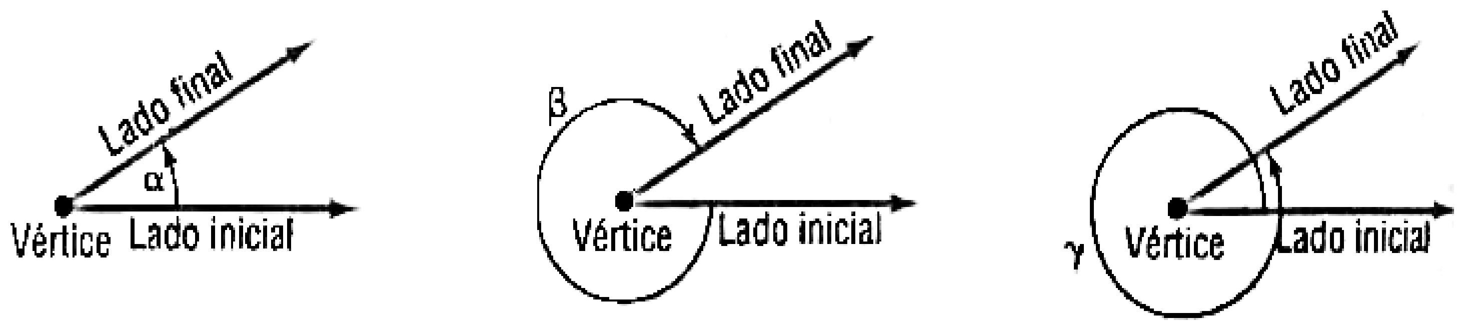
Ángulos y sus medidas

Un **rayo,** o **semirrecta,** es la parte de una recta que inicia en un punto V de la recta y se extiende indefinidamente en una dirección. El punto inicial V de un rayo es denominado **vértice.** *Véase* la figura 1.

