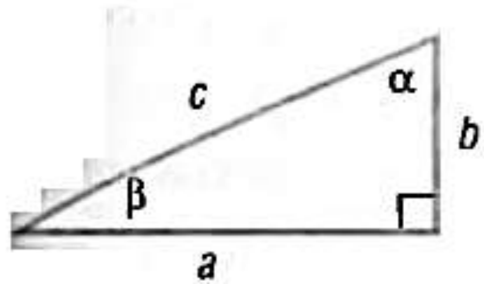
Aplicaciones de la trigonometría

Resolución de triángulos rectángulos



$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad \alpha + \beta = 90°$$

Resolución de un triángulo rectángulo

Utilice la figura 59. Si $b = 2$ y $\alpha = 40°$, encontrar a, c, y β.

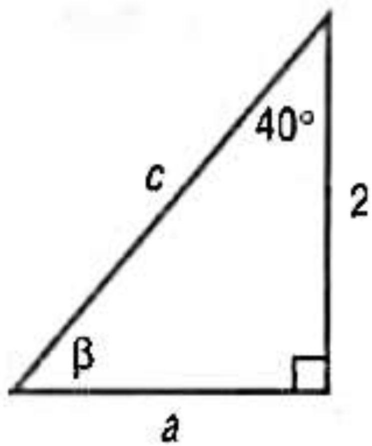


FIGURA 59

Solución

Como $\alpha = 40°$ y $\alpha + \beta = 90°$, determinamos que $\beta = 50°$. Para encontrar los lados a y c usamos las relaciones siguientes:

$$\tan 40° = \frac{a}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos 40° = \frac{2}{c}$$

De modo que

$$a = 2 \tan 40° \approx 1.68 \quad \text{y} \qquad c = \frac{2}{\cos 40°} \approx 2.61$$

Resolución de un triángulo rectángulo

Utilice la figura 60. Si $a = 3$ y $b = 2$, encontrar c, α, y β.

Solución

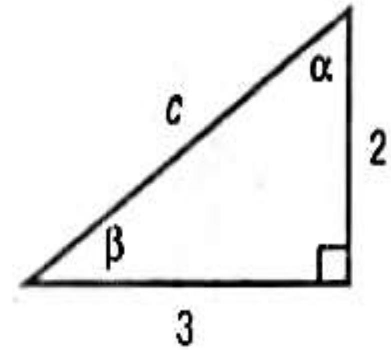


FIGURA 60

Ya que $a = 3$ y $b = 2$, por el teorema de Pitágoras tenemos

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13$$
$$c = \sqrt{13} \approx 3.61$$

Para encontrar α usamos la relación

$$\tan \alpha = \frac{3}{2}$$

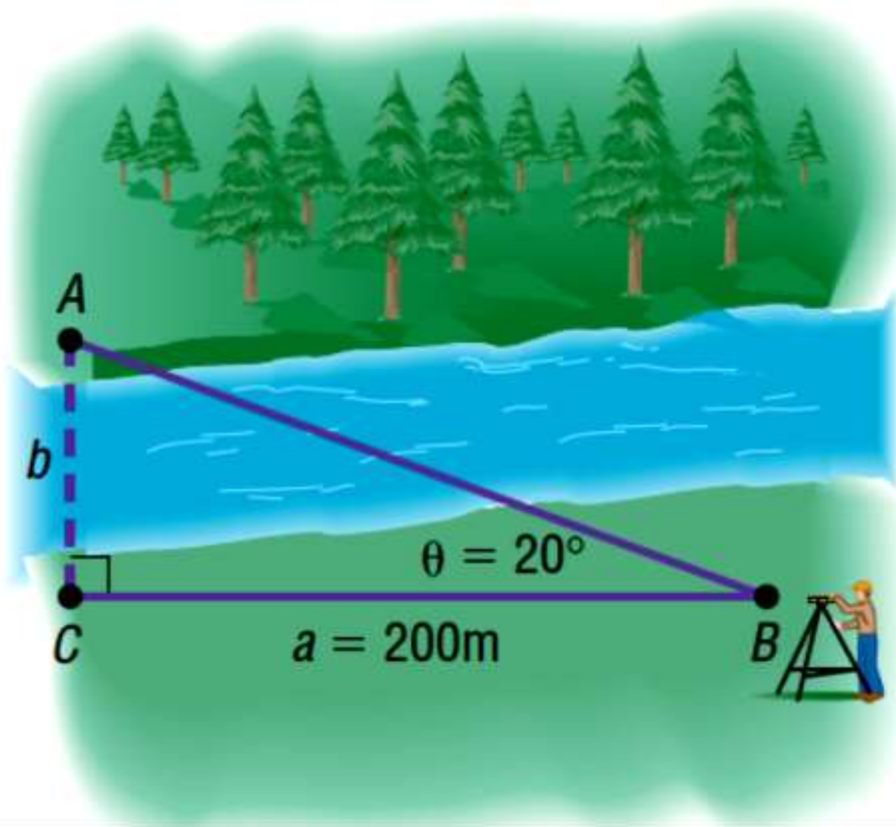
Ponga el modo de su calculadora en grados. Su calculadora debe tener una tecla marcada con $\boxed{\tan^{-1}}$ o con $\boxed{\text{inv}}$ o $\boxed{\text{SHIFT}}$*. Utilice la tecla $\boxed{\tan^{-1}}$ o las teclas $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\tan}$ como sigue para encontrar α:

Teclado:	$\boxed{3}$	$\boxed{\div}$ $\boxed{2}$	$\boxed{=}$	$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\tan}$
Pantalla:	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1.5}$	$\boxed{56.309932}$

Por tanto, $\alpha = 56.3°$ redondeado a un decimal. Ya que $\alpha + \beta = 90°$, encontramos que $\beta = 33.7°$.

Determinación del ancho de un río

Un agrimensor puede medir el ancho de un río colocando un tránsito* en el punto *C* en un lado del río y tomando un punto de referencia *A* del otro lado. *Véase* la figura 61. Después de girar un ángulo de 90° en *C*, camina 200 metros alejándose hasta llegar al punto *B*, mide el ángulo β y encuentra que es de 20°. ¿Cuál es el ancho del río?



