Optimización Lineal

Introducción

El primer capítulo de este apunte tratará de la **optimización**, la cual aborda muchos ámbitos de la vida, desde los procesos industriales, hasta cuando vamos a comprar el pan, o cuando vamos con retraso a nuestro lugar de trabajo o estudio. Sin embargo, dado que vamos a hablar de optimización vale hacerse la pregunta básica:

¿Qué es la optimización?

Para saber que es la optimización podemos buscar en varios lugares, que a lo mejor muchos de ustedes también buscaría, por ejemplo:

- Según la RAE (Real Academia de Lengua Española): La optimización es el acto o efecto de optimizar. A su vez, definen optimizar como *"Buscar la mejor manera de realizar una actividad".*

- Si buscamos en Wikipedia, nos da una definición parecida, pero que nos acomoda un poco más:

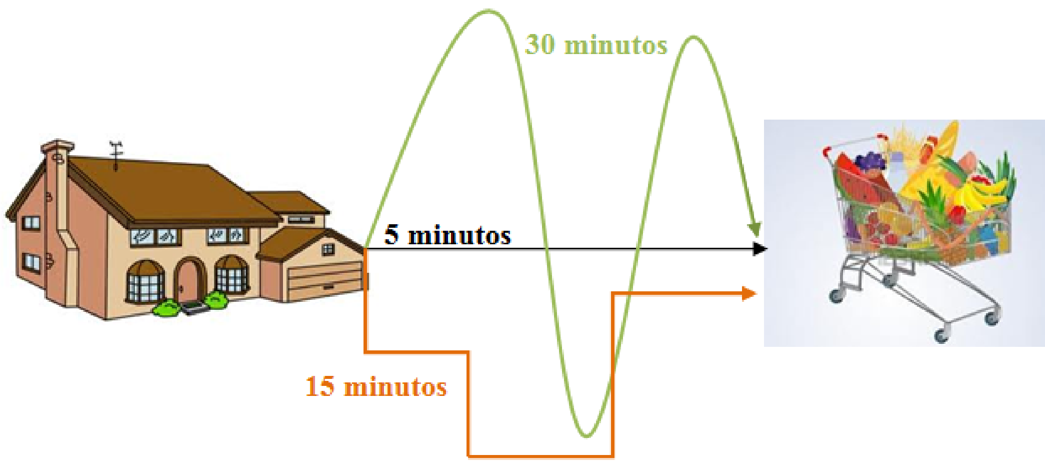
*"En matemáticas la **optimización** o programación matemática intenta dar respuesta a un tipo general de problemas matemáticos donde se desea elegir **el mejor** entre un **conjunto de elementos**."*

Esta definición nos da una manera más contextualizada de entender la optimización, puesto que nos define que tipo de problemas aboca. Notar que dejamos en negritas algunas palabras, la primera obviamente es optimización. La segunda frase que dejamos en negrita es **el mejor**. Cuando hablemos de optimización durante este curso, buscaremos siempre a EL mejor, al que mejor cumple con nuestros requisitos y bajo ciertos criterios. La segunda frase es **conjunto de elementos**: esto quiere decir, que no podemos elegir cualquier cosa dentro de lo mejor, sino que el conjunto de elecciones está bien definido.

Para no seguir confundiéndonos, veámoslo en un ejemplo:

Ejemplo 1 – Ir al supermercado.

Supongamos que ustedes están entretenidos en su casa y los mandan a hacer compras en supermercados. Como estaban entretenidos ustedes quieren volver lo más rápido posible:



En este ejemplo, analicemos los conceptos anteriores.

- ¿Cuál es nuestro criterio? Llegar lo más rápido posible.
- ¿Cuál es el conjunto de elementos que hace mención la definición? El conjunto conformado por los tres caminos.
- ¿Cuál es el mejor dentro de nuestro criterio? Irse por el camino de 5 minutos. A este camino lo llamaremos **solución óptima.**

Este es uno de los inmensos ejemplos que hay en la vida real de optimización, sin embargo, este problema parece ser muy fácil y al parecer no se necesita mayor estudio para resolverlo, ni siquiera para plantearlo matemáticamente. A continuación veremos que estos problemas en general, no son fáciles de resolver y que necesitamos herramientas matemáticas para poder analizarlos y resolverlos.

