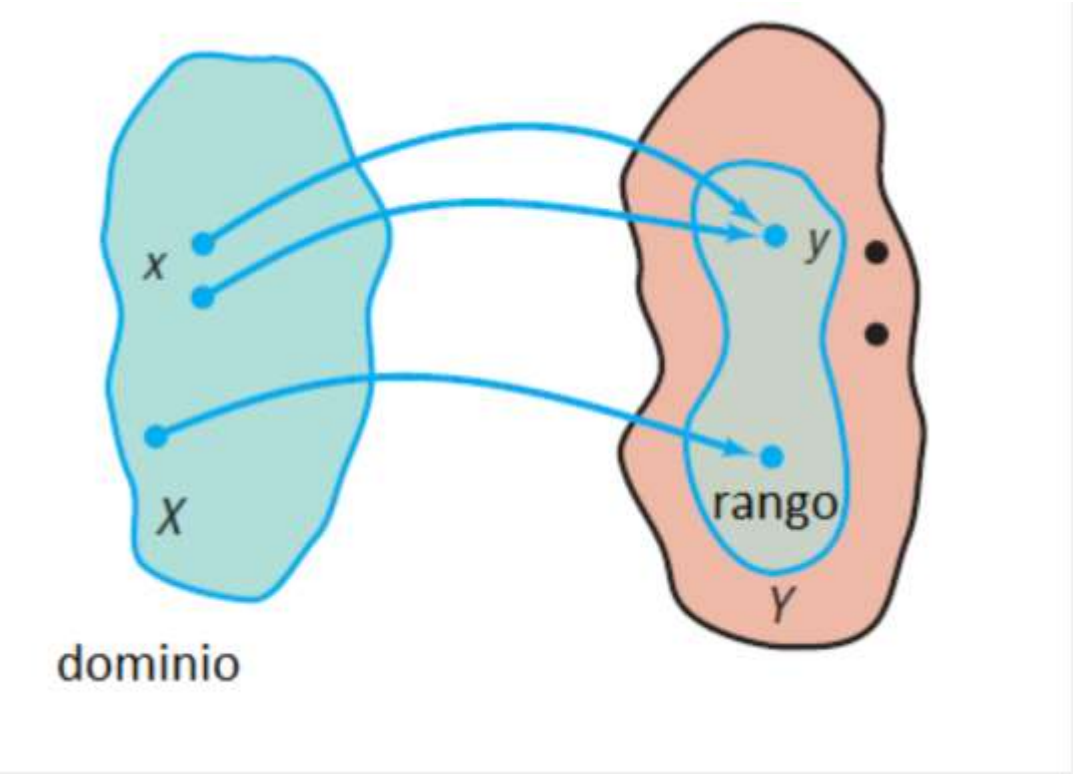
Funciones y sus gráficas

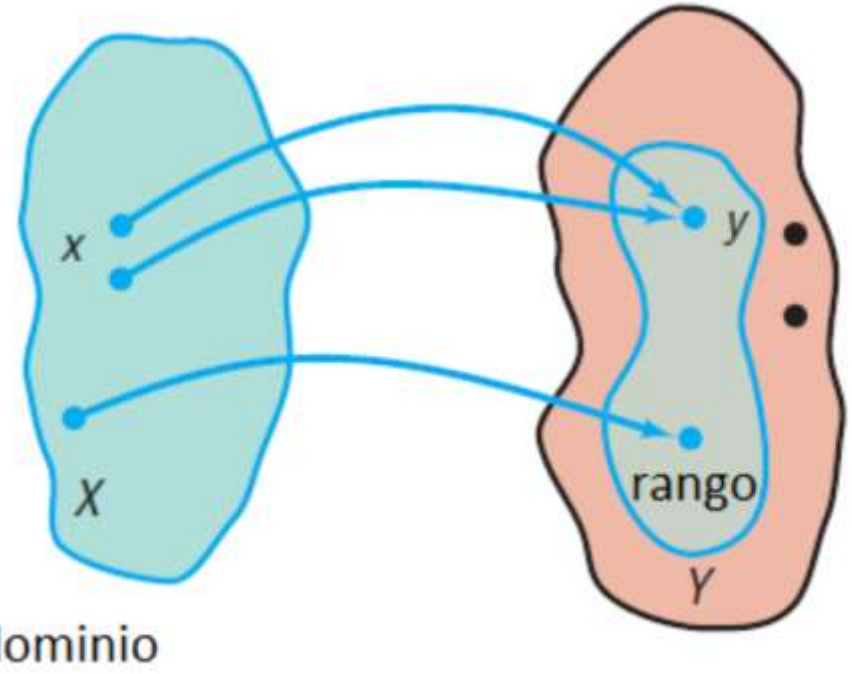
Sean X e Y dos conjuntos no vacíos. Una **función** de X en Y es una relación que asocia cada elemento de X con exactamente un elemento de Y.

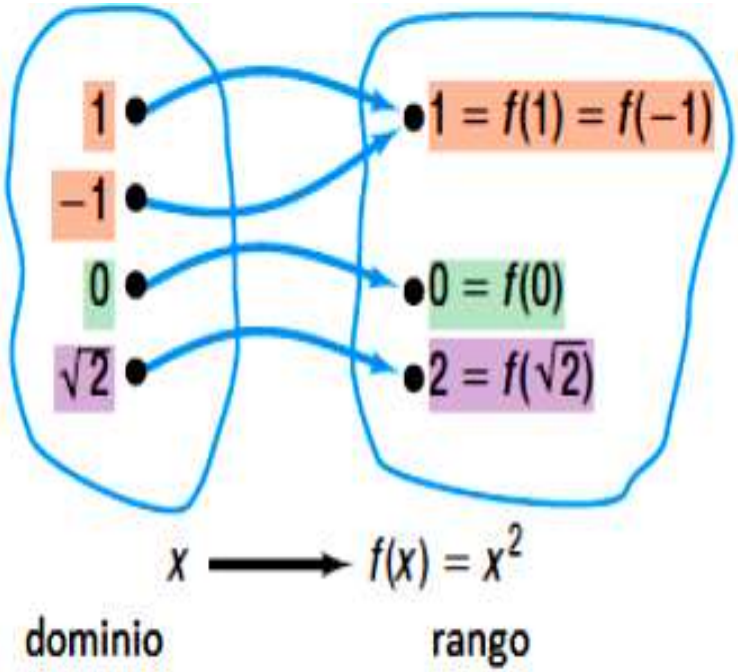


El conjunto X se llama **dominio** de la función

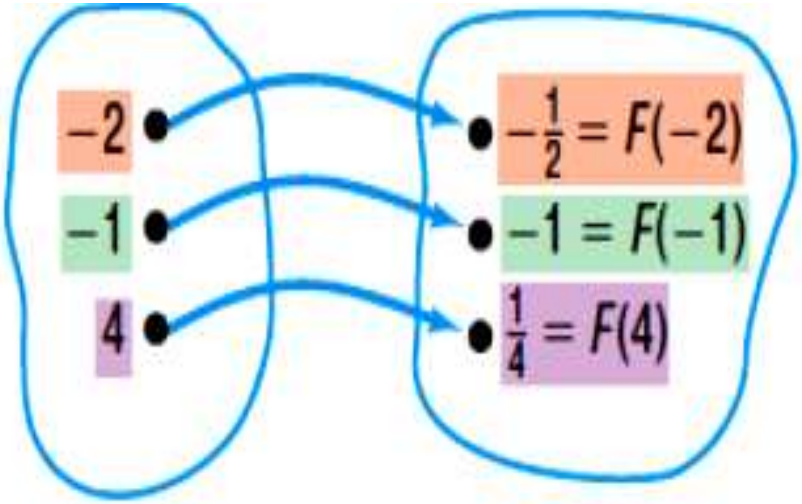
Para cada elemento x en X le corresponde un elemento y en Y llamado **valor** de la función en x o la **imagen** de x

El conjunto de todas las imagenes de los elementos del dominio se llama **rango** de la función.



