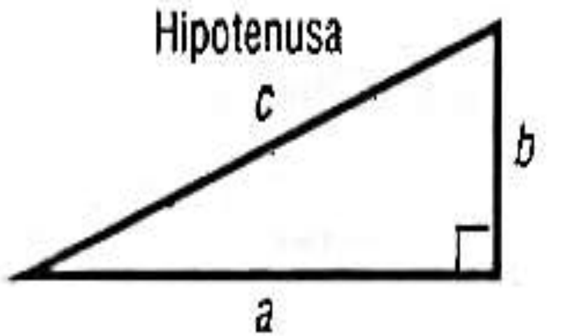
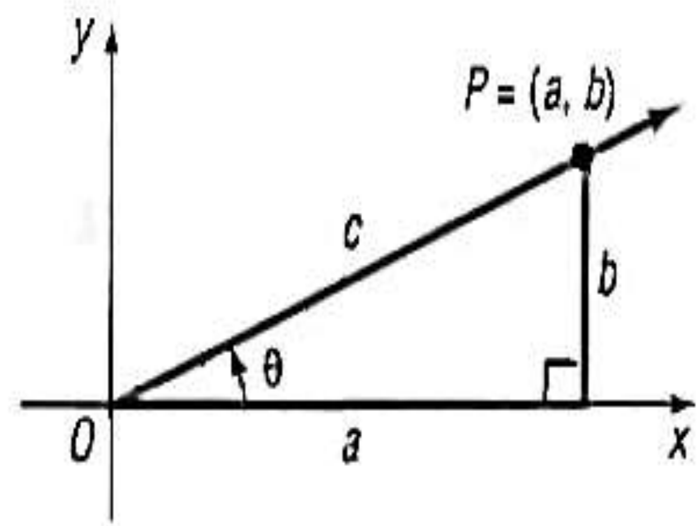
Trigonometría del triángulo rectángulo

$$a^2 + b^2 = c^2$$



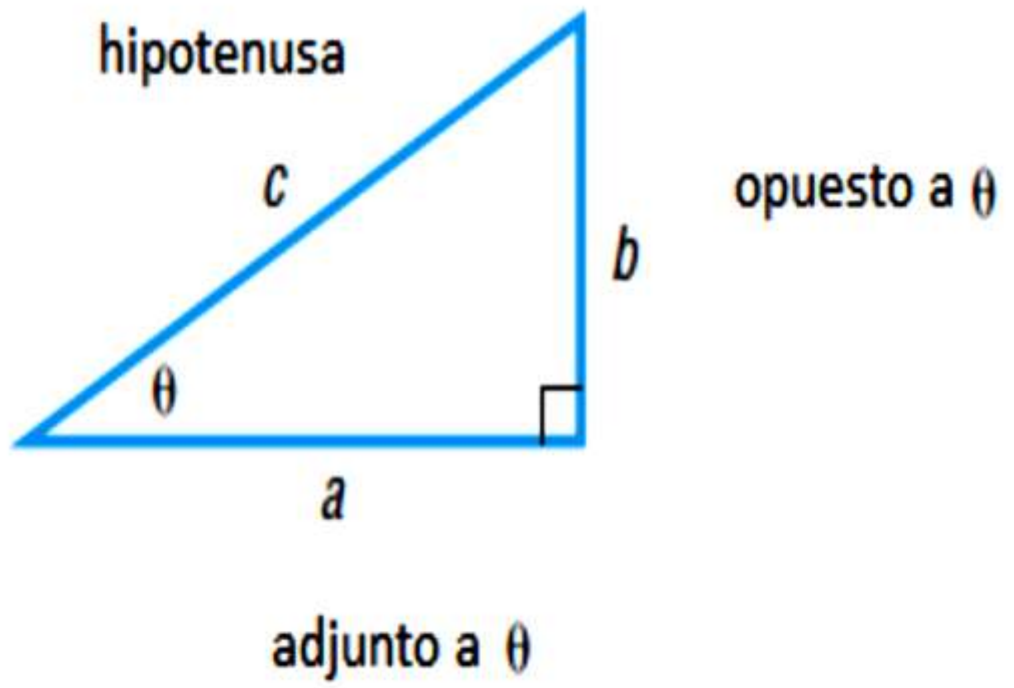
(a)



