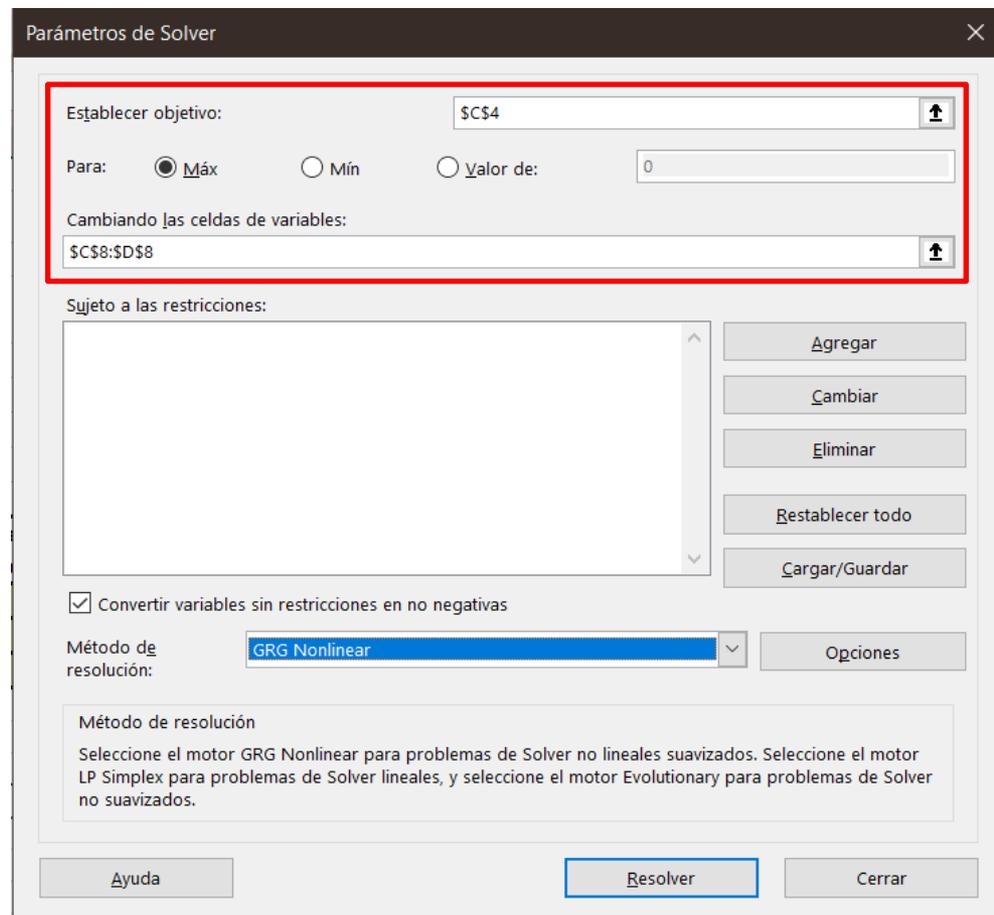
Aprendamos con un Ejemplo

La herramienta Solver se encuentra en la pestaña **Datos**, en el grupo **Análisis**



Aprendamos con un Ejemplo

Asignamos la función objetivo y variables de decisión



Parámetros de Solver

Establecer objetivo:

Para: Máx Mín Valor de:

Cambiando las celdas de variables:

Sujeto a las restricciones:

Convertir variables sin restricciones en no negativas

Método de resolución:

Método de resolución
Seleccione el motor GRG Nonlinear para problemas de Solver no lineales suavizados. Seleccione el motor LP Simplex para problemas de Solver lineales, y seleccione el motor Evolutionary para problemas de Solver no suavizados.

Ayuda Resolver Cerrar

Aprendamos con un Ejemplo

Agregamos las restricciones

Parámetros de Solver

Establecer objetivo:

Para: Máx Mín Valor de:

Cambiando las celdas de variables:

Sujeto a las restricciones:

Convertir variables sin restricciones en no negativas

Método de resolución:

Método de resolución

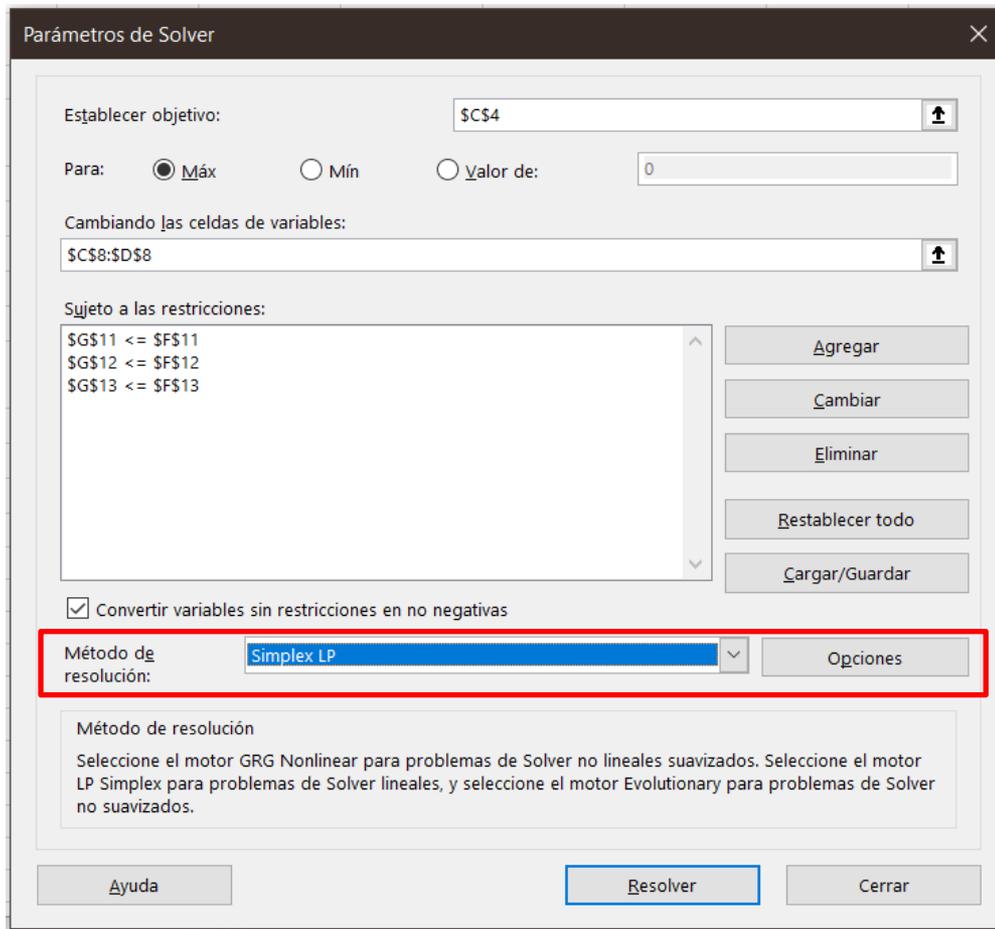
Seleccione el motor GRG Nonlinear para problemas de Solver no lineales suavizados. Seleccione el motor LP Simplex para problemas de Solver lineales, y seleccione el motor Evolutionary para problemas de Solver no suavizados.

Agregar restricción

Referencia de celda: Restricción:

Aprendamos con un Ejemplo

Finalmente escogemos el motor de resolución:



Parámetros de Solver

Establecer objetivo: ↑

Para: Máx Mín Valor de:

Cambiando las celdas de variables: ↑

Sujeto a las restricciones:

Convertir variables sin restricciones en no negativas

Método de resolución: ↓

Método de resolución

Seleccione el motor GRG Nonlinear para problemas de Solver no lineales suavizados. Seleccione el motor LP Simplex para problemas de Solver lineales, y seleccione el motor Evolutionary para problemas de Solver no suavizados.

Y hacemos click en
Resolver

Aprendamos con un Ejemplo

Solución que arroja el solver:

$$X=3, Y=1.5$$

Ejemplo Programación PPL en Excel

Funcion objetivo	42
------------------	----

Variables de Decision:	X	Y	Parametros de la función objetivo
	10	8	
	3	1.5	

Restricciones:					Valor parte izquierda de las restricciones
Restricción 1:	30	20	<=	120	120
Restricción 2:	2	2	<=	9	9
Restricción 3:	4	6	<=	24	21

Resultados de Solver

Solver encontró una solución. Se cumplen todas las restricciones y condiciones óptimas.

Conservar solución de Solver
 Restaurar valores originales

Volver al cuadro de diálogo de parámetros de Solver

Informes
Responder
Sensibilidad
Límites

Informes de esquema

Aceptar Cancelar Guardar escenario...

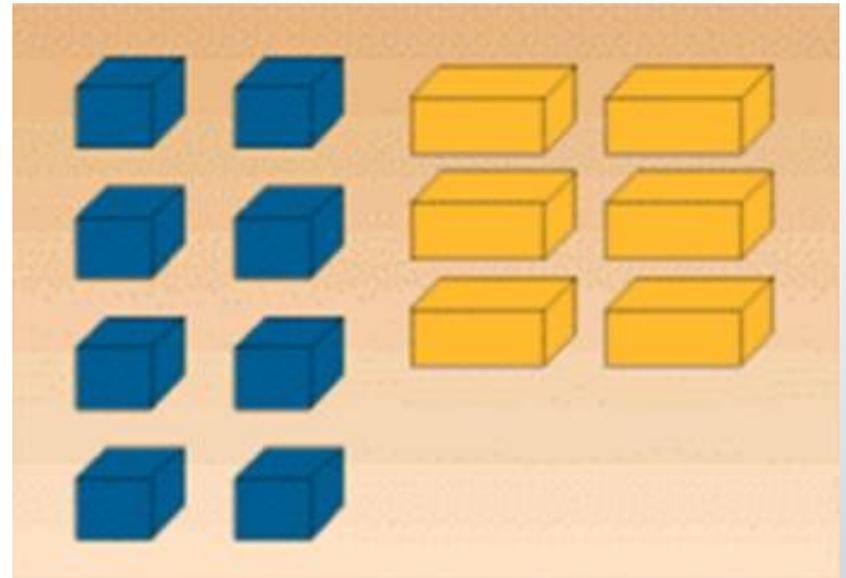
Solver encontró una solución. Se cumplen todas las restricciones y condiciones óptimas.