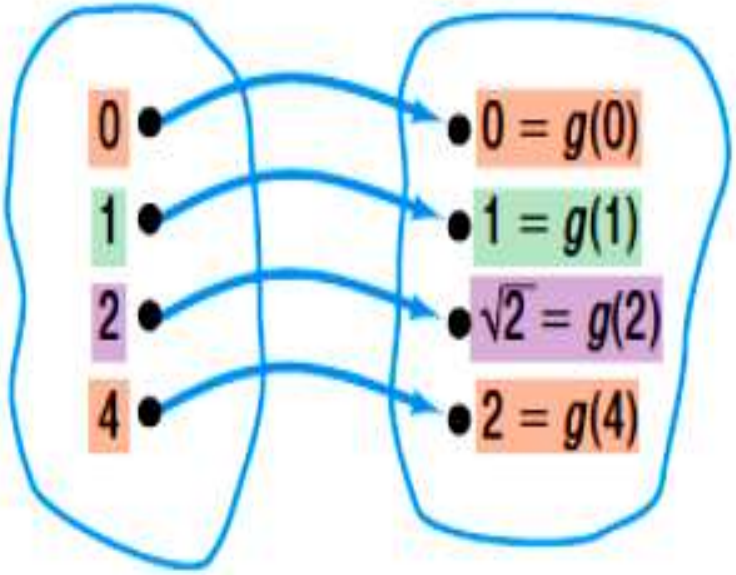


(a) $f(x) = x^2$

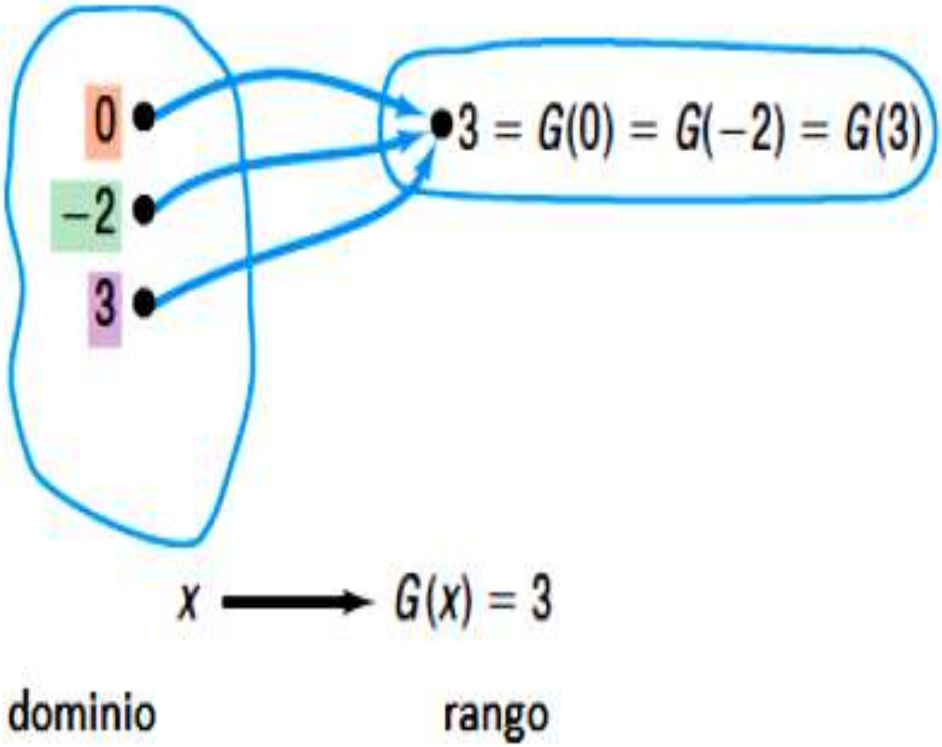


$$x \longrightarrow F(x) = \frac{1}{x}$$

(b) $F(x) = \frac{1}{x}$



(c) $g(x) = \sqrt{x}$



(d) $G(x) = 3$

Determinar si una relación representa una función

(a) $\{(1,4),(2,5),(3,6),(4,7)\}$

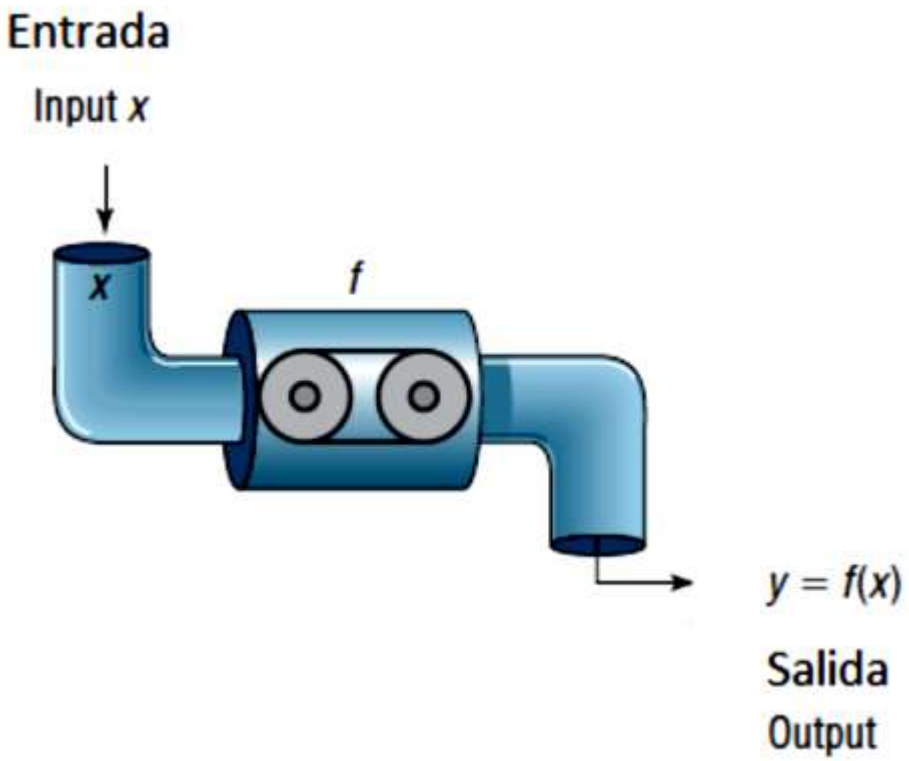
(b) $\{(1,4),(2,4),(3,5),(6,10)\}$

(c) $\{(-3,9),(-2,4),(0,0),(1,1),(-3,8)\}$

Determinar si una ecuación representa una función

a) $y = 2x - 5$

b) $x^2 + y^2 = 1$


Entrada
Input x
x
f
y = f(x)
Salida
Output

Encontrar los valores de una función.

Para la función f definida por $f(x) = 2x^2 - 3x$, evalúa:

(a) $f(3)$ (b) $f(x) + f(3)$ (c) $3f(x)$ (d) $f(-x)$

(e) $-f(x)$ (f) $f(3x)$ (g) $f(x + 3)$ (h) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ $h \neq 0$

Forma implícita de una función

En general, cuando una función f está definida por una ecuación en x y en y, decimos que la función f se da de forma **implícita**. Si es posible resolver la ecuación para y en términos de x, entonces escribimos $y = f(x)$ y decimos que la función se da de forma **explícita**. Por ejemplo,

Forma implícita	**Forma explícita**
$3x + y = 5$	$y = f(x) = -3x + 5$
$x^2 - y = 6$	$y = f(x) = x^2 - 6$
$xy = 4$	$y = f(x) = \dfrac{4}{x}$

RESUMEN Hechos importantes acerca de funciones

(a) Para cada x en el dominio de una función f, existe exactamente una imagen $f(x)$ en el rango, sin embargo, un elemento del rango puede ser el resultado de más de una x en el dominio.