(b)

suponga que θ es un **ángulo agudo**

$0° < \theta < 90°$ $\quad$ $0 < \theta < \pi/2$

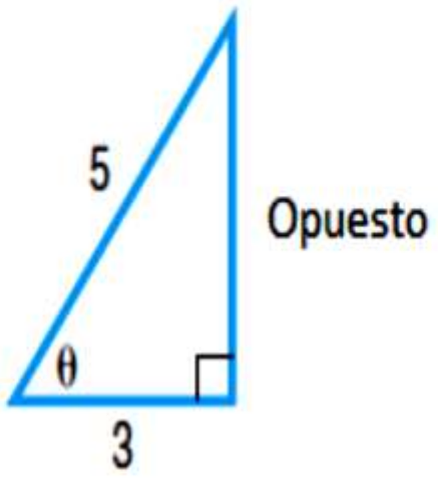

hipotenusa
c
opuesto a θ
b
θ
a
adjunto a θ

$$\sin\theta = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{c} \qquad \cos\theta = \frac{\text{Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a}{c} \qquad \tan\theta = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Adyacente}} = \frac{b}{a}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Opuesto}} = \frac{c}{b} \qquad \sec\theta = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Adyacente}} = \frac{c}{a} \qquad \cot\theta = \frac{\text{Adyacente}}{\text{Opuesto}} = \frac{a}{b} \tag{1}$$

Función	Abreviación	valor	Función	Abreviación	valor
seno de θ	$\sin\theta$	$\frac{b}{c}$	cosecante θ	$\csc\theta$	$\frac{c}{b}$
coseno de θ	$\cos\theta$	$\frac{a}{c}$	secante θ	$\sec\theta$	$\frac{c}{a}$
tangente de θ	$\tan\theta$	$\frac{b}{a}$	cotangente θ	$\cot\theta$	$\frac{a}{b}$

Determinar las funciones trigonométricas en el siguiente triángulo



Identidades reciprocas

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \tag{2}$$

Identidades cuocientes

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \tag{3}$$

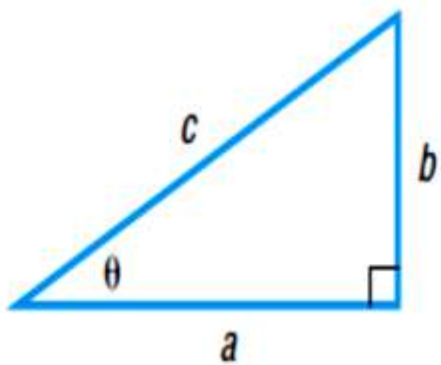
Dadas las siguientes funcionestrigonométricas

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5} \qquad \cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

encuentre las cuatro restantes

Demostrar que:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \textbf{(5)}$$