Modelos de Programación lineal

Un modelo matemático es una manera de representar algún aspecto de la realidad a través de las matemáticas. Existen muchos tipos de modelos matemáticos, por ejemplo, los modelos de ecuaciones diferenciales, modelos de simulación, modelos de teoría de juegos, modelos economicos, modelos de optimización, etc.

Los problemas de la vida real pueden ser descritos de muchas formas, dependiendo de quien lo haga, y también, pueden ser entendidos o interpretados de varias maneras. Esto es algo natural, ya que cada persona utiliza el lenguaje de una forma particular, el cual no tiene por qué ser igual para todos. Sin embargo, esto es problemático a la hora de abordar problemas muy grandes, que sólo pueden ser resueltos a través de un computador, ya que las máquinas no tienen capacidad para entenderlos y, por lo tanto, necesitan de un lenguaje especial para poder trabajar.

En este contexto, es que se hace necesario tener una forma universal de modelar estas problemáticas, de modo que éstos puedan ser programados y resueltos sin ambigüedades. Así es como nacen los modelos de optimización, y en particular, en donde nos centraremos, los modelos de Problemas de Programación Lineal o PPL. Estos modelos se componen de 5 partes fundamentales, que serán explicadas a partir del siguiente ejemplo:

Ejemplo 2 - Problema de la Dieta Óptima

Una persona debe decidir las cantidades óptimas a consumir de 3 distintos alimentos: carne, fruta y verdura, cada uno de los cuales aporta cierta cantidad de proteínas, vitaminas y carbohidratos. Por razones de salud, esta persona debe consumir cierta cantidad de cada uno de estos nutrientes, como mínimo. Cada uno de los alimentos tiene un precio conocido, y se debe encontrar la dieta que satisfaga los requerimientos de salud de esta persona a mínimo costo.

Este problema queda modelado de la siguiente forma:

Conjuntos:

$$Alimentos: i \in \{carne, fruta, verdura\}$$
$$Nutrientes: j \in \{proteínas, vitaminas, carbohidratos\}$$

Cuando se define un conjunto, se le asigna un índice que "recorrerá" ese conjunto en todo el modelo. En este caso, el índice i, puede tomar los valores "carne", "fruta" y "verdura", mientras que j puede tomar los valores "proteínas", "vitaminas" y "carbohidratos".

Variables de Decisión:

x_i = Cantidad de alimento i a consumir

Aquí se han definido 3 variables: $x_{carne}, x_{verdura}, x_{fruta}$ las cuales son números que representan las cantidades a consumir de cada alimento.

Parámetros:

n_{ij} = Aporte de alimento i en nutriente j

p_i = Precio unitario de alimento i

b_j = Cantidad mínima de nutriente j a consumir

Supongamos que la persona que resuelve este problema cuenta con la siguiente información:

Nutrientes por kg.	Proteínas	Vitaminas	Carbohidratos
Carne	0,2	0,05	0,3
Fruta	0,2	0,3	0,25
Verduras	0,1	0,15	0,4

Precio por kg.	
Carne	3
Fruta	2
Verduras	1

Mínimo Requerido	
Proteínas	0,15
Vitaminas	0,1
Carbohidratos	0,3

Los parámetros no hacen más que referirse a estos datos, por ejemplo, en este caso:

- $n_{frutas,carbohidratos} = 0.25$
- $p_{carne} = 3$
- $b_{vitaminas} = 0{,}1$

Restricciones:
Se debe consumir, al menos b_j unidades del nutriente j: $\sum_i \quad n_{ij}\, x_i \geq b_j \;\; \forall\, j \in Nutrientes$
Naturaleza de las Variables: $x_i \geq 0 \quad \forall i$

El símbolo que es como una letra A “invertida” , ∀, significa para todo. Luego la restricción de mínimo querido puede ser leída de la siguiente manera:
“Para todos los nutrientes, la sumatoria de lo que consumo en cada nutriente debe ser mayor o igual a lo mínimo”.