Buscamos la longitud del lado b. Conocemos a y β, de modo que usamos la relación

$$\tan \beta = \frac{b}{a}$$

para obtener

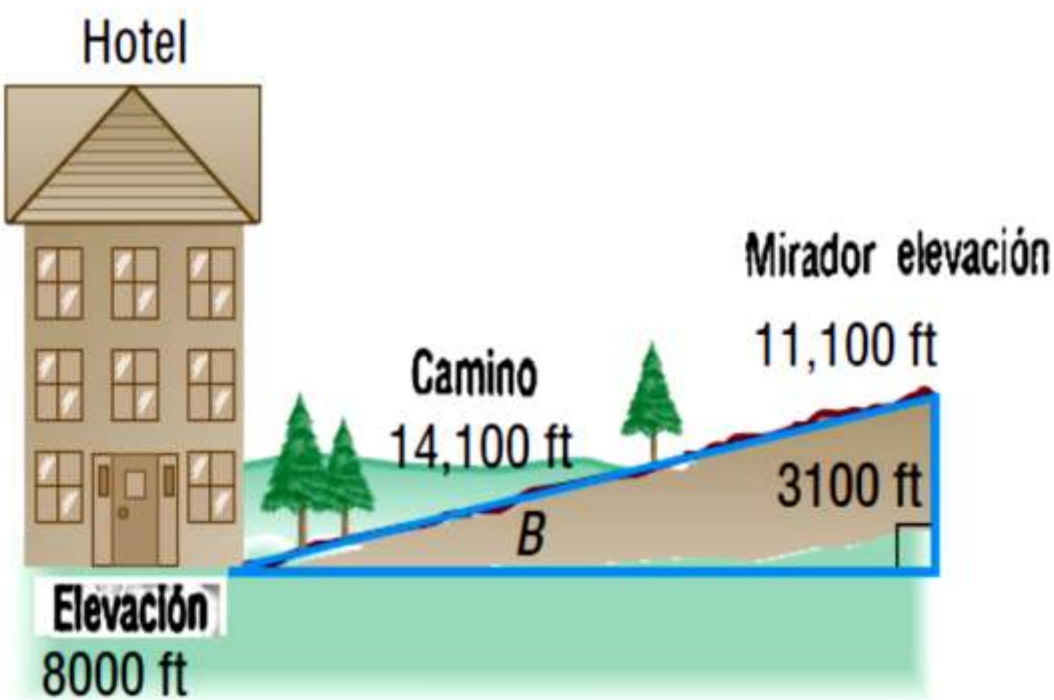
$$\tan 20° = \frac{b}{200}$$

$$b = 200 \tan 20° \approx 72.79 \text{ metros}$$

Por tanto, el ancho del río es aproximadamente de 73 metros, redondeado a la unidad más cercana.

Cálculo de la inclinación de un camino montañoso

Un camino recto con inclinación uniforme lleva desde un hotel a 8000 pies hasta un mirador situado a una altura de 11,100 pies. La longitud del camino es de 14,100 pies. ¿Cuál es la inclinación (pendiente) del camino?



La figura 62 ilustra la situación. Buscamos el ángulo β. Como se muestra en la ilustración,

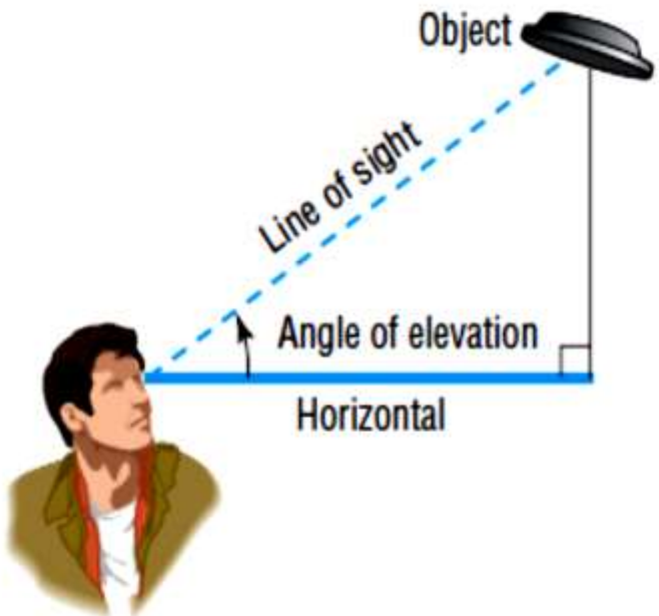
$$\text{sen } \beta = \frac{3100}{14{,}100}$$

Utilizando una calculadora,

$$\beta \approx 12.7^\circ$$

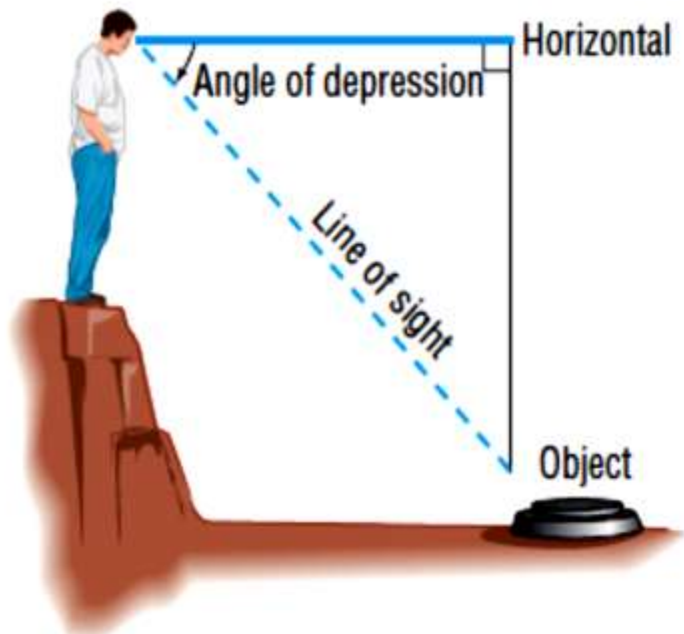
La inclinación (pendiente) del camino es aproximadamente de 12.7°.