FIGURA 1



Rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj

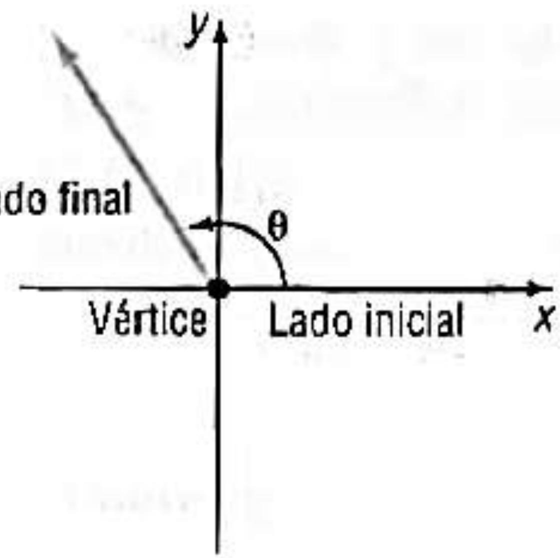
(a) Ángulo positivo

Rotación en el sentido de las manecillas del reloj

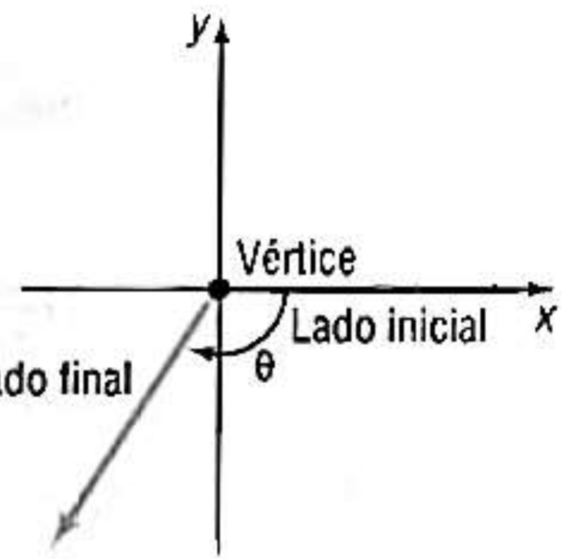
(b) Ángulo negativo

Rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj

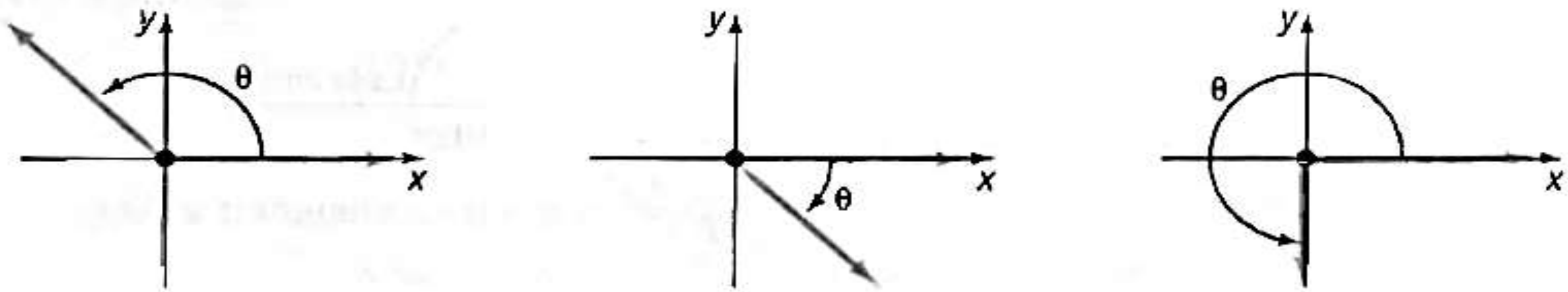
(c) Ángulo positivo



(a) θ en posición estándar;
θ positivo



(b) θ en posición estándar;
θ negativo

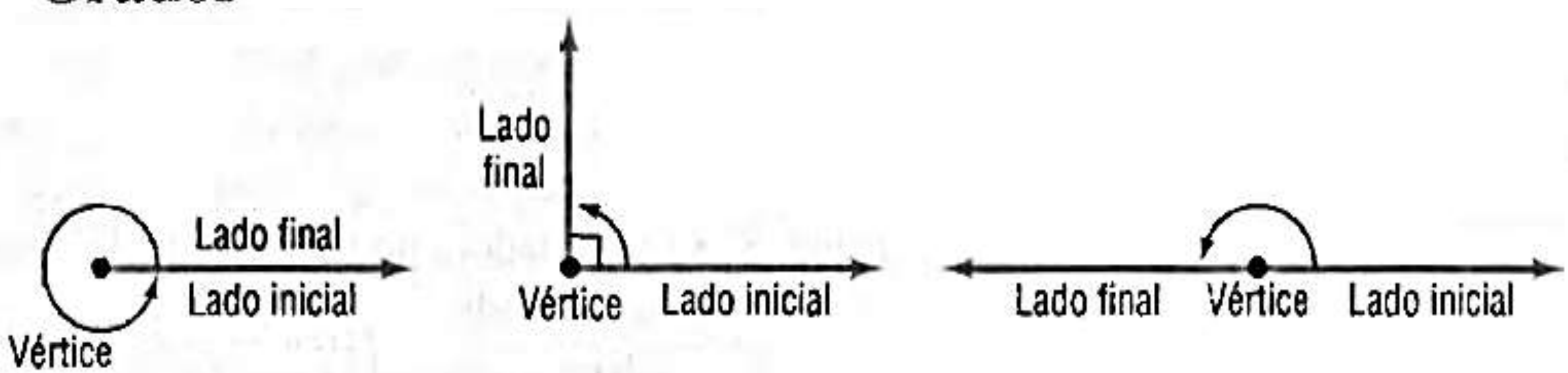


(a) θ está en el segundo cuadrante

(b) θ está en el cuarto cuadrante

(c) θ es un ángulo cuadrantal

Grados



(a) Una vuelta en sentido contrario al de las manecillas del reloj, 360°

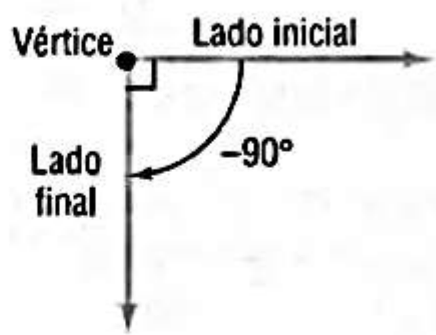
(b) $\frac{1}{4}$ de vuelta en sentido contrario al de las manecillas del reloj, 90°