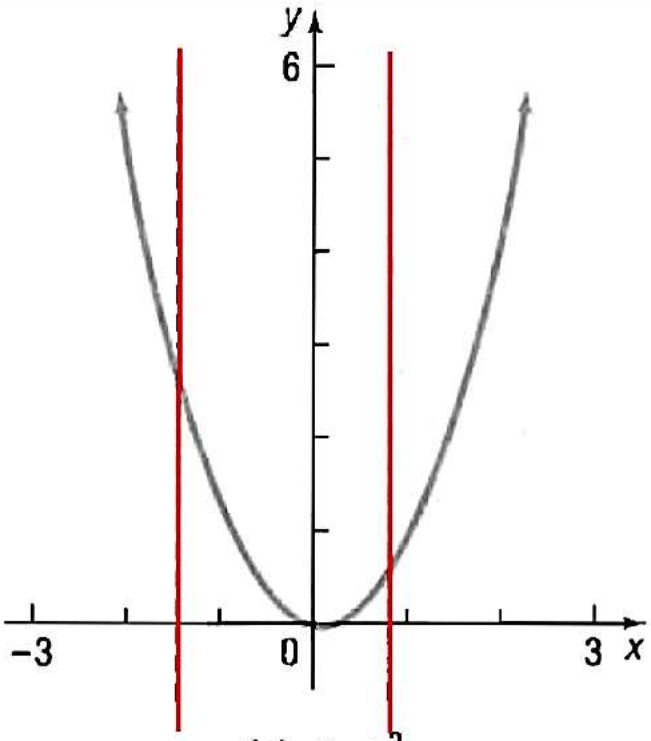
(b) f es el símbolo que usamos para denotar a la función. Es el símbolo de la ecuación (regla) que se usa para obtener a partir de una x en el dominio, una $f(x)$ en el rango.

(c) Si $y = f(x)$, entonces x es la variable independiente o argumento de f, y y es la variable dependiente o el valor de f en x.

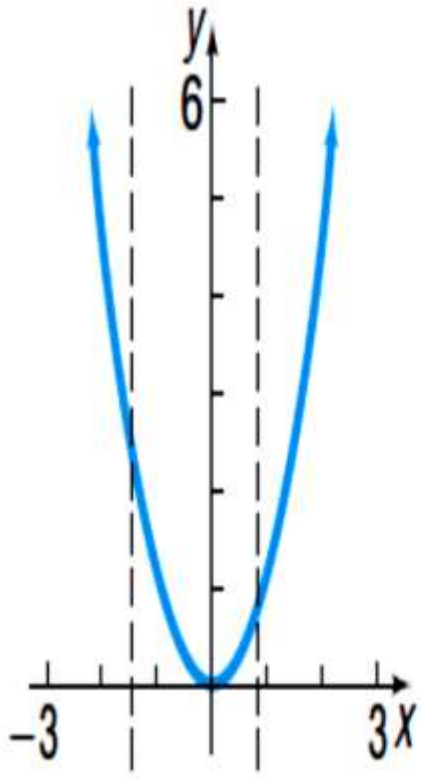
Gráfica de una función

criterio de la recta vertical:

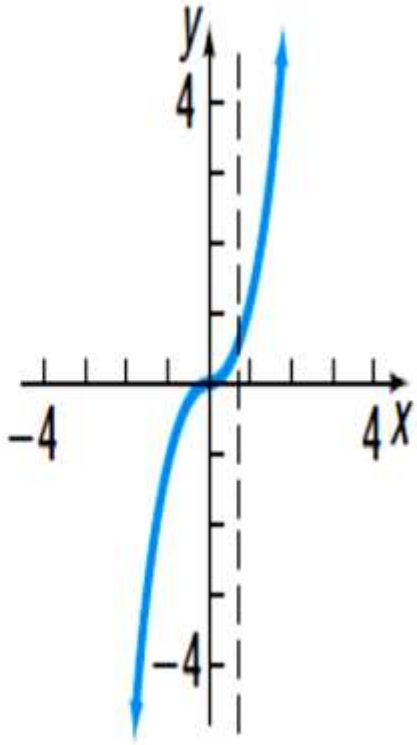
Un conjunto de puntos en el plano xy es la gráfica de una función si, y sólo si, una recta vertical interseca la gráfica a lo más en un punto.



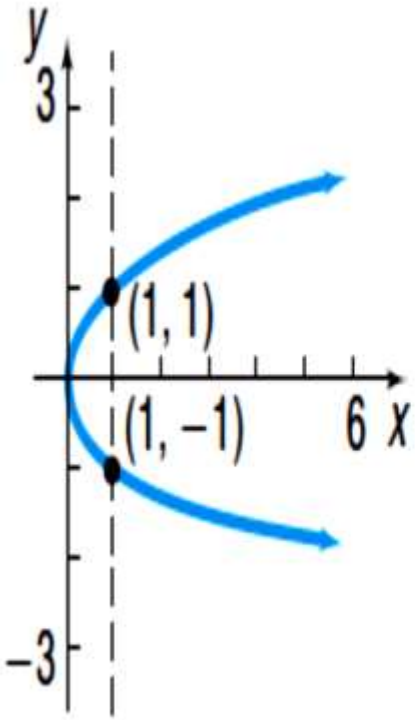
(a) $y = x^2$



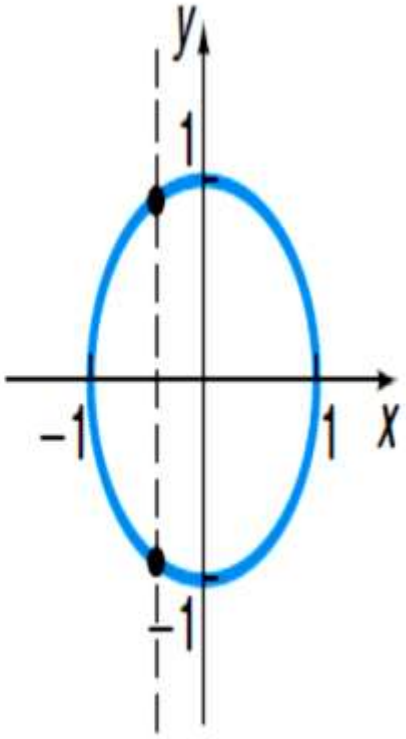
(a) $y = x^2$



(b) $y = x^3$



(c) $x = y^2$

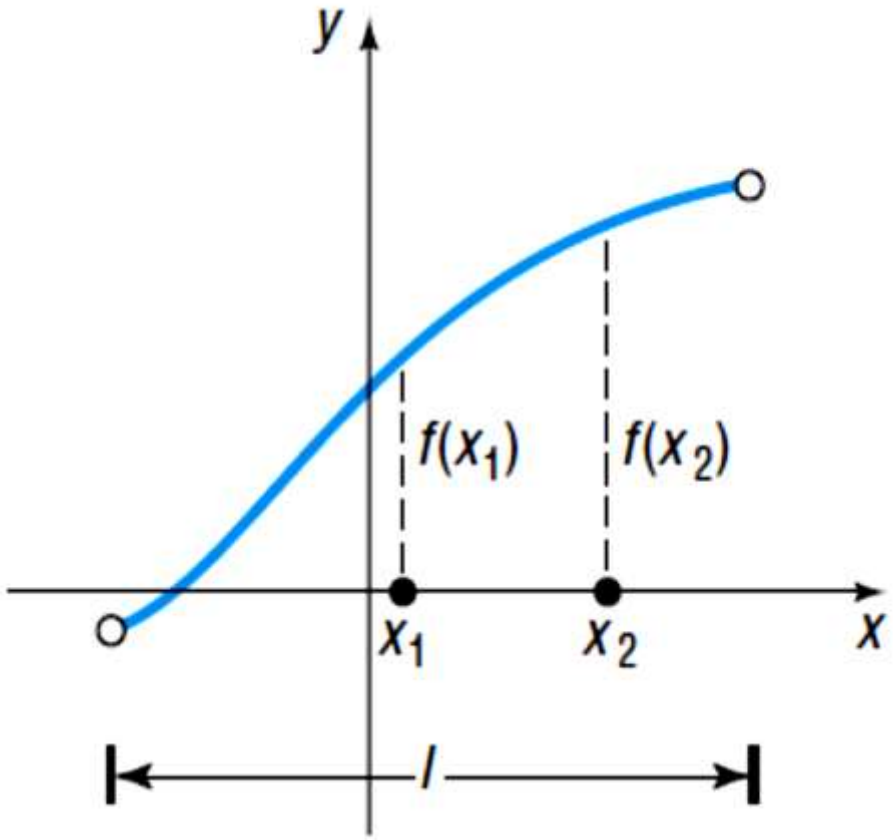


(d) $x^2 + y^2 = 1$

Una función f es **creciente** en un intervalo I si, para cualquier elección de x_1 y x_2 en I, con $x_1 < x_2$, tenemos $f(x_1) < f(x_2)$.