ángulo de elevación.



(a)

ángulo de depresión.

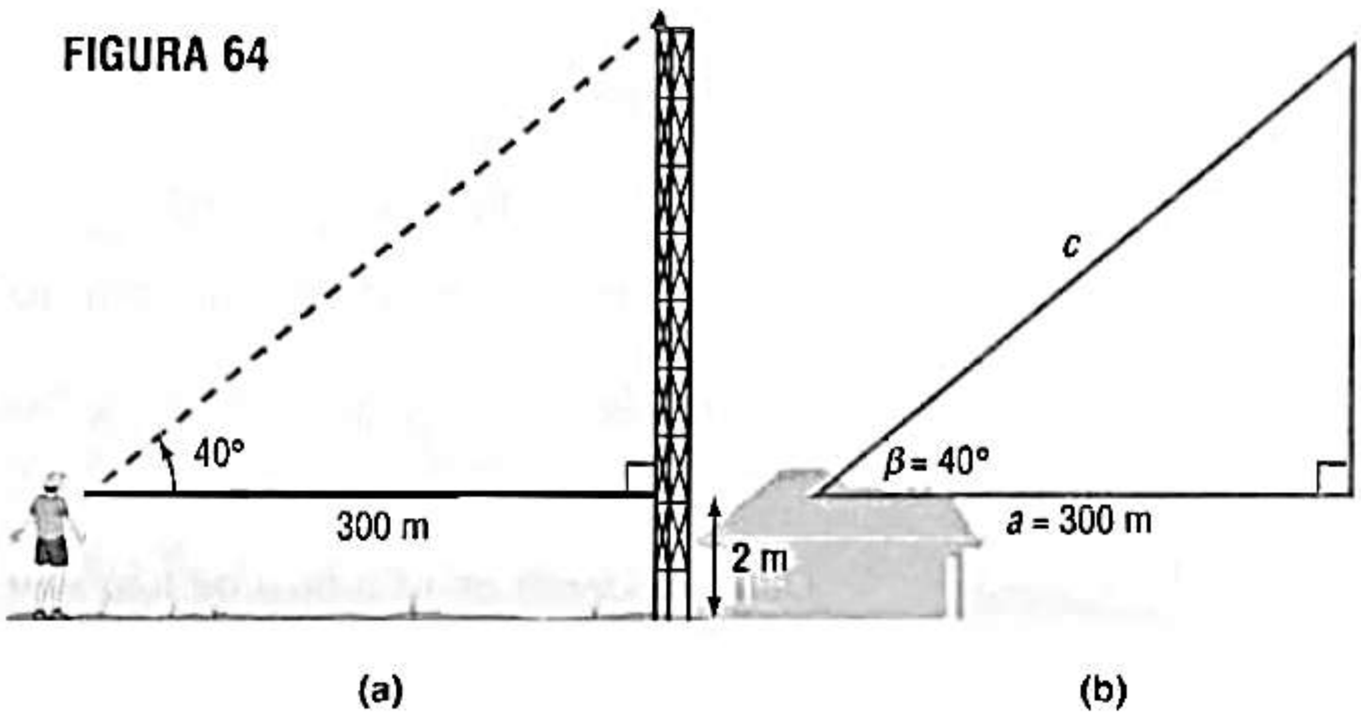


(b)

Determinación de alturas utilizando el ángulo de elevación

Para determinar la altura de una torre de transmisión de radio, un agrimensor camina alejándose 300 metros de la base de la torre. *Véase* la figura 64(a). Luego el ángulo de elevación se mide y se encuentra que es de 40°. Si el tránsito está a 2 metros del piso cuando la observación se realiza, ¿cuál es la altura de la torre?

FIGURA 64



Solución

La figura 64(b) muestra un triángulo que reproduce la ilustración de la figura 64(a). Para encontrar la longitud b, usamos el hecho de que $\tan \beta = b/a$. Entonces

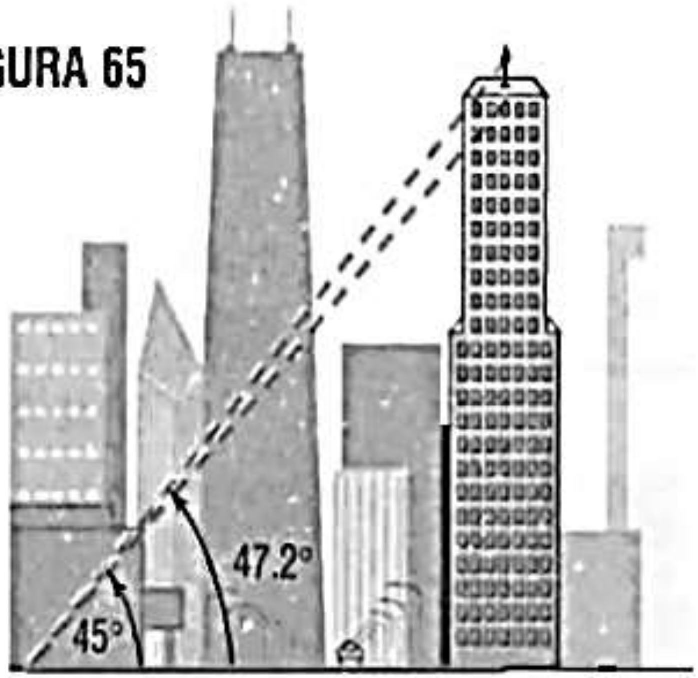
$$b = a \tan \beta = 300 \tan 40^\circ = 251.73 \text{ metros}$$

Ya que el tránsito está a dos metros de altura, la altura real de la torre es aproximadamente de 254 metros, redondeada al metro más cercano. ■