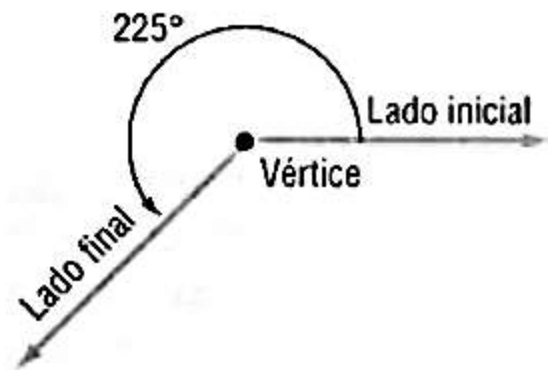
(c) $\frac{1}{2}$ vuelta en sentido contrario al de las manecillas del reloj, 180°

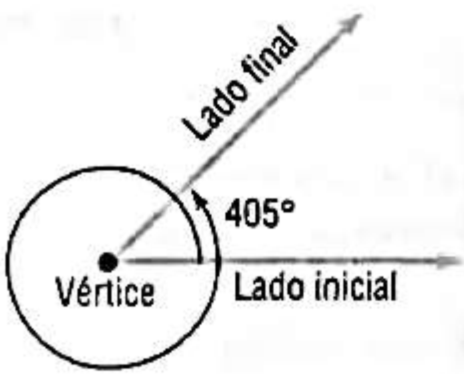
Trazado de un ángulo

Trazar cada ángulo:

(a) 45° (b) −90° (c) 225° (d) 405°







Aunque se pueden obtener subdivisiones de un grado utilizando decimales, también podemos usar la noción de *minutos* y *segundos*. **Un minuto,** denotado por $1'$, se define como $\frac{1}{60}$ de grado. **Un segundo,** denotado por $1''$, se define como $\frac{1}{60}$ de minuto o, de manera equivalente, $\frac{1}{3600}$ de grado. Un ángulo de, digamos, 30 grados, 40 minutos, 10 segundos se escribe de manera concisa como $30° \; 40' \; 10''$. Para resumir:

$$\begin{gathered} 1 \text{ vuelta en sentido contrario al de las manecillas del reloj} = 360° \\ 60' = 1° \qquad 60'' = 1' \end{gathered} \tag{1}$$

Conversión entre la forma grados, minutos, segundos y la forma decimal

(a) Convertir $50°6'21''$ a un número decimal de grados.

(b) Convertir $21.256°$ a la forma D°M′S″ Redondear la respuesta al segundo más cercano.

(a) Ya que $1' = \frac{1}{60}°$ y $1'' = \frac{1}{60}' = (\frac{1}{60} \cdot \frac{1}{60})°$, convertimos como sigue:

$$\begin{aligned} 50°6'21'' &= (50 + 6 \cdot \tfrac{1}{60} + 21 \cdot \tfrac{1}{60} \cdot \tfrac{1}{60})° \\ &\approx (50 + 0.1 + 0.005833)° \\ &= 50.105833° \end{aligned}$$

(b) Empezamos con la parte decimal de $21.256°$, esto es, $0.256°$:

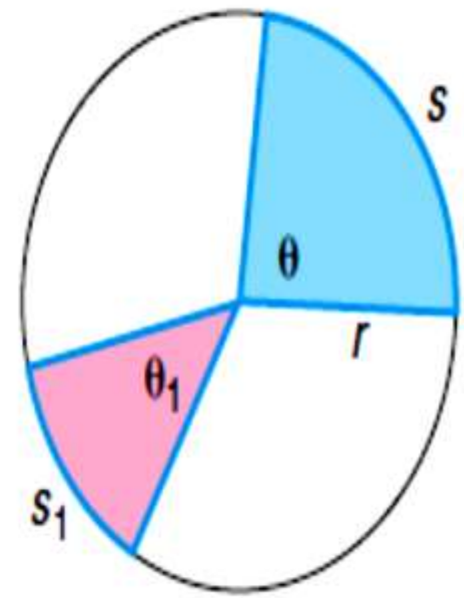
$$0.256° = (0.256)(1°) = (0.256)(60') = 15.36'$$

$$0.36' = (0.36)(1') = (0.36)(60'') = 21.6'' \approx 22''$$

$$\begin{aligned} 21.256° &= 21° + 0.256° = 21° + 15.36' = 21° + 15' + 0.36' \\ &= 21° + 15' + 21.6'' \approx 21°15'22'' \end{aligned}$$

Radianes

$$\frac{\theta}{\theta_1} = \frac{s}{s_1}$$



$$\frac{\theta}{1} = \frac{s}{r} \quad \text{o} \quad \boxed{s = r\theta}$$

Determine la longitud del arco de un círculo

Determinar la longitud del arco de un círculo con radio de 2 metros subtendido por un ángulo central de 0.25 radianes.