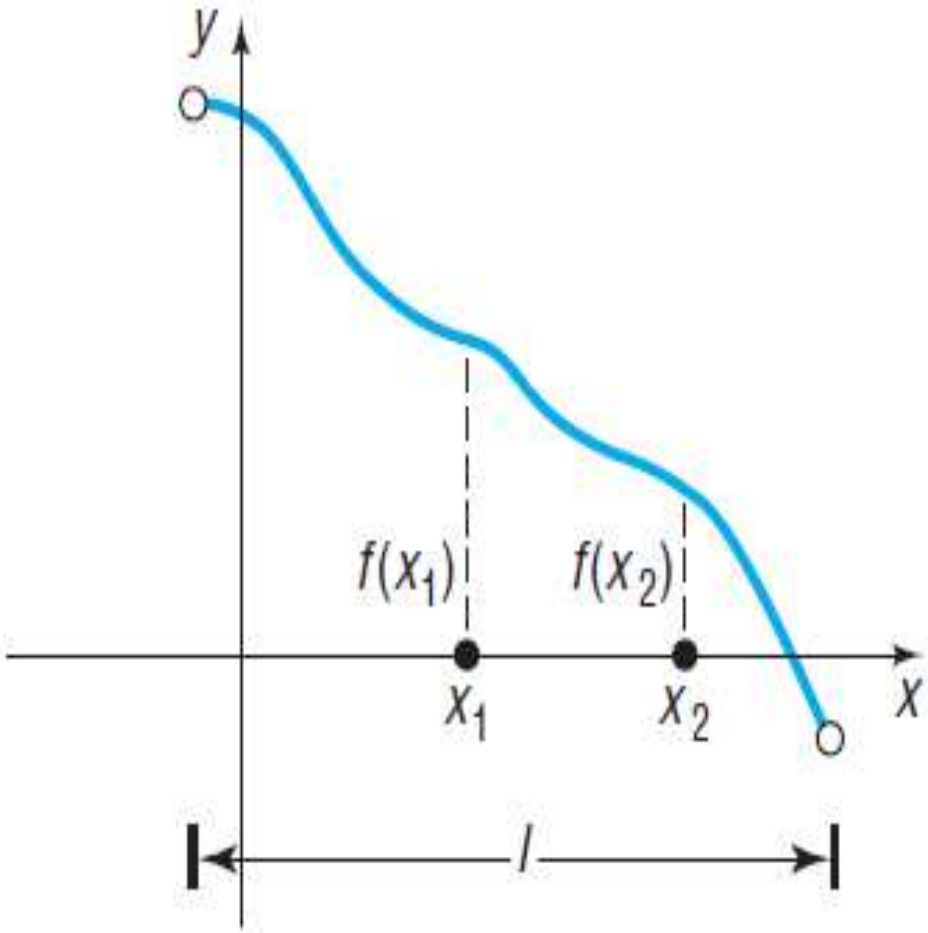
Una función f es **decreciente** en un intervalo I si, para cualquier elección de x_1 y x_2 en I, con $x_1 < x_2$, tenemos $f(x_1) > f(x_2)$.

Una función f es **constante** en un intervalo I si, para toda elección de x en I, los valores de $f(x)$ son iguales.

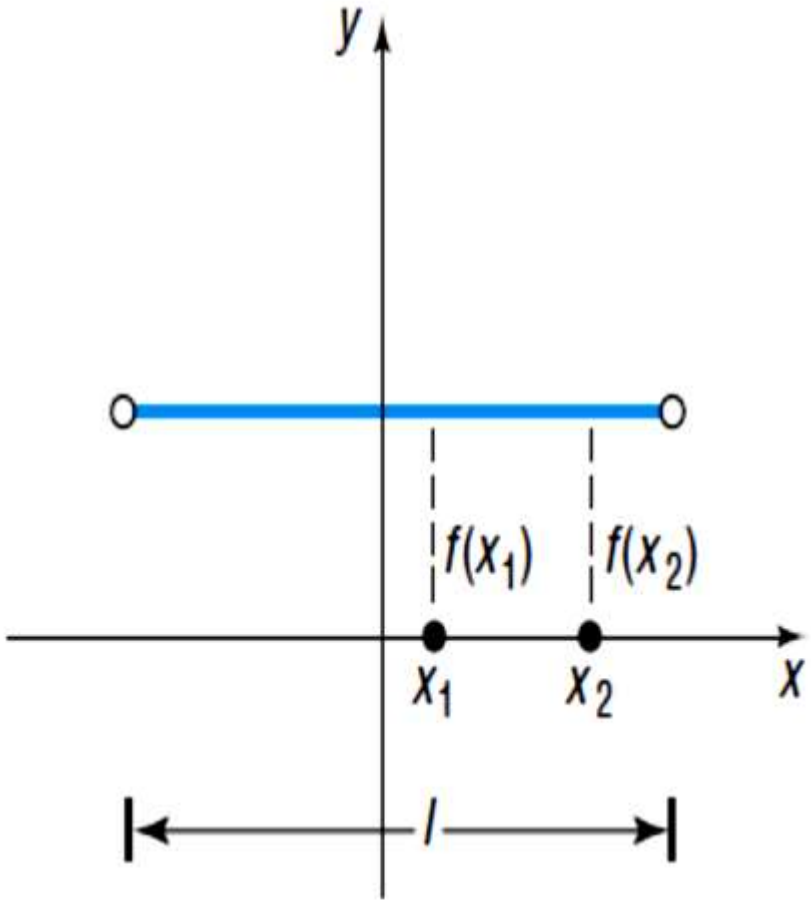


(a) Para $x_1 < x_2$ en I,
$f(x_1) < f(x_2)$;