Aquí se han definido 3 restricciones sobre el mínimo de nutrientes a consumir (una por cada nutriente) y 3 más, sobre el tipo de números que deben ser las cantidades a consumir de cada alimento (una por cada alimento):

- Mínimo de proteínas:
$n_{carne,proteínas}\, x_{carne} + n_{fruta,proteínas}\, x_{fruta} + n_{verdura,proteínas}\, x_{verdura} \geq b_{proteínas}$

$$0{,}2\ x_{carne} + 0.2\ x_{fruta} + \ 0.1 x_{verdura} \geq 0.15$$

- Mínimo de vitaminas:
$n_{carne,vitamina}\, x_{carne} + n_{fruta,vitamina}\, x_{fruta} + n_{verdura,vitamina}\, x_{verdura} \geq b_{vitamina}$

$$0.05\ x_{carne} + 0.3\ x_{fruta} + \ 0.4 x_{verdura} \geq 0.1$$

- Mínimos de carbohidratos:
$n_{carne,carbohidratos}\, x_{carne} + n_{fruta,carbohidratos}\, x_{fruta} + n_{verdura,carbohidratos}\, x_{verdura} \geq b_{carbohidratos}$

$$0{,}3\ x_{carne} + 0.25\ x_{fruta} + \ 0.1 x_{verdura} \geq 0.3$$

- La cantidad de carne debe ser un número positivo: $x_{carne} \geq 0$
- La cantidad de fruta debe ser un número positivo: $x_{fruta} \geq 0$
- La cantidad de verduras debe ser un número positivo: $x_{verdura} \geq 0$

Función Objetivo:

$$\sum_{i \in Alimentos} p_i x_i$$

La función objetivo pretende minimizar el costo total de la dieta, es decir:

$$p_{carne} x_{carne} + p_{fruta} x_{fruta} + p_{verdura} x_{verdura}$$

$$3\ x_{carne} + \ 2\ x_{fruta} + \ 1\ x_{verdura}$$

Ejemplo 3 - Problema de la Mochila

Usted cuenta con una mochila de capacidad CAP unidades, que utilizará para llevar algunos objetos al colegio. Los objetos que puede llevar son los siguientes: un notebook, una fotografía, un lápiz y un libro, cada uno de los cuales le entrega una utilidad de u_i y ocupa c_i unidades de capacidad en la mochila. Usted debe decidir qué elementos llevar al colegio, de manera de obtener la máxima utilidad posible.

Conjuntos:

Objetos: $i \in \{notebook, foto, lápiz, libro\}$

Variables de Decisión:

$$x_i = \begin{cases} 1 & si\ se\ lleva\ el\ objeto\ i \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

Este tipo de variables se denominan **variables binarias** y sirven para representar decisiones del tipo sí o no.

Parámetros:

$u_i =$ Utilidad recibida si se lleva el objeto i

$c_i =$ Capacidad que el objeto i ocupa en la mochila

$CAP =$ Capacidad de la mochila

Notar que el parámetro CAP no tiene subíndice, ya que es un único valor y no depende de los objetos.

Restricciones:

No sobrepasar la capacidad de la mochila: $\sum_i c_i \cdot x_i \leq CAP$

Naturaleza de las Variables: $x_i \in \{0,1\} \quad \forall i$

La variable x_i sólo puede tomar los valores 0 y 1.

Función Objetivo:

$$Max \sum_i u_i \cdot x_i$$

Ejercicio Propuesto:

Utiliza los siguientes valores de los parámetros u_i, c_i y CAP:

	Notebook	Fotografía	Lápiz	Libro
Capacidad	15	5	3	10
Utilidad	35	40	10	15
Capcidad de la Mochila: 25 unidades				

Intenta encontrar la solución óptima. ¿Existe algún método para encontrarla?

Solución Gráfica

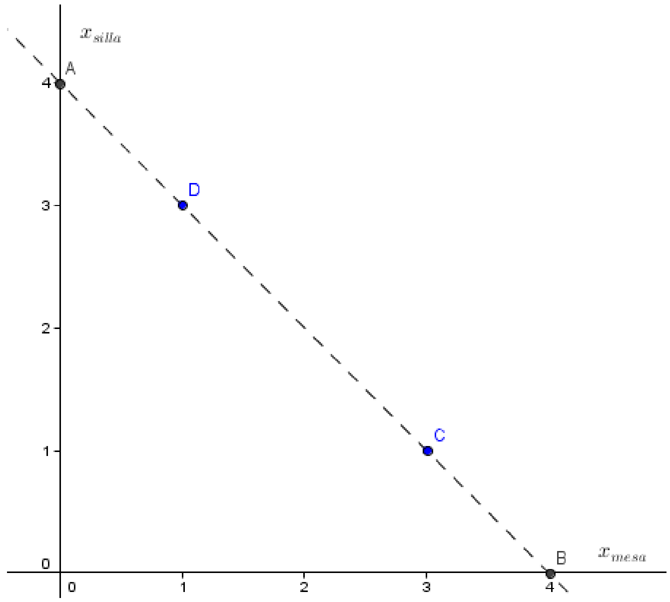
Hasta acá solamente hemos hablado solo de modelar los problemas pero aún no hemos visto cómo encontrar la solución óptima. Con dos variables, e inclusive tres, existe un método para poder resolver estos problemas el cual describiremos a continuación con el ejemplo de la fábrica de muebles:

Ejemplo 6 – Fábrica de muebles – Solución gráfica

Primero pensemos en la restricción de la cantidad de las piezas pequeñas:

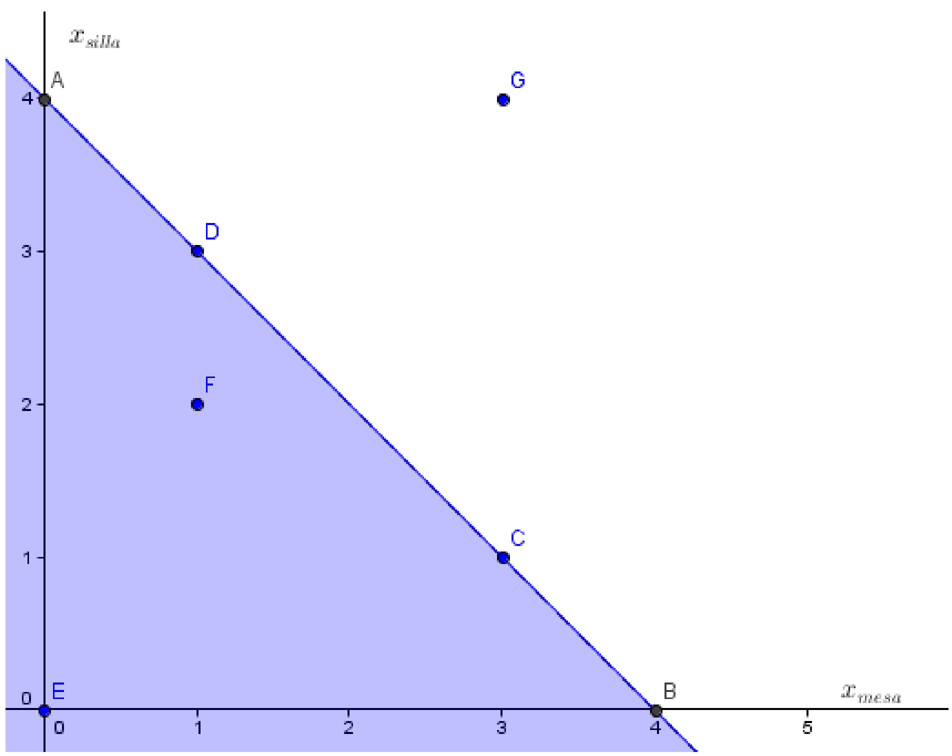
$$2x_{mesa} + 2x_{silla} \leq 8$$

Y hagamos un gráfico $x_{mesa}\ v/s\ \ x_{silla}$ y veamos todas las combinaciones de mesas y sillas que ocupan 8 piezas pequeñas. Claramente si hacemos 4 sillas y ninguna mesa, dado que cada silla ocupa 2 piezas pequeñas ocupamos 8 piezas pequeñas (**Punto A**). Por otra parte, si hacemos 4 sillas y ninguna mesa también ocupamos 8piezas (**Punto B**). Lo mismo pasa si hacemos 3 mesas y 1 silla, o si hacemos 3 sillas y 1 mesa (**Puntos C y D**). Ahora si unimos todos esos puntos nos queda el siguiente grafo:



Notemos que cada uno de esos puntos cumple con la condición: $2x_{mesa} + 2x_{silla} = 8$.