Solución

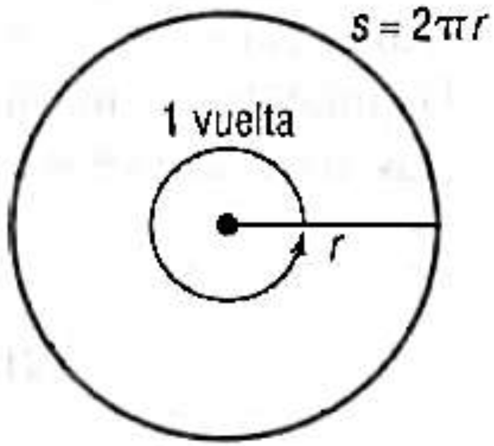
Usamos la ecuación (4) con $r = 2$ metros y $\theta = 0.25$. La longitud s del arco es

$$s = r\theta = 2(0.25) = 0.5 \text{ metros}$$

■

Relación entre grados y radianes

1 vuelta = 2π radianes



$$s = r\theta$$

$$2\pi r = r\theta$$

$$\theta = 2\pi \text{ radianes}$$

1 vuelta = 2π radianes

$360° = 2\pi$ radianes

$180° = \pi$ radianes

$$\boxed{1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radián} \qquad 1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados}}$$

Conversión de grados a radianes

Convertir cada ángulo dado en grados a radianes:

(a) $60°$ (b) $150°$ (c) $-45°$ (d) $90°$

Solución

(a) $60° = 60 \cdot 1 \text{ grado} = 60 \cdot \dfrac{\pi}{180} \text{ radián} = \dfrac{\pi}{3} \text{ radianes}$

(b) $150° = 150 \cdot \dfrac{\pi}{180} \text{ radián} = \dfrac{5\pi}{6} \text{ radianes}$

(c) $-45° = -45 \cdot \dfrac{\pi}{180} \text{ radián} = -\dfrac{\pi}{4} \text{ radián}$

(d) $90° = 90 \cdot \dfrac{\pi}{180} \text{ radián} = \dfrac{\pi}{2} \text{ radianes}$

Conversión de radianes a grados

Convertir cada ángulo dado en radianes a grados.

(a) $\frac{\pi}{6}$ radián (b) $\frac{3\pi}{2}$ radianes (c) $-\frac{3\pi}{4}$ radianes (d) $\frac{7\pi}{3}$ radianes

Solución

(a) $\frac{\pi}{6}$ radián $= \frac{\pi}{6} \cdot 1$ radián $= \frac{\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi}$ grados $= 30°$

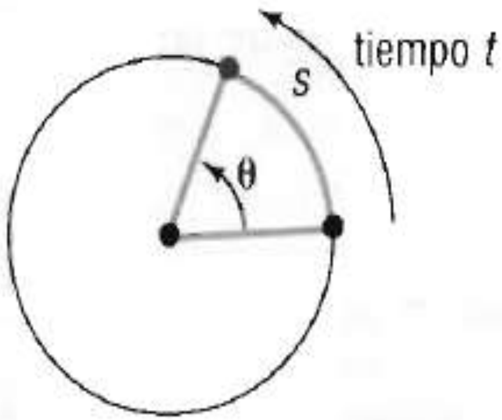
(b) $\frac{3\pi}{2}$ radianes $= \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{180}{\pi}$ grados $= 270°$

(c) $-\frac{3\pi}{4}$ radianes $= -\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi}$ grados $= -135°$

(d) $\frac{7\pi}{3}$ radianes $= \frac{7\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi}$ grados $= 420°$

grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
grados		210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
radianes		$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