Al usar el motor GRG, Solver ha encontrado al menos una solución óptima local. Al usar Simplex LP, significa que Solver ha encontrado una solución óptima global.

Ejemplo: Fabrica de Muebles

En una fábrica de muebles de juguete se construyen mesas y sillas.

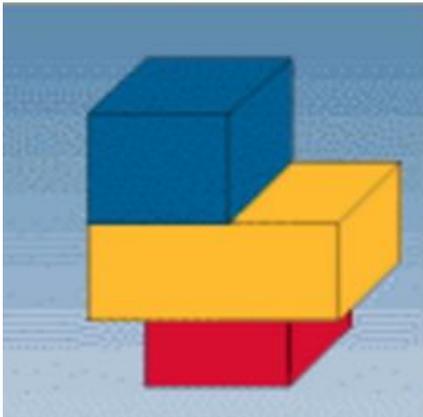
Para su construcción se usan dos tipos de piezas: grandes y pequeñas.



Ejemplo: Fabrica de Muebles

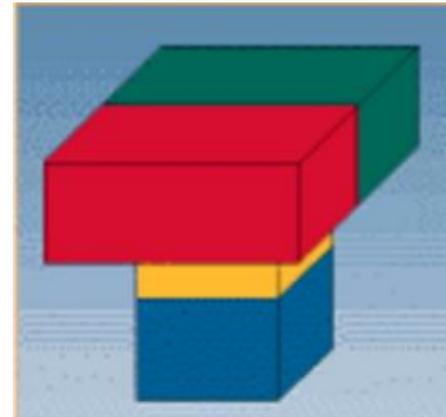
Para construir una **silla**
se usan:

- 2 piezas pequeñas
- 1 pieza grande



Para construir una **mesa**
se usan:

- 2 piezas pequeñas
- 2 piezas grandes



Ejemplo: Fabrica de Muebles

Costos

- Piezas grandes: \$5
- Piezas pequeñas: \$3

¿Cuánto cuesta construir una mesa?

¿Cuánto cuesta construir una silla?

Ejemplo: Fabrica de Muebles

Precios de venta

- Mesas: \$32
- Sillas: \$21

Utilidad:

$$U = (\text{Precio producto}) - (\text{Costo producto})$$

¿Cuánto es la utilidad de construir una mesa?

¿Cuánto es la utilidad de construir una silla?

Ejemplo: Fabrica de Muebles

Restricciones

En la fabrica hay actualmente:

6 piezas grandes

8 piezas pequeñas

¿Cuántas mesas y sillas se pueden construir?

Ejemplo: Fabrica de Muebles

¿Cuál es la combinación que entrega la mayor ganancia?

¿Esa combinación es la misma que entregaría la mayor utilidad?

Ejemplo: Fabrica de Muebles

No necesariamente coincide que la combinación con mayor ganancia también tenga la mayor utilidad.

¡Necesitamos probar todas las combinaciones posibles!

Ejemplo: Fabrica de Muebles

¿Qué pasa si ahora tenemos una pieza grande adicional?

¿Y si ahora tenemos el doble de piezas grandes y pequeñas?

¿Y si ahora tenemos el 12221 piezas grandes y 18475 pequeñas?

Ejemplo: Fabrica de Muebles

Para el caso donde hay demasiadas combinaciones posibles:

Se puede resolver mediante un PPL programado en computador

Actividad

Implemente en Excel el PPL que represente el caso de la Fabrica de Muebles

Resuelva para los casos con:

- 6 piezas grandes y 8 piezas pequeñas
- 12221 piezas grandes y 18475 piezas pequeñas

Actividad Opcional

Resuelva el PPL del problema de la distribuidora de bebidas

Actividad Semanal 2

Proyecto Grupal o Individual Optimización aplicada a la vida real 2

- Mismos grupos de la actividad anterior
- Resolver el problema planteado en la actividad anterior usando PPL
- Compare con una tabla que muestre los resultados de distintas combinaciones posibles para las variables de decisión

Actividad Semanal

Evaluación

- Deberán entregar una presentación en PowerPoint o archivo Excel antes de la última clase, donde se explique:
- El PPL implementado
- Tabla con resultados obtenidos por distintas combinaciones de posibles soluciones

¿Qué aprendimos hoy?

- **Modelamiento matemático**
- **Algunas herramientas matemáticas**
- **Optimización**
- **Sumatorias**
- **Problema de programación lineal (PPL)**