f es creciente sobre I

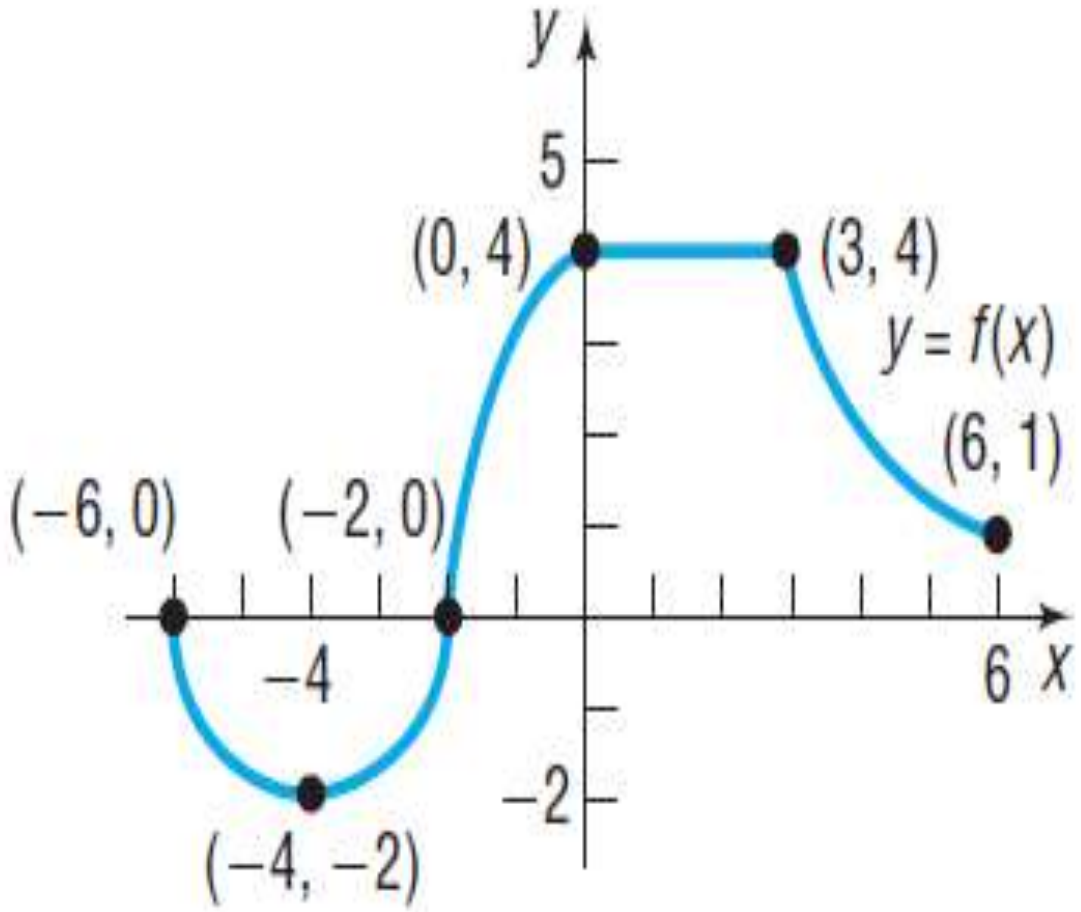


(b) Para $x_1 < x_2$ en I,
$f(x_1) > f(x_2)$;
f es decreciente en I



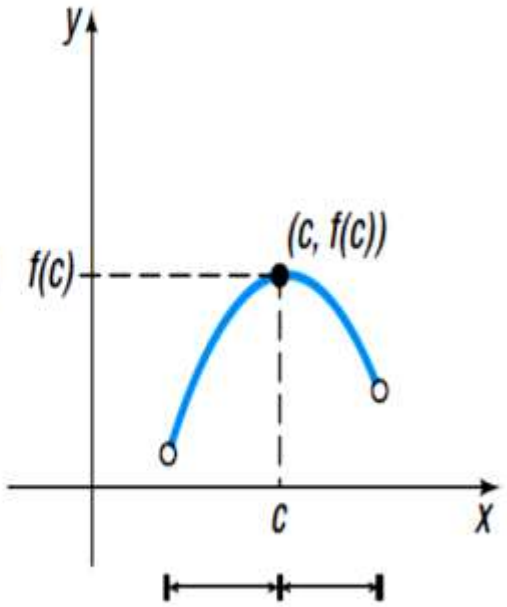
(c) Para todo X en I, los valores de f son iguales ; f es constante en I

¿Dónde es creciente , decreciente y constante?

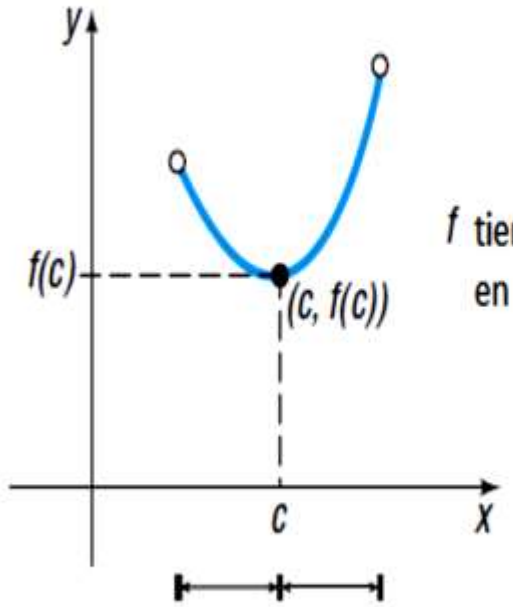


Uso de la gráfica para determinar un máximo o mínimo local de una función en un intervalo abierto

f tiene un máximo local en *c*.



(a)



(b)

f tiene un mínimo local en *c*.

Funciones pares e impares

Una función es **par** si para todo número x en su dominio, el número $-x$ también está en el dominio y

$$f(-x) = f(x)$$

Una función es **impar** si para todo número x en su dominio, el número $-x$ también está en el dominio y