Movimiento circular

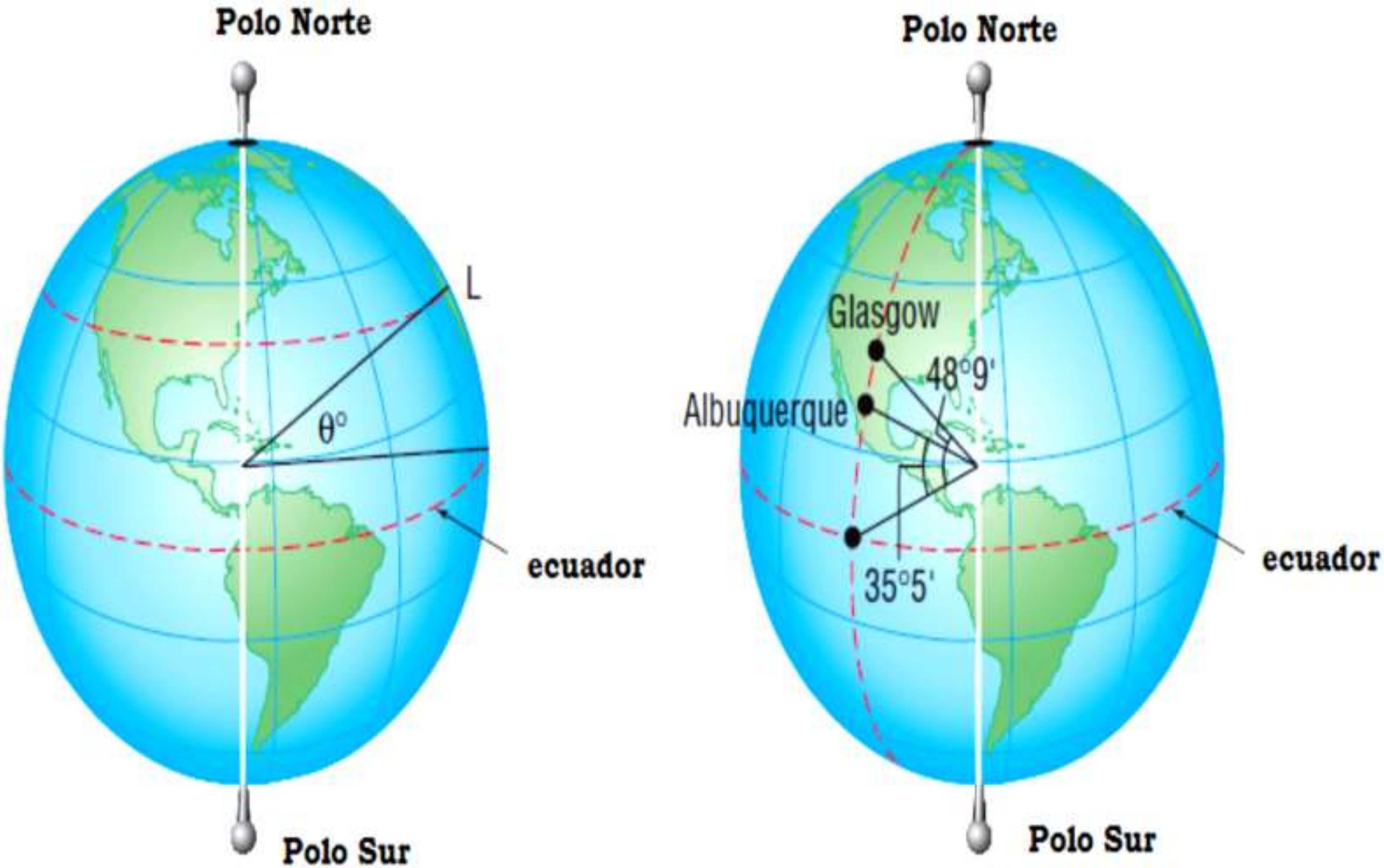


$$\boxed{v = \frac{s}{t}}$$

$$\boxed{\omega = \frac{\theta}{t}}$$

$$\boxed{\frac{45 \text{ vueltas}}{\text{minutos}} = \frac{45 \text{ } \cancel{\text{vueltas}}}{\text{minutos}} \cdot \frac{2\pi \text{ radianes}}{\cancel{\text{vuelta}}} = \frac{90\pi \text{ radianes}}{\text{minutos}}}$$

Latitud L


Polo Norte
L
θ°
ecuador
Polo Sur
Polo Norte
Glasgow
48°9'
Albuquerque
35°5'
ecuador
Polo Sur

(a) (b)