$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad \textbf{(6)}$$

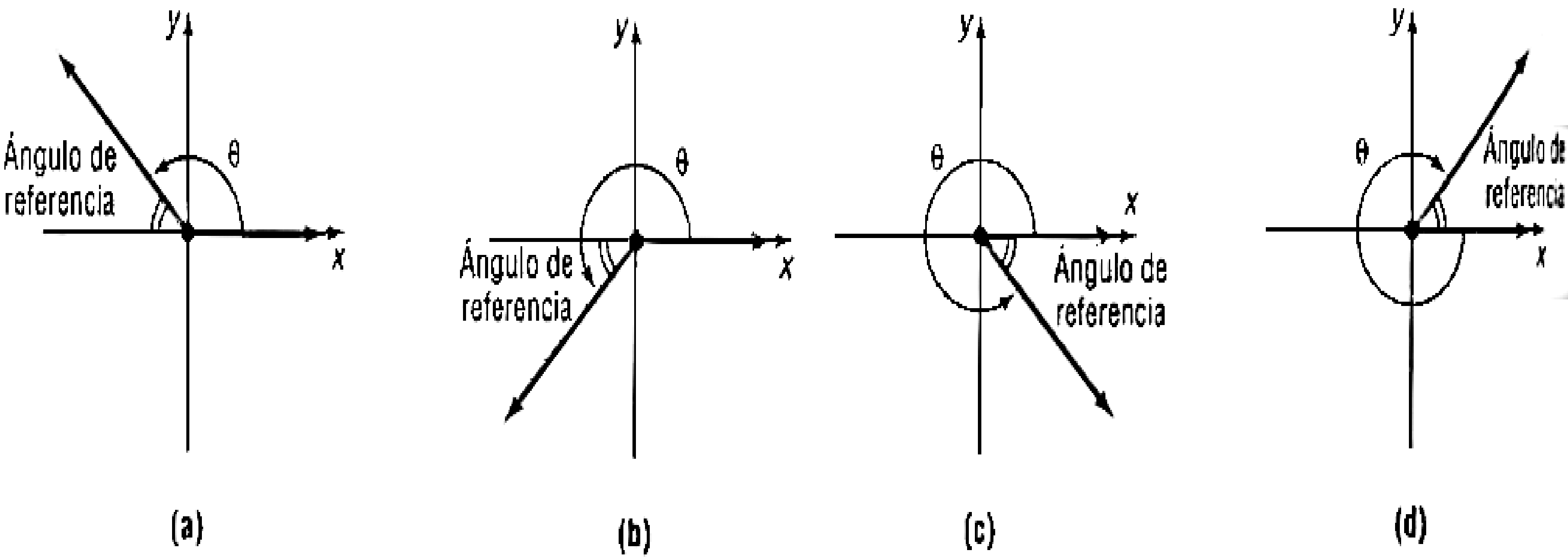
$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta \qquad \textbf{(7)}$$

Dado la siguiente función trigonométrica $\sin\theta = \frac{1}{3}$, con θ un ángulo agudo

encuentre las restantes

Ángulo de referencia

Sea θ un ángulo no agudo que esté en un cuadrante. El ángulo agudo formado por el lado final de θ y la parte positiva o la negativa del eje x, es llamado **ángulo de referencia** para θ.

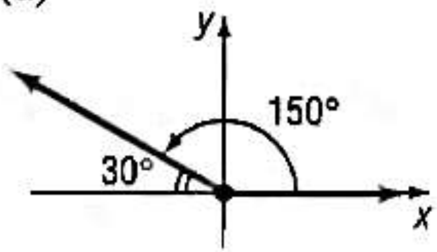


Determinación de ángulos de referencia

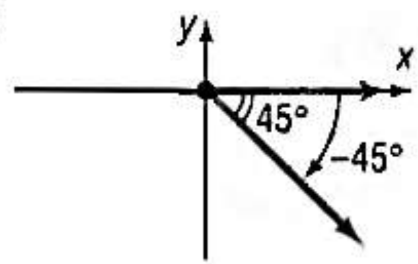
Encontrar el ángulo de referencia para cada uno de los ángulos siguientes:

(a) $150°$ (b) $-45°$ (c) $9\pi/4$ (d) $-5\pi/6$

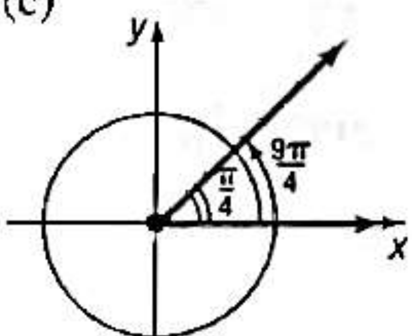
(a)



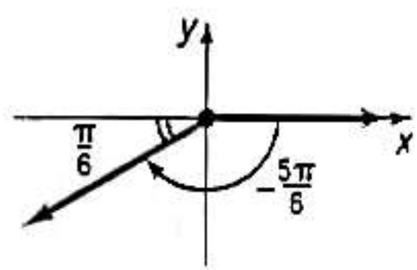
(b)



(c)



(d)



Teorema
ángulos de referencia

Si θ es un ángulo que está en un cuadrante y α es su ángulo de referencia, entonces