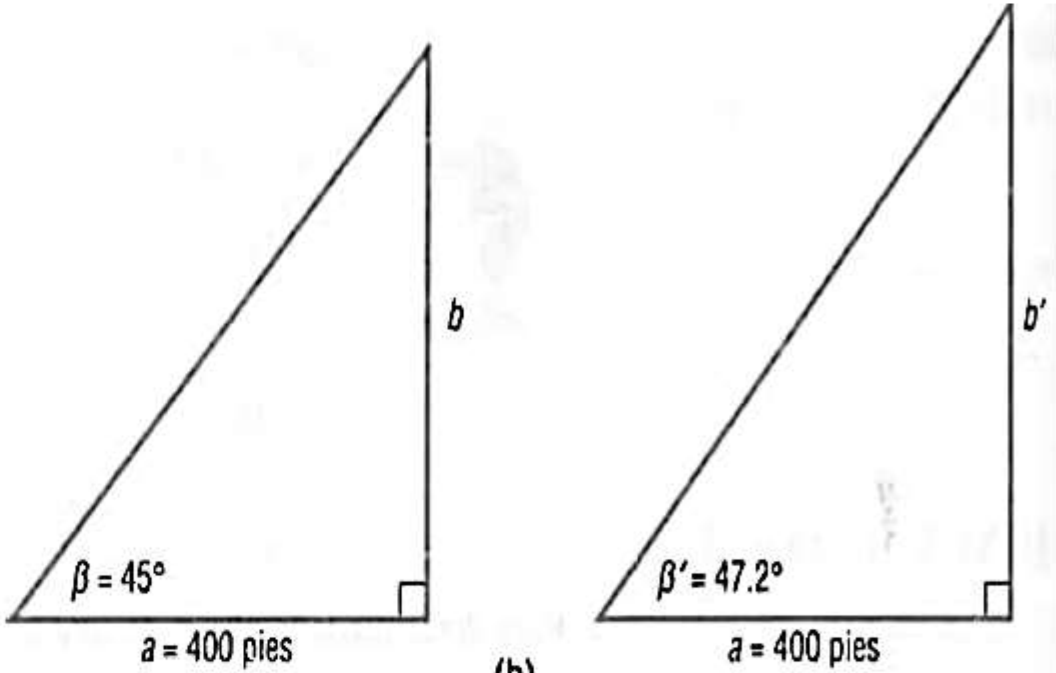
Determinación de la altura de una estatua sobre un edificio

Como adorno de la parte superior del edificio *Board of Trade* en Chicago está una estatua de Ceres, la diosa griega del trigo. Desde el nivel de la calle se hicieron dos observaciones a una distancia de 400 pies del centro del edificio. El ángulo de elevación a la base de la estatua fue de 45.0°; el ángulo de elevación a la parte superior de la estatua fue de 47.2°. *Véase* la figura 65(a). ¿Cuál es la altura de la estatua?

FIGURA 65



(a)



(b)

Solución

La figura 65(b) muestra dos triángulos que reproducen la figura 65(a). La altura de la estatua de Ceres será $b' - b$. Para encontrar b y b', con respecto a la figura 65(b)

$$\tan 45° = \frac{b}{400} \qquad \tan 47.2° = \frac{b'}{400}$$

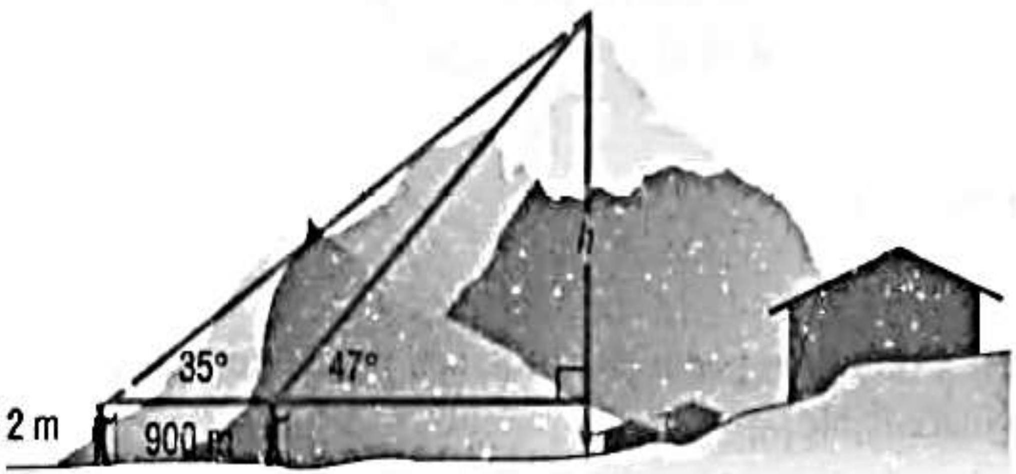
$$b = 400 \tan 45° = 400 \qquad b' = 400 \tan 47.2° = 431.96$$

La altura de la estatua es aproximadamente de 32 pies. ■

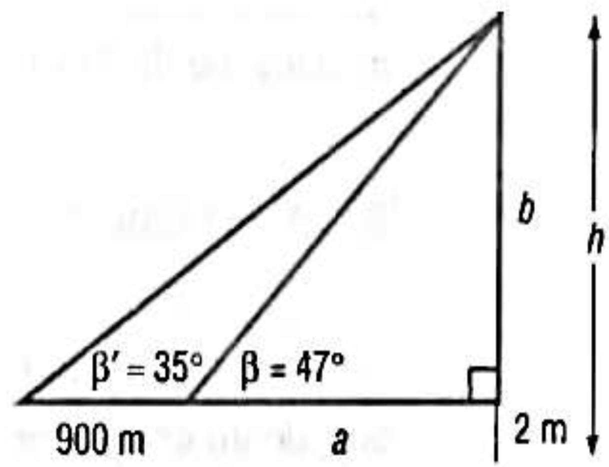
Determinación de la altura de una montaña

Para medir la altura de una montaña, un topógrafo toma dos observaciones de la cima desde dos puntos separados una distancia de 900 metros en línea recta hacia la montaña.* *Véase* la figura 66(a). La primera observación tiene como resultado un ángulo de elevación de 47°, la segunda tiene un ángulo de elevación de 35°. Si el tránsito está a dos metros del piso, ¿cuál es la altura de la montaña?