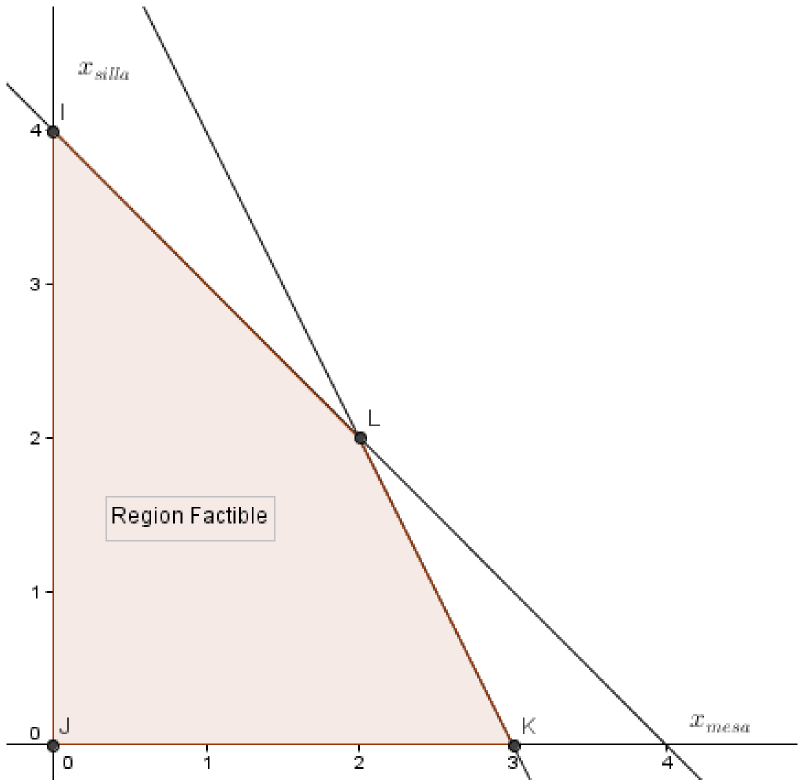
Ahora pensemos en los puntos que cumplen $2x_{mesa} + 2x_{silla} \leq 8$. Por ejemplo, el no hacer nada $x_{mesa} = 0$ y $x_{silla} = 0$ (**Punto E**) cumple esa restricción $2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \leq 8$. Al igual si hacemos una mesa y dos sillas (**Punto F**), puesto que $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 6 \leq 8$. Ahora si queremos hacer 3 mesas y cuatro sillas, la restricción no se cumple, puesto que $2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 14 > 8$ (**Punto G**).



Claramente los puntos que si cumplen la restricción están a un lado de la recta. Por lo que una manera de graficar una restricción con desigualdad, es graficar la recta asociada y pintar un lado del plano, en donde se cumple la restricción.

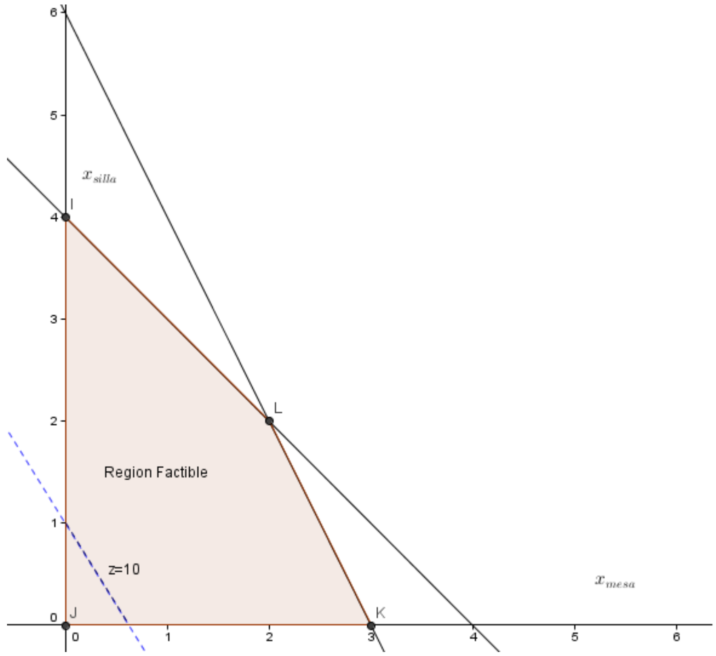
A continuación hacemos lo mismo con el resto de las restricciones, graficando todas juntas.

Luego, al **conjunto** de soluciones le llamaremos también **región factible** que es la intersección de todas las áreas, que es básicamente, el lugar donde se cumplen todas las restricciones.