$$f(-x) = -f(x)$$

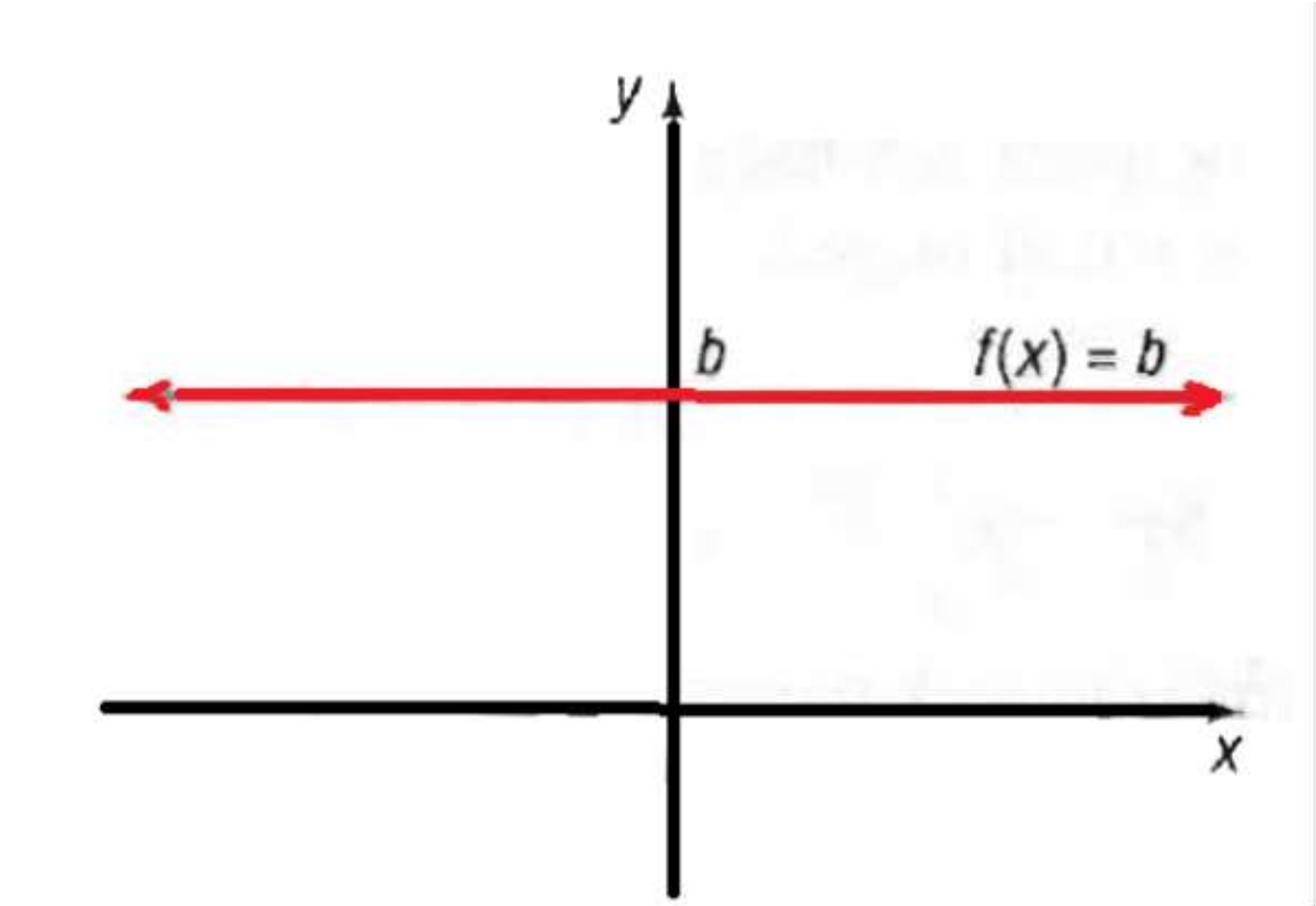
Funciones importantes

Función lineal

$$f(x) = mx + b \qquad m \text{ y } b \text{ son números reales}$$

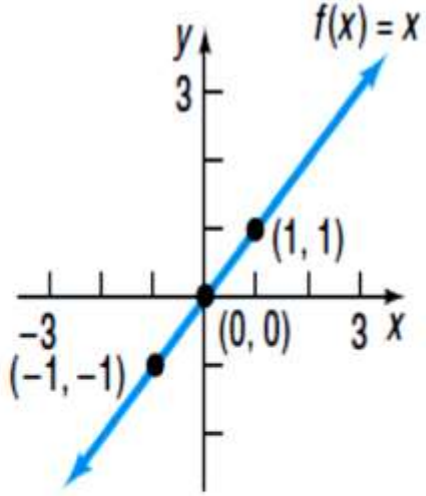
Función constante

$$f(x) = b \qquad b \text{ es un número real}$$


y
b
f(x) = b
x

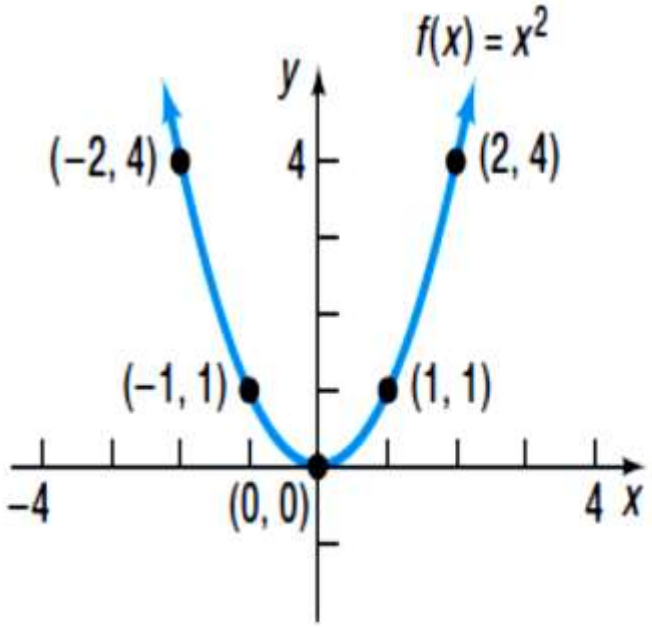
Función Identidad

$$f(x) = x$$



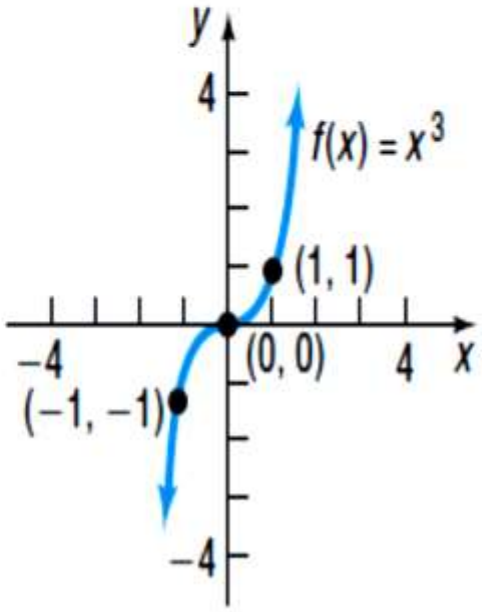
Función Cuadrada

$$f(x) = x^2$$



Función Cúbica

$$f(x) = x^3$$

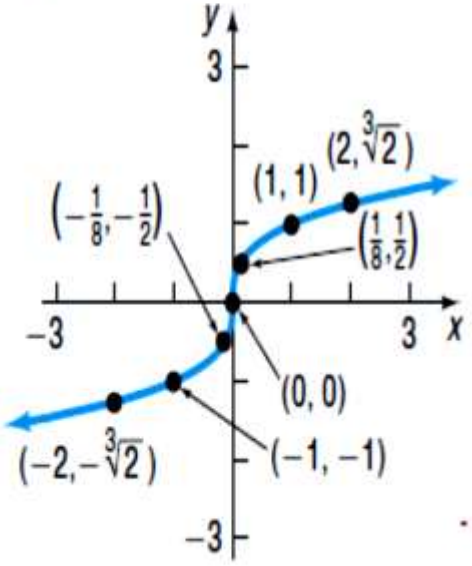


Propiedades de $f(x) = \sqrt[3]{x}$

1. El dominio y el rango son el conjunto de todos los números reales.
2. La intersección en x de la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es 0. La intersección en y de la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ también es 0.
3. La gráfica es simétrica con respecto al origen. La función es impar.
4. La función es creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.
5. La función no tiene ningún mínimo ni ningún máximo local.

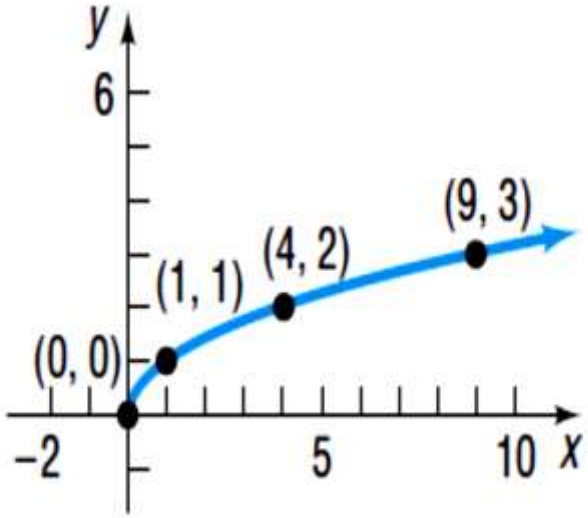
x	$y = f(x) = \sqrt[3]{x}$	(x, y)
0	0	(0, 0)
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$
1	1	(1, 1)
2	$\sqrt[3]{2} \approx 1.26$	$\left(2, \sqrt[3]{2}\right)$
8	2	(8, 2)

Figure 29



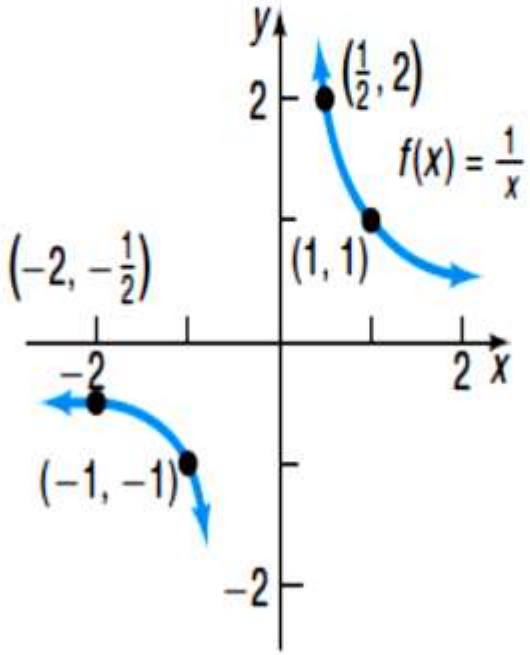
Propiedades de $f(x) = \sqrt{x}$

1. el dominio y el rango son el conjunto de números reales no negativos.
2. El intercepto x del gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ es 0. El intercepto- y de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ también es 0
3. La función no es par ni impar.
4. La función es creciente en el intervalo $(0, \infty)$.
5. La función tiene un mínimo absoluto 0 en $x = 0$.



Función Recíproca

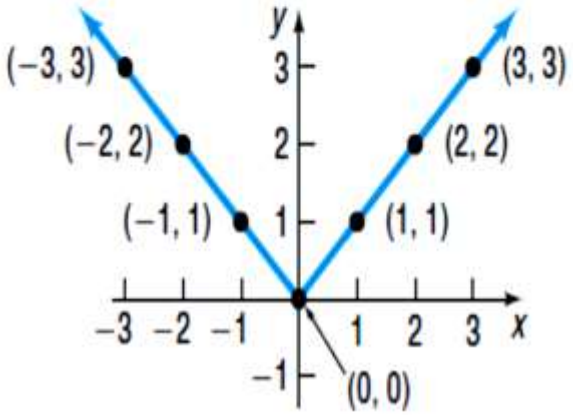
$$f(x) = \frac{1}{x}$$



Propiedades de $f(x) = |x|$

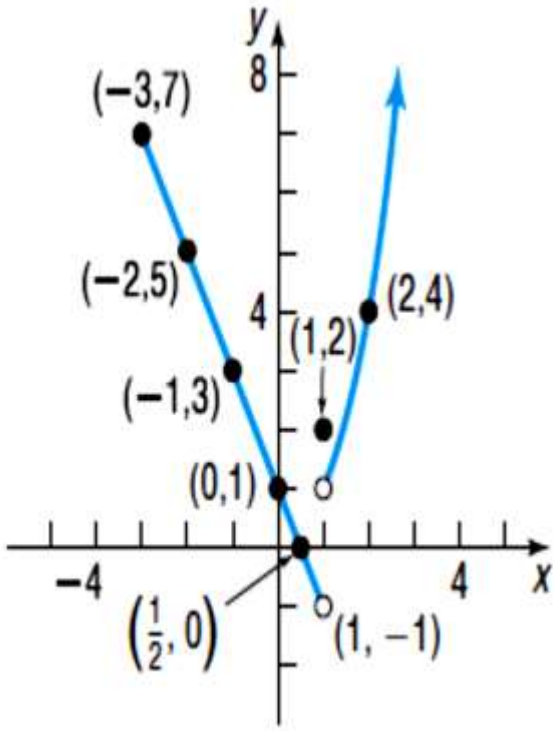
1. El dominio es el conjunto de todos los números reales. El rango de f es $\{y|y \geq 0\}$.
2. La intersección con x de la gráfica de $f(x) = |x|$ es 0. La intersección con y de la gráfica de $f(x) = |x|$ también es 0.
3. La gráfica es simétrica con respecto al eje y. La función es par.
4. La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$. Es creciente en el intervalo $(0, \infty)$.
5. La función tiene un mínimo absoluto de 0 en $x = 0$.