FIGURA 66



(a)



(b)

Solución

La figura 66(b) muestra dos triángulos que reproducen la ilustración de la figura 66(a). De los dos triángulos rectángulos mostrados, encontramos

$$\tan \beta' = \frac{b}{a + 900} \qquad \tan \beta = \frac{b}{a}$$

$$\tan 35° = \frac{b}{a + 900} \qquad \tan 47° = \frac{b}{a}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones con dos variables, a y b. Ya que buscamos b, decidimos resolver la ecuación del lado derecho para a y sustituir el resultado, $a = b/\tan 47° = b \cot 47°$, en la ecuación del lado izquierdo. El resultado es

$$\tan 35° = \frac{b}{b \cot 47° + 900}$$

$$b = (b \cot 47° + 900) \tan 35°$$

$$b = b \cot 47° \tan 35° + 900 \tan 35°$$

$$b(1 - \cot 47° \tan 35°) = 900 \tan 35°$$

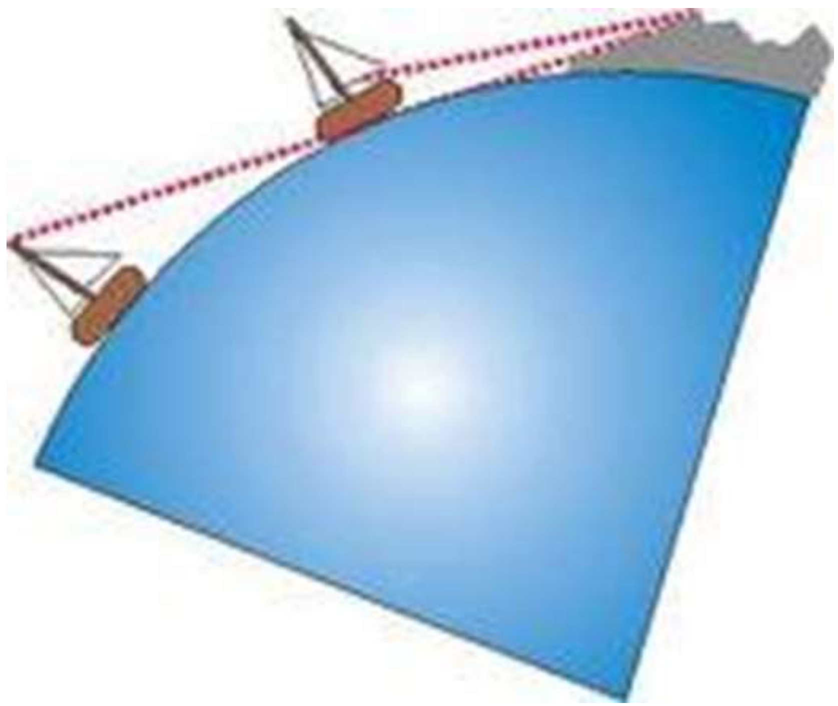
$$b = \frac{900 \tan 35°}{1 - \cot 47° \tan 35°} = \frac{900 \tan 35°}{1 - \dfrac{\tan 35°}{\tan 47°}} = 1816$$

Por lo tanto, la altura de la cima desde el nivel del suelo es aproximadamente de $1816 + 2 = 1818$ metros. ■

Eratóstenes:
el tamaño de la Tierra

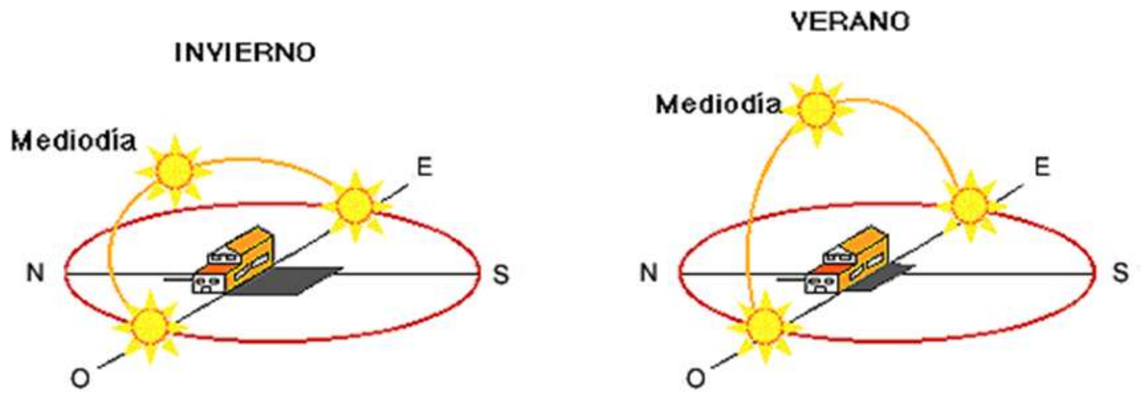
En la época de Eratóstenes, algunos sabios sospechaban que la Tierra tenía una forma esférica.

A esta conclusión llegaban, según se dice, al observar los barcos en el océano: al acercarse el barco a tierra, se veía en primer lugar sólo el mástil y, más tarde, el casco del barco. Si la Tierra fuese plana, este hecho no se produciría y se vería el barco en su totalidad en cada momento.