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sen}\theta = \pm \operatorname{sen}\alpha & \cos\theta = \pm\cos\alpha & \tan\theta = \pm\tan\alpha \\ \csc\theta = \pm\csc\alpha & \sec\theta = \pm\sec\alpha & \cot\theta = \pm\cot\alpha \end{array} \tag{3}$$

donde el signo + o − depende del cuadrante en el cual esté θ. ∎

Uso de ángulos de referencia para encontrar el valor de funciones trigonométricas

Encontrar el valor exacto de cada una de las siguientes funciones trigonométricas usando ángulos de referencia:

(a) $\operatorname{sen} 135°$ (b) $\cos 240°$ (c) $\cos \dfrac{5\pi}{6}$ (d) $\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

(a) *Véase* la figura 51. El ángulo de 135° está en el segundo cuadrante, donde la función seno es positiva. El ángulo de referencia para 135° es 45°. Por tanto,

$$\operatorname{sen} 135° = \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

FIGURA 51

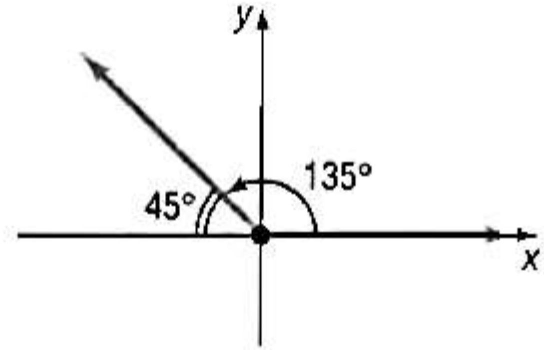
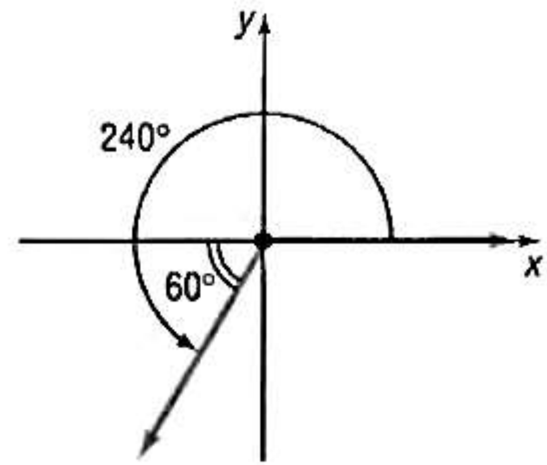


FIGURA 52



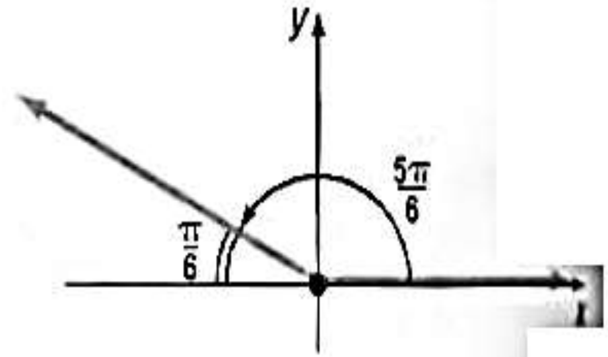
(b) *Véase* la figura 52. El ángulo de 240° está en el tercer cuadrante, donde la función coseno es negativa. El ángulo de referencia para 240° es 60°. Por tanto,

$$\cos 240° = -\cos 60° = -\tfrac{1}{2}$$

(c) *Véase* la figura 53. El ángulo de $5\pi/6$ está en el segundo cuadrante, donde la función coseno es negativa. El ángulo de referencia para $5\pi/6$ es $\pi/6$. Por tanto,

$$\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

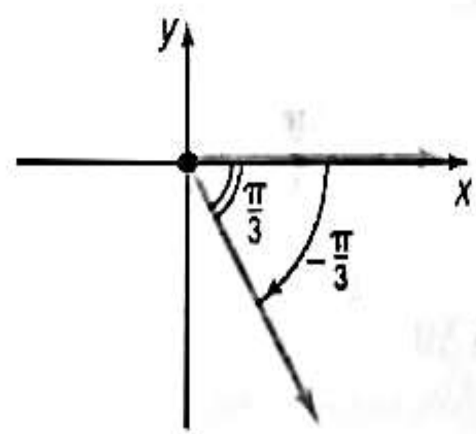
FIGURA 53



(d) *Véase* la figura 54. El ángulo de $-\pi/3$ está en el cuarto cuadrante, donde la función tangente es negativa. El ángulo de referencia para $-\pi/3$ es $\pi/3$. Por tanto,