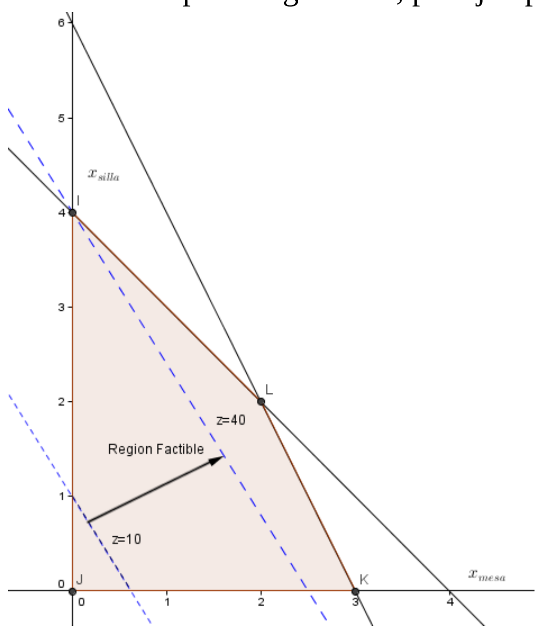
Ahora, tenemos caracterizado el "conjunto" y solo nos basta encontrar el mejor dentro de ese conjunto. Para hacer eso procederemos de la siguiente forma:

- Nos daremos un valor para la ganancia objetivo cualquiera por ejemplo 10.
- Graficamos la curva Ganancia =10, es decir: $16x_{mesa} + 10x_{silla} = 10$



Todos los puntos marcados en la recta que están sobre la región factible son combinaciones de mesas y sillas que provocan una ganancia de $10.

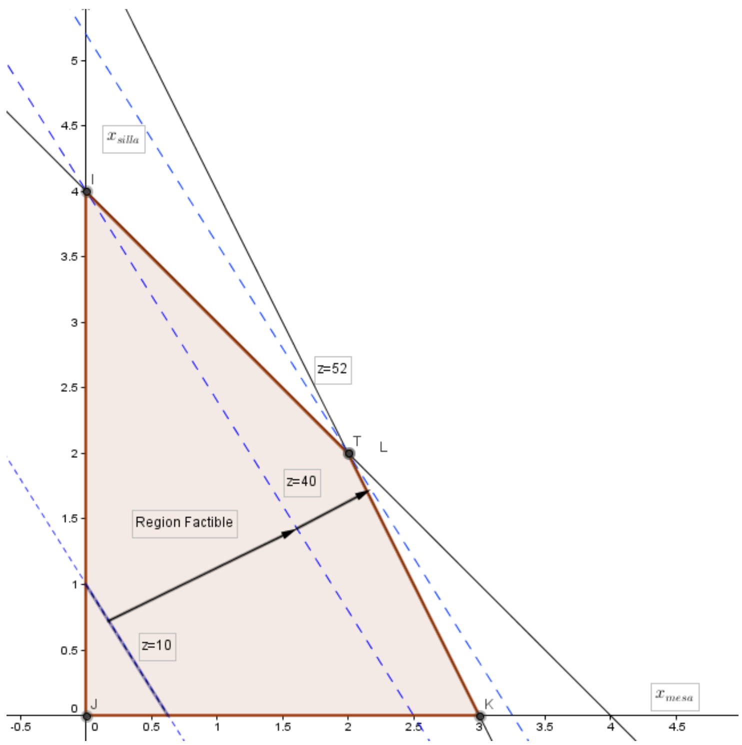
- Ahora nos daremos otro valor de posible ganancia, por ejemplo 40:



Nuevamente los puntos dentro de la región factible que están sobre la recta z: $16x_{mesa} + 10x_{silla} = 40$ son los puntos que tienen una ganancia de 40.

Ahora la pregunta es cuál de esos puntos es el que tiene mayor ganancia. Para responder primero vemos dos cosas:

1. Las rectas de ganancia 10 y 40 son paralelas. En general, con cualquier valor de la ganancia que queramos graficar resultará una recta paralela a estas.
2. Cuando la ganancia aumenta, la recta se “desplaza” hacia arriba en la derecha, por lo que si queremos aumentar la ganancia lo máximo posible debemos movernos en esa dirección. ¿Hasta cuándo? Hasta que las rectas ya no “toquen” la región factible. Esto se da en el siguiente valor:



Que es justo la intersección de las dos rectas. Es decir en el punto (2,2), es decir, tal como lo habían comprobado antes, la solución óptima es hacer 2 mesas y 2 sillas, con lo que se obtiene una ganancia de 52.