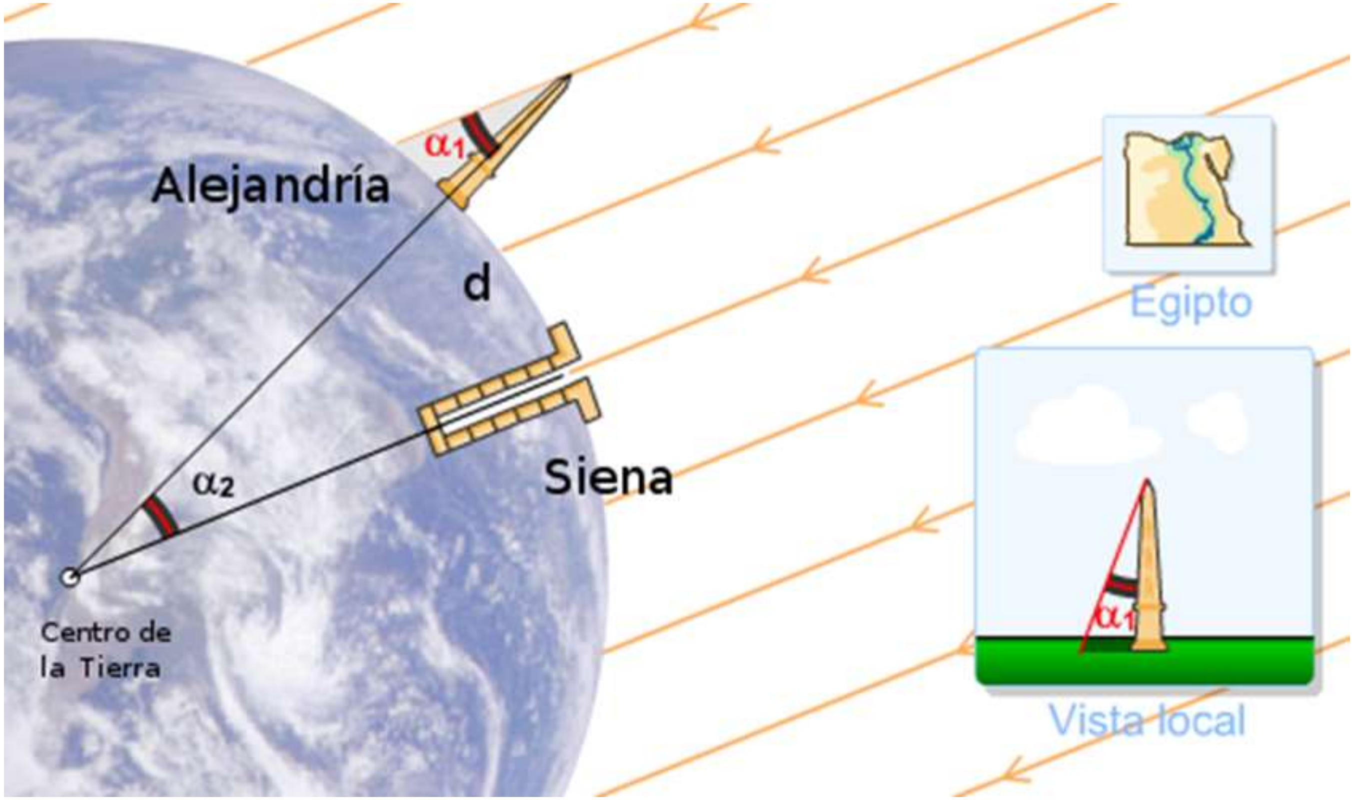


20 – 21 de Junio : solsticio de verano (Hemisferio norte)

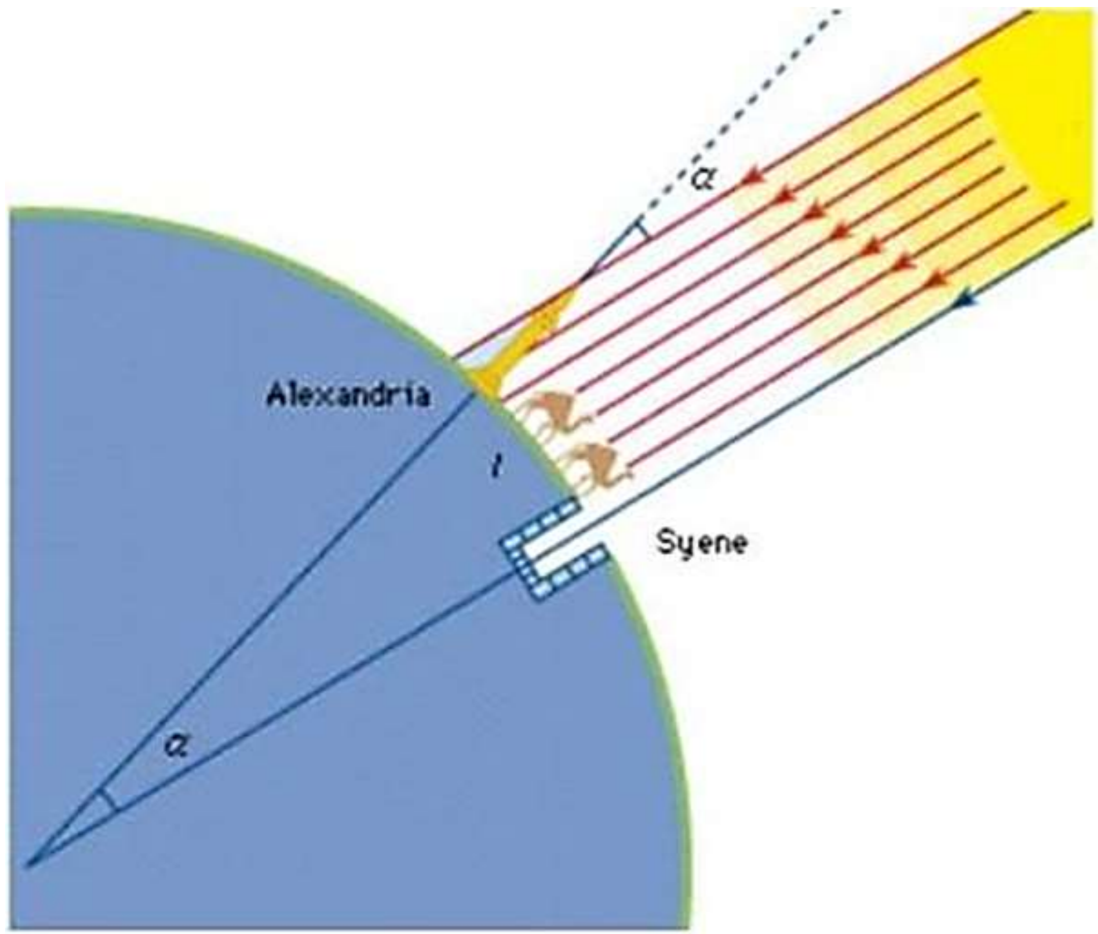
En el hemisferio norte, el solsticio de verano es el día en el que el tiempo que transcurre entre la salida y la puesta de Sol es más largo.
Además, el Sol alcanza su posición más alta en el cielo.