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

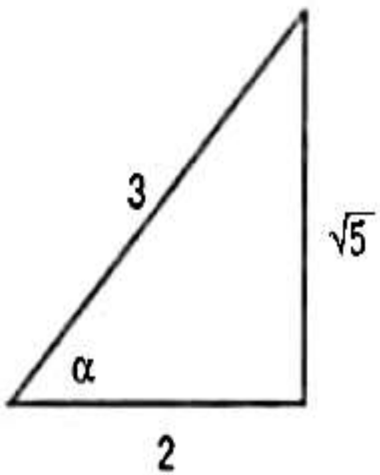
FIGURA 54



Uso de triángulos rectángulos para encontrar valores cuando un valor es conocido

Dado que $\cos\theta = -\frac{2}{3}$, $\pi/2 < \theta < \pi$, encontrar el valor exacto de cada una de las otras funciones trigonométricas.

FIGURA 55



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \cos\alpha = \frac{2}{3} \qquad \tan\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\csc\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \qquad \sec\alpha = \frac{3}{2} \qquad \cot\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

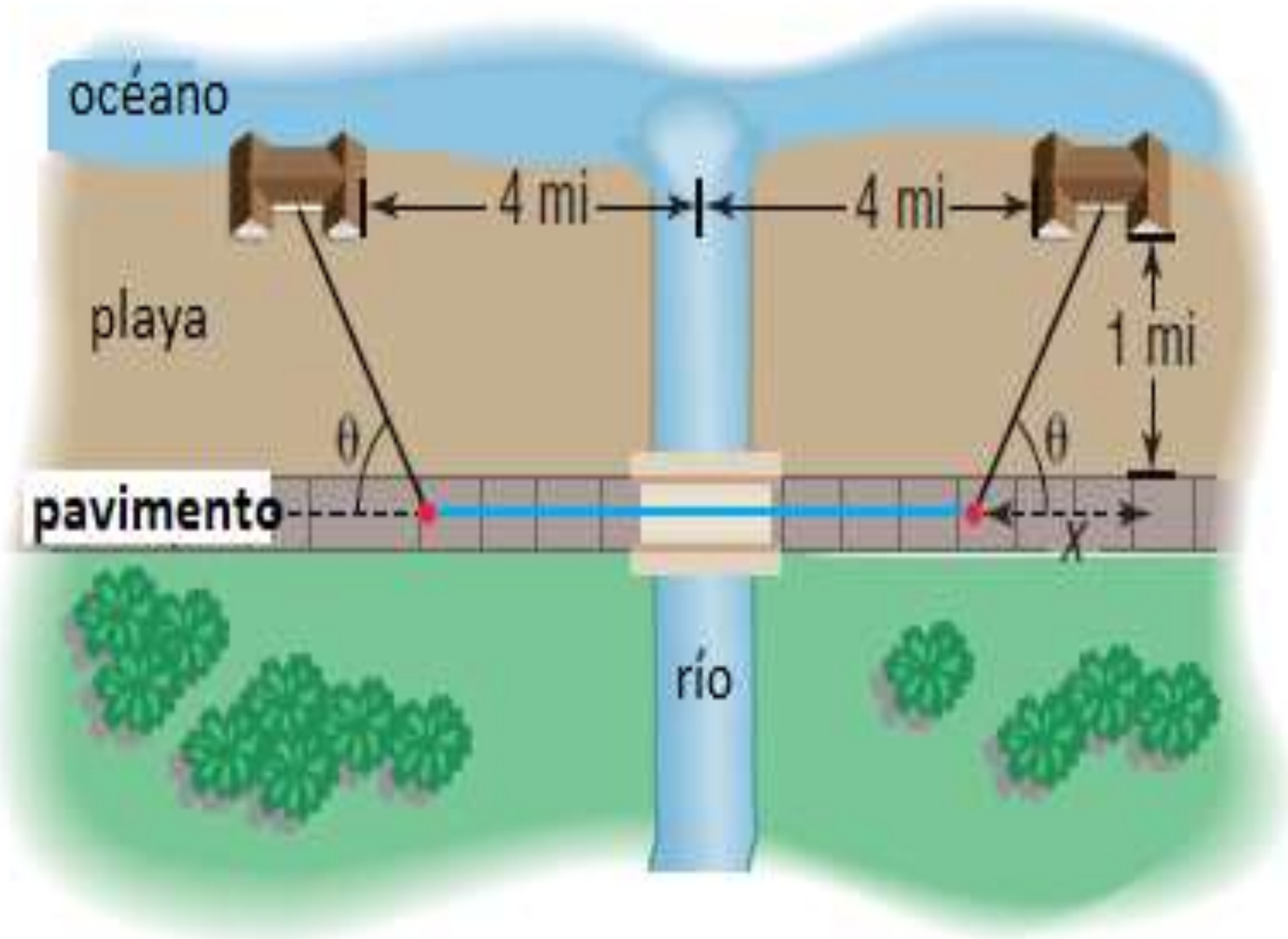
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \cos\theta = -\frac{2}{3} \qquad \tan\theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\csc\theta = \frac{3\sqrt{5}}{5} \qquad \sec\theta = -\frac{3}{2} \qquad \cot\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