x	$y = f(x) = \|x\|$	(x, y)
0	0	(0,0)
1	1	(1,1)
2	2	(2,2)
3	3	(3,3)

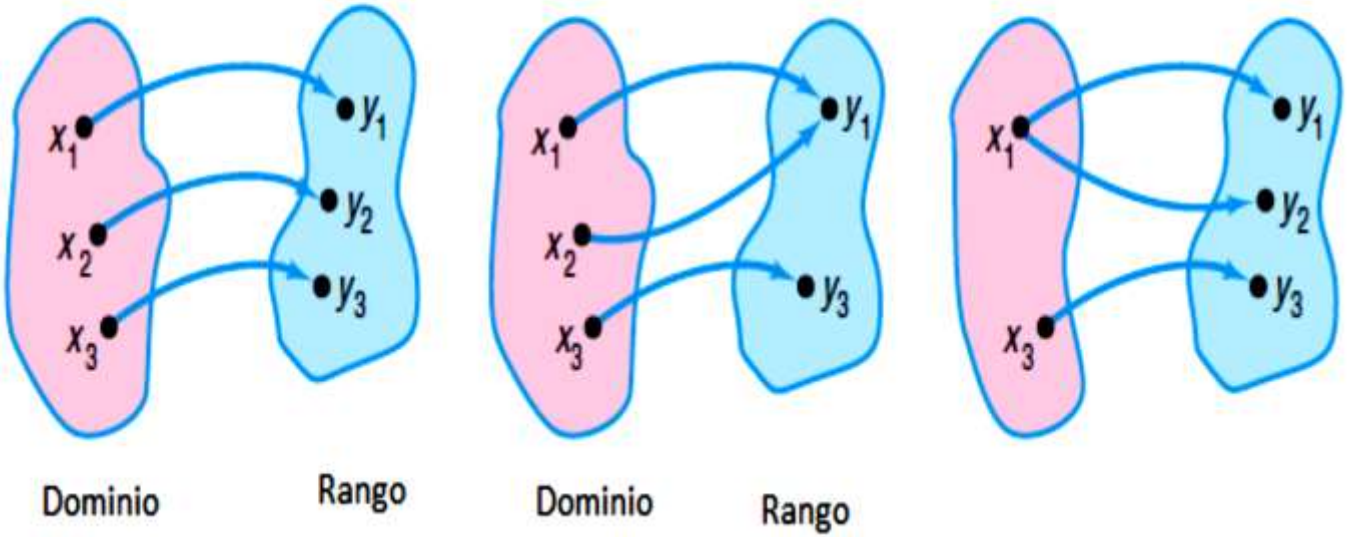


Función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{if } -3 \leq x < 1 \\ 2 & \text{if } x = 1 \\ x^2 & \text{if } x > 1 \end{cases}$$



Funciones uno a uno

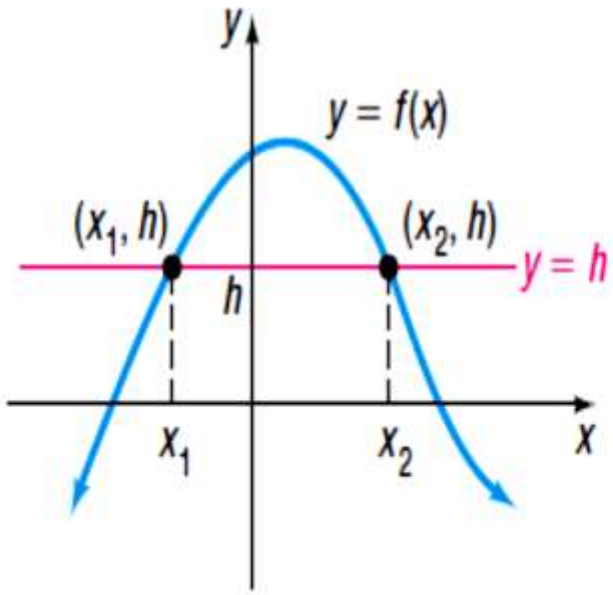


(a) Función uno a uno

(b) Es función pero NO es uno auno

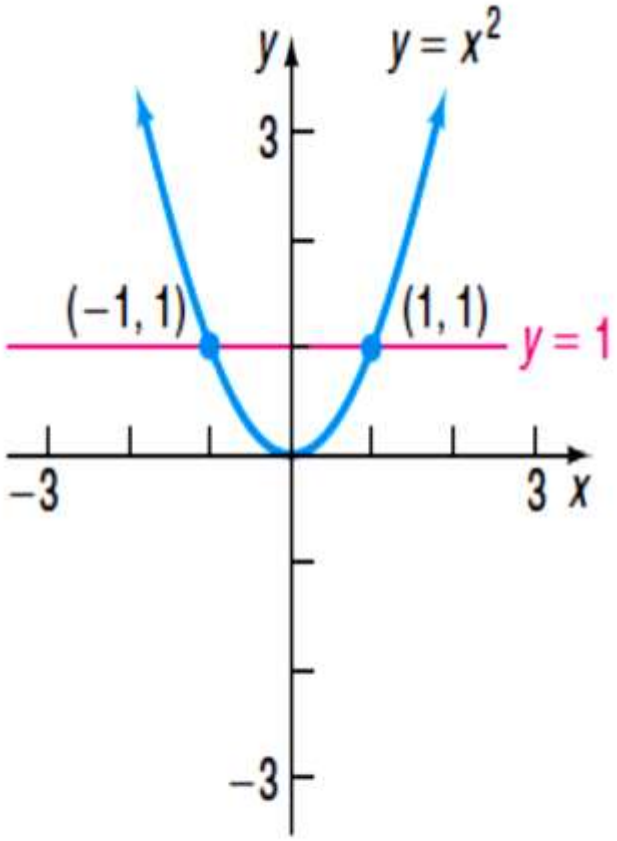
(c) No es función

Para determinar si una función es uno a uno , se aplica el criterio de la **recta horizontal**



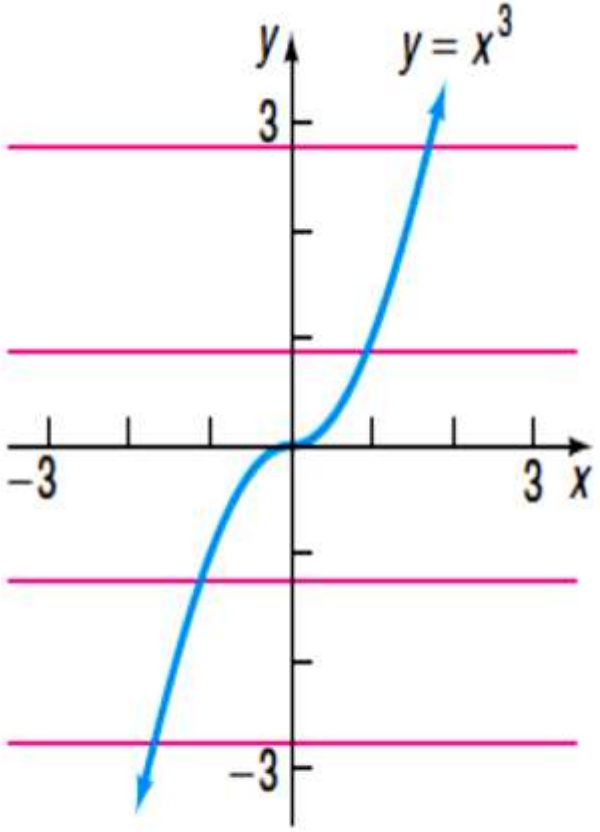
$f(x_1) = f(x_2) = h$ y $x_1 \neq x_2$; f