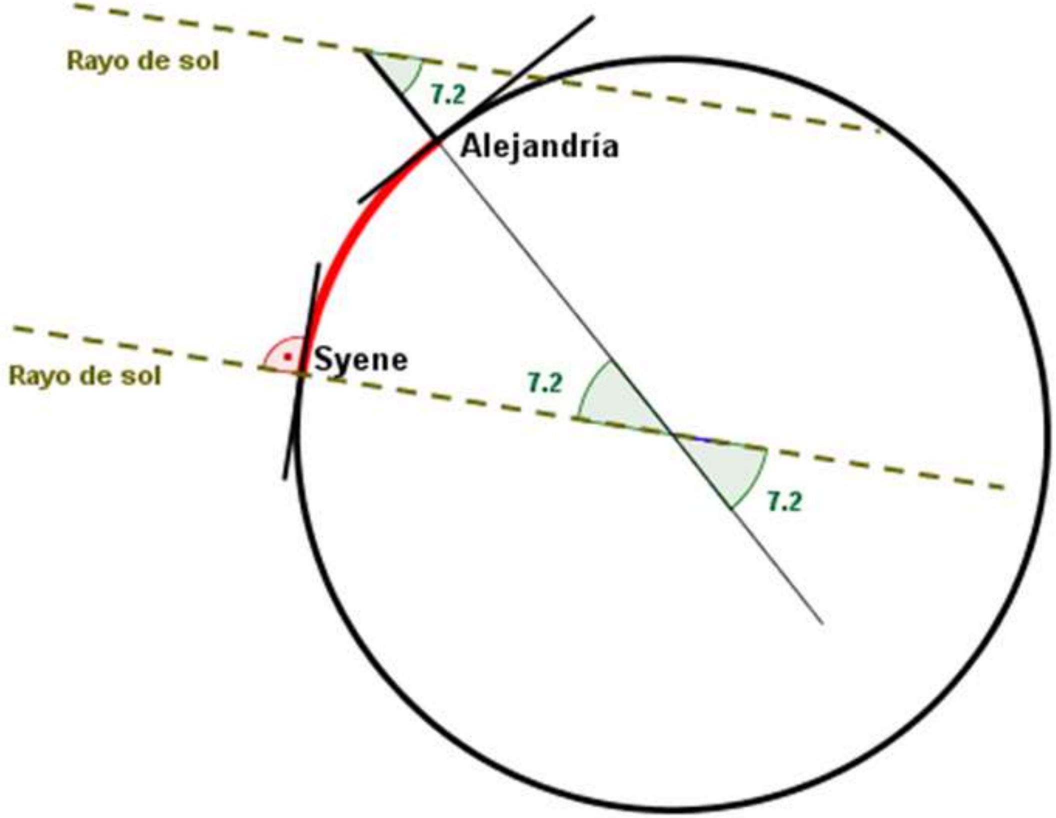
Eratóstenes sabía que en el solsticio de verano, al mediodía, el sol se reflejaba en el fondo de un pozo de Siene (actual Asuán), o sea, que los rayos solares incidían verticalmente con un ángulo de casi 90º.



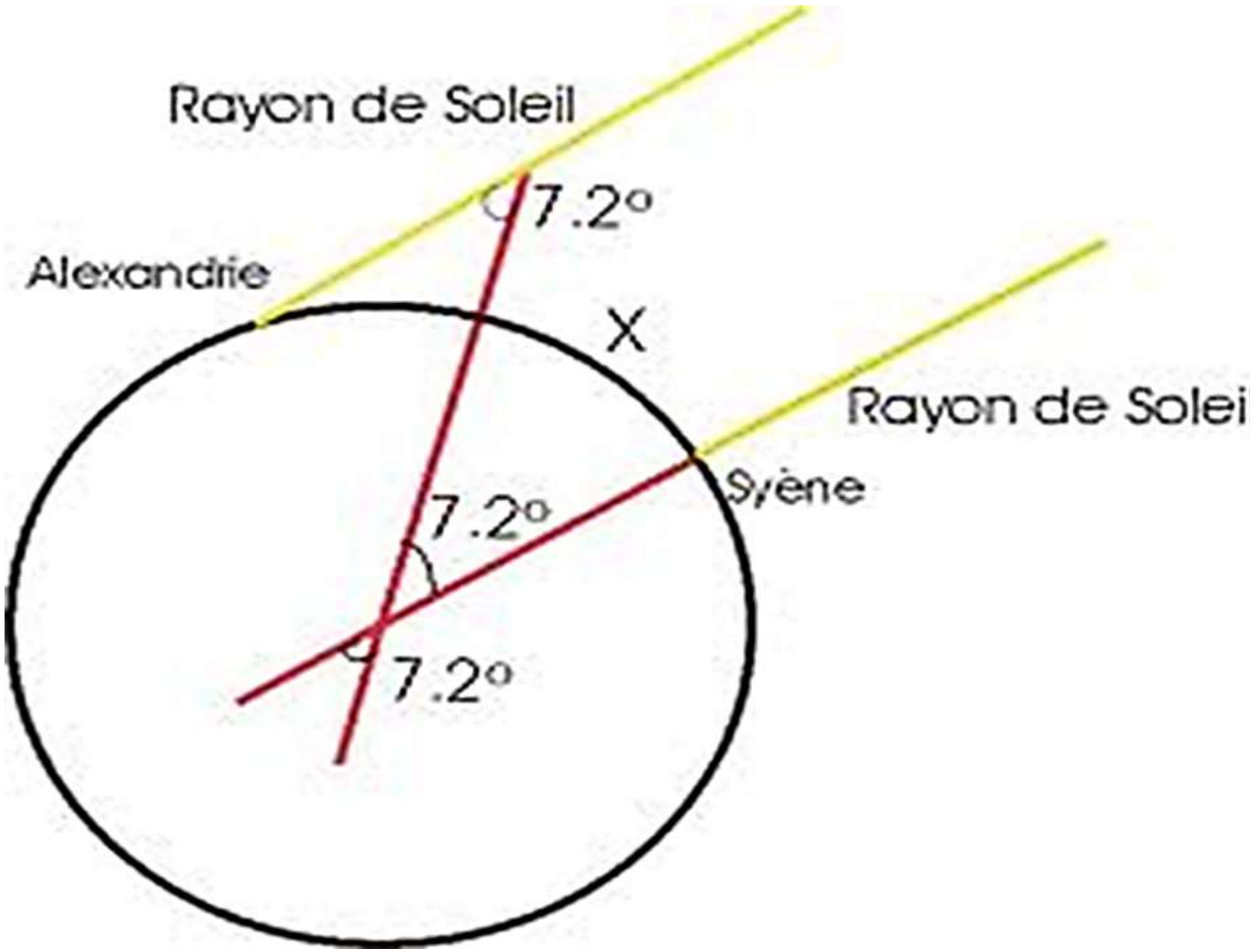
También midió, el mismo día y a la misma hora, el ángulo que formaba con la vertical la sombra de una columna muy alta situada en Alejandría. Este ángulo era la cincuentava parte de un círculo completo, es decir, unos 7,2.º