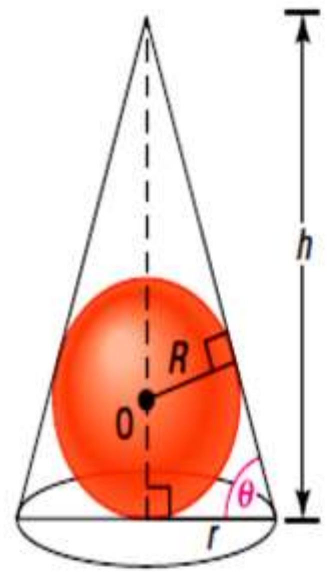
Cálculo del tiempo de un viaje. Dos casas en la playa están separadas 8 millas en línea recta y cada una queda a una milla de una carretera pavimentada paralela al océano. Sally puede caminar a 8 millas por hora en la carretera pero sólo a 3 millas por hora en la arena de la playa. A causa de un río que está entre las dos casas, para ir de una a la otra es necesario caminar por la arena hacia la carretera, seguir por la carretera y luego caminar de nuevo en la arena. *Véase* la ilustración. El tiempo T desde una casa a la otra como una función del ángulo θ mostrado en la ilustración es

$$T(\theta) = 1 + \frac{2}{3 \operatorname{sen} \theta} - \frac{1}{4 \tan \theta}, \; 0° < \theta < 90°$$

(a) Cálcule el tiempo T para $\theta = 30°$. ¿Cuanto tiempo camina Sally por la carretera?
(b) Cálcule el tiempo T para $\theta = 45°$. ¿Cuanto tiempo camina Sally por la carretera?
(c) Cálcule el tiempo T para $\theta = 60°$. ¿Cuanto tiempo camina Sally por la carretera?
(d) Cálcule el tiempo T para $\theta = 90°$. Describa la trayectoria tomada. ¿Por qué no puede utilizarse la fórmula T?


océano
4 mi
4 mi
playa
1 mi
θ
θ
pavimento
x
río

Diseño de piezas decorativas. Un diseñador de arte decorativo planea comercializar esferas de oro sólido encerradas en conos de cristal claro. Cada esfera es de radio fijo R y será encerrada en un cono de altura h y radio r. *Véase* la ilustración. Muchos conos pueden ser utilizados para encerrar la esfera, cada uno con diferente ángulo de inclinación θ. El volumen V del cono puede ser expresado como una función del ángulo de inclinación del cono:



$$V(\theta) = \frac{1}{3}\pi R^3 \frac{(1+\sec\theta)^3}{\tan^2\theta}, 0^\circ < \theta < 90^\circ$$

¿Qué volumen V es necesario para encerrar una esfera con radio de 2 centímetros en un cono cuyo ángulo de inclinación θ es 30°? 45°? 60°?