Notar que la metodología es general para todos los problemas con dos variables:

- Primero graficaremos cada una de las restricciones e identificaremos la región donde se interceptan la llamaremos **región factible**.
- Para cada valor posible de la función objetivo graficamos la recta asociada.
- Hacemos crecer este valor hasta que estas rectas “no toquen” la región factible.
- Identificamos el punto o arista que es la óptima y determinamos su valor.

Ejemplo 4 - Problema de Producción

En una industria se fabrican dos artículos: A y B, los cuales deben pasar por los procesos P1, P2, y P3 para su elaboración. La utilidad que se obtiene por cada artículo A es de $8.000 y por cada artículo B es de $26.000. La cantidad de horas que cada artículo debe pasar por cada proceso se muestran en la siguiente tabla:

Horas por proceso	P1	P2	P3
A	6	4	0
B	5	7	8

Por restricciones de personal, en los procesos P1, P2 y P3 se puede trabajar un máximo de 40, 36 y 32 horas, respectivamente. Se desea conocer las cantidades óptimas a producir de cada artículo, de modo de obtener la máxima utilidad posible.

Conjuntos:

Artículos: $i \in \{A, B\}$

Procesos: $j \in \{P1, P2, P3\}$

Variables de Decisión:

$x_i =$ Cantidad del artículo i a producir

Parámetros:

$h_{ij} =$ Cantidad de horas que necesita el artículo i en el proceso j

$u_i =$ Utilidad que se obtiene por cada artículo i

$HMAX_j =$ Cantidad máxima de horas en que puede realizarse el proceso j

Restricciones:

No utilizar más de $HMAX_j$ horas en proceso j: $\sum_i h_{ij} \cdot x_i \leq HMAX_j \quad \forall j$

Naturaleza de las Variables: $x_i \geq 0 \quad \forall i$

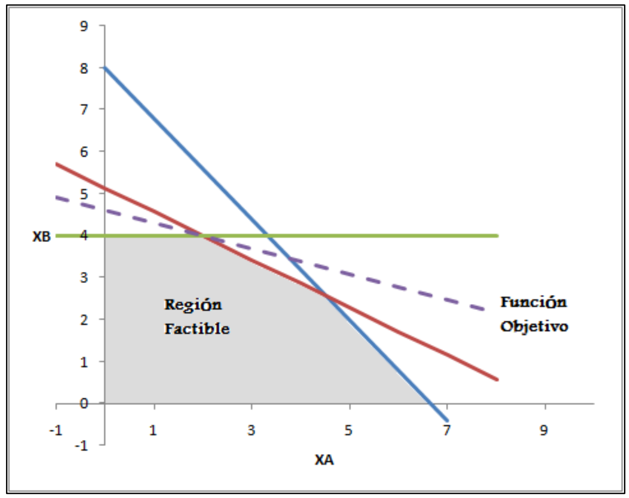
Función Objetivo:

$$Max \sum_i u_i \cdot x_i$$

Solución Gráfica

En este caso, como se tienen sólo 2 variables de decisión, este problema puede ser graficado en un plano cartesiano como un sistema de inecuaciones:

- $x_A \geq 0$
- $x_B \geq 0$
- $6x_A + 5x_B \leq 40$
- $4x_A + 7x_B \leq 36$
- $8x_B \leq 32$



Además, se puede encontrar la solución óptima de este problema, evaluando la función objetivo en cada uno de los vértices de la zona coloreada. Esta zona se llama Región Factible y está compuesta por todos los puntos que satisfacen todas las restricciones del problema.

La función objetivo en este ejemplo es: $Max\,\{8.000 \cdot x_A + 26.000 \cdot x_B\}$ Los vértices de la región factible y el valor de la función objetivo evaluada en cada uno, son:

$(0,0) \longrightarrow$ \$0

$\left(\frac{20}{3}, 0\right) \longrightarrow$ \$53.333

$(0,4) \longrightarrow$ \$104.000

$(2,4) \longrightarrow$ \$120.000

$\left(\frac{50}{11}, \frac{28}{11}\right) \longrightarrow$ \$102.545

Luego el óptimo se alcanza en el vértice $(2,4)$, es decir, producir 2 unidades del artículo A y 4 del artículo B, obteniéndose una utilidad de \$120.000.

¿Por qué la solución óptima se encuentra necesariamente en alguno de los vértices?, ¿qué ocurre si se considera un punto que no se encuentra en los vértices?