Es decir, el mediodía del 22 de Junio, el ángulo de inclinación de los rayos de Sol en Alejandría era ángulo de 7.2°.



Midió también la distancia entre Syene y Alejandría, que estimó en 792.288 km. Según se dice, para calcular la distancia usó el tiempo en que las caravanas de camellos realizaban el recorrido desde Alejandría a Syene.



En resumen, supuso que Siena y Alejandría tenían la misma longitud, y encargó la medición de la distancia entre Siena y Alejandría, unos 5000 estadios.
Si el ángulo medido era la cincuentava parte de un círculo completo, la longitud de la circunferencia de la Tierra tenía que medir unos 250000 estadios.

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{360^{\circ}}{50} & \rightarrow & 5000 \text{ estadios} \\ 360^{\circ} & \rightarrow & x \text{ estadios} \end{array}\right\} \Rightarrow x = 250000 \text{ estadios}$$

Puesto que Alejandría y Syene están, aproximadamente, en el mismo meridiano terrestre, cuando el Sol pasa por el meridiano (instante que coincide con el mediodía solar), Alejandría, Syene, el Sol y el centro de la Tierra, están en el mismo plano. Conociendo el ángulo de inclinación de los rayos de Sol y la distancia Alejandría-Syene, dedujo que:

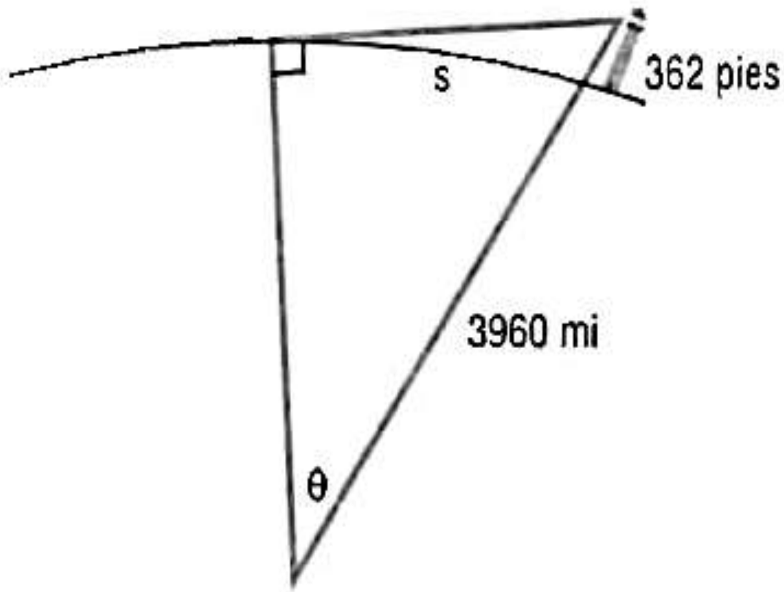
$$\frac{792.288\ \text{km}}{7.2^\circ} = \frac{\text{circunf.terrestre}}{360^\circ} \Rightarrow \text{circunf.terrestre} = \frac{792.288\ \text{km} \cdot 360^\circ}{7.2^\circ} = 39614.4\ \text{km}$$

Obtuvo un valor de 39614,4 km, cometiendo un error aproximado del 0.2 %, con respecto al valor real.

Faro de la colina Gibb, Southampton, Bermudas

En operación desde 1846, este faro se levanta 117 pies sobre una colina de 245 pies de altura, de modo que el rayo de luz está a 362 pies sobre el nivel del mar. Un folleto afirma que la luz puede verse en el horizonte a cerca de 26 millas de distancia. Verifique la precisión de este enunciado.

FIGURA 69



Solución

La figura 69 ilustra la situación. El ángulo central θ satisface la ecuación

$$\cos\theta = \frac{3960}{3960 + \frac{362}{5280}} = 0.999982687$$

de modo que

$$\theta = 0.00588 \text{ radián} = 0.33715° = 20.23'$$

El folleto no indica si la distancia se mide en millas náuticas o en millas terrestres. La distancia s en millas náuticas es 20.23, la medida de θ en minutos. (*Véase* el problema 83, sección 5.1.) La distancia s en millas terrestres es

$$s = r\theta = 3960(0.00588) = 23.3 \text{ millas}$$

En cualquier caso, parece que el folleto exageró un poco la distancia. ■