No es función uno a uno



(a)

No es uno a uno



(b)

Es una función uno a uno

Razón de cambio promedio de una función

Definición: Si a y b, con $a \neq b$, están en el dominio de una función $y = f(x)$, **la razón de cambio promedio** de a a b se define como :

$$\text{razón de cambio promedio} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad a \neq b$$

Ejemplo

Encontrar la razón de cambio promedio de $f(x) = 3x^2$:

(a) de 1 a 3 (b) de 1 a 5 (c) de 1 a 7

(a) r.c.p de $f(x) = 3x^2$ de 1 a 3

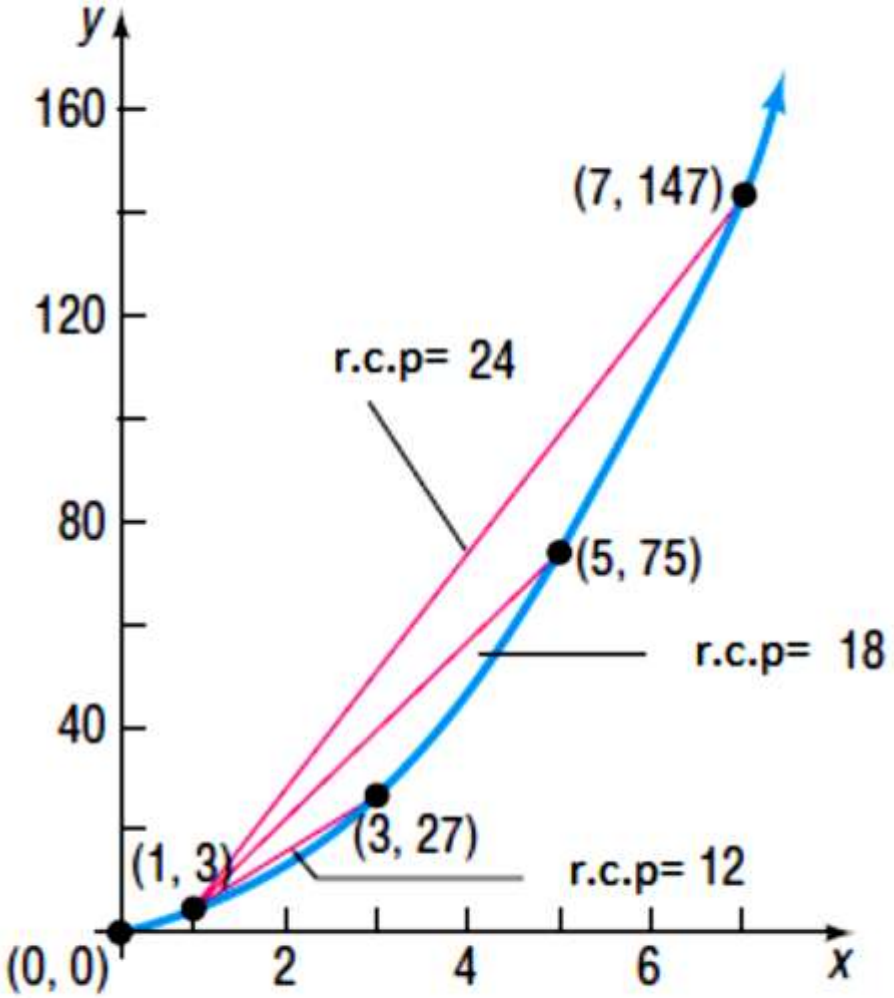
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{27 - 3}{3 - 1} = \frac{24}{2} = 12$$

(b) r.c.p de $f(x) = 3x^2$ de 1 a 5

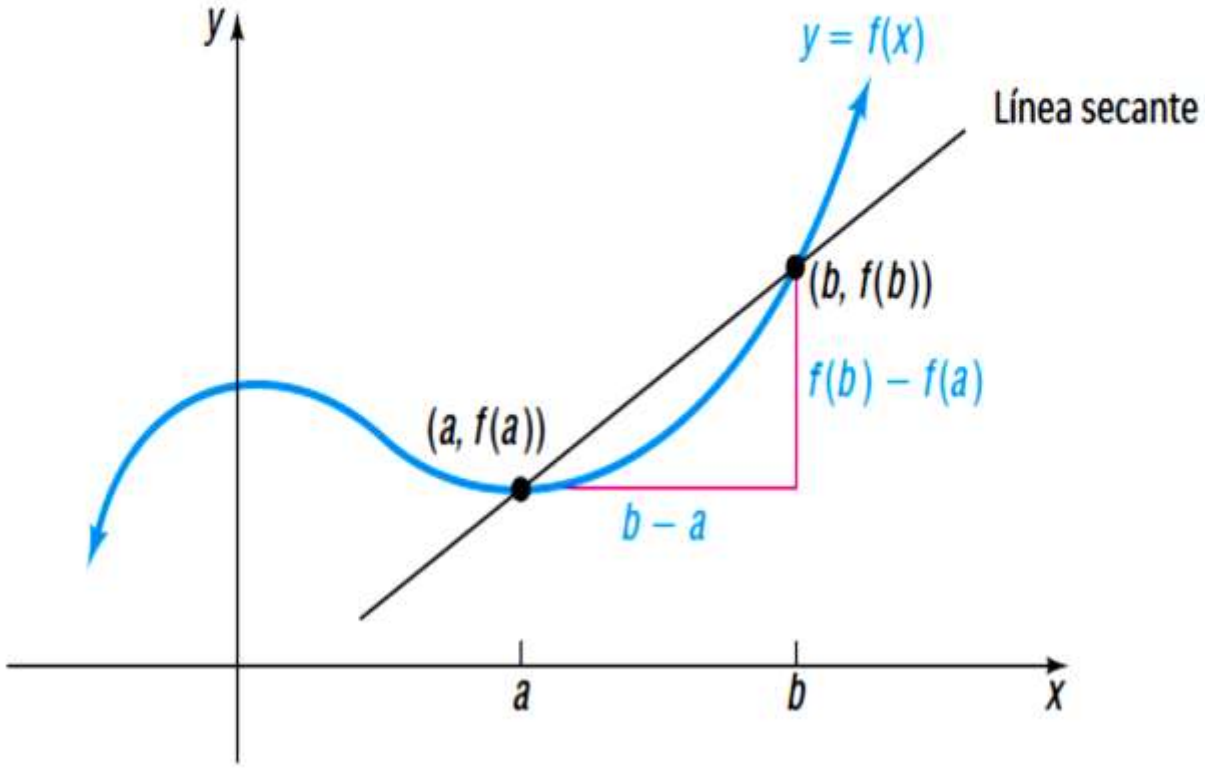
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{75 - 3}{5 - 1} = \frac{72}{4} = 18$$

(c) r.c.p de $f(x) = 3x^2$ de 1 a 7

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(7) - f(1)}{7 - 1} = \frac{147 - 3}{7 - 1} = \frac{144}{6} = 24$$


y
160
120
80
40
(7, 147)
r.c.p= 24
(5, 75)
r.c.p= 18
(3, 27)
(1, 3)
r.c.p= 12
(0, 0)
2
4
6
x

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Encontrar la ecuación de la línea secante

$$g(x) = 3x^2 - 2x + 3.$$

a) Encontrar la razón de cambio promedio de g desde -2 a 1

b) Encontrar la ecuación de la línea secante que contenga (-2, g(-2)) y (1, g(1))

Solución

(a) $g(x) = 3x^2 - 2x + 3$ de -2 a 1

$$\text{razón de cambio promedio} = \frac{g(1) - g(-2)}{1 - (-2)}$$

$$= \frac{4 - 19}{3}$$

$g(1) = 3(1)^2 - 2(1) + 3 = 4$

$g(-2) = 3(-2)^2 - 2(-2) + 3 = 19$

$$= -\frac{15}{3} = -5$$

(b)

$$y - y_1 = m_{\text{sec}}(x - x_1)$$

$x_1 = -2, y_1 = g(-2) = 19, m_{sec} = -5$

$$y - 19 = -5(x - (-2))$$

$$y - 19 = -5x - 10$$

$$y = -5x + 9$$