# Ecuaciones

## PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

| Propiedad | Descripción |
| --- | --- |
| **1.** $A = B \Leftrightarrow A + C = B + C$ | Sumar la misma cantidad a ambos lados de una ecuación da una ecuación equivalente. |
| **2.** $A = B \Leftrightarrow CA = CB \quad (C \neq 0)$ | Multiplicar ambos lados de una ecuación por la misma cantidad diferente de cero da una ecuación equivalente. |

## ECUACIONES LINEALES

Una **ecuación lineal** en una variable es una ecuación equivalente a una de la forma

$$ax + b = 0$$

donde $a$ y $b$ son números reales y $x$ es la variable.

| Ecuaciones lineales | Ecuaciones no lineales | |
|---|---|---|
| $4x - 5 = 3$ | $x^2 + 2x = 8$ | No lineal; contiene el cuadrado de la variable |
| $2x = \frac{1}{2}x - 7$ | $\sqrt{x} - 6x = 0$ | No lineal; contiene la raíz cuadrada de la variable |
| $x - 6 = \frac{x}{3}$ | $\frac{3}{x} - 2x = 1$ | No lineal; contiene el recíproco de la variable |

## EJEMPLO 1 | Solución de una ecuación lineal

Resuelva la ecuación $7x - 4 = 3x + 8$.

### SOLUCIÓN

| | |
|---|---|
| $7x - 4 = 3x + 8$ | Ecuación dada |
| $(7x - 4) + 4 = (3x + 8) + 4$ | Sume 4 |
| $7x = 3x + 12$ | Simplifique |
| $7x - 3x = (3x + 12) - 3x$ | Reste $3x$ |
| $4x = 12$ | Simplifique |
| $\frac{1}{4} \cdot 4x = \frac{1}{4} \cdot 12$ | Multiplique por $\frac{1}{4}$ |
| $x = 3$ | Simplifique |

$x = 3$

$x = 3$

## EJEMPLO 2 | Solución para una variable en términos de otras

Despeje $M$ de la ecuación siguiente.

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

**SOLUCIÓN** Aun cuando esta ecuación contiene más de una variable, la resolvemos como es usual al aislar $M$ en un lado, tratando a las otras variables como si fueran números.

$$F = \left(\frac{Gm}{r^2}\right)M$$ Factorice $M$ del lado derecho

$$\left(\frac{r^2}{Gm}\right)F = \left(\frac{r^2}{Gm}\right)\left(\frac{Gm}{r^2}\right)M$$ Multiplique por el recíproco de $\frac{Gm}{r^2}$

$$\frac{r^2F}{Gm} = M$$ Simplifique

La solución es $M = \dfrac{r^2F}{Gm}$.

## EJEMPLO 3 | Despejar una variable en términos de otras

El área superficial $A$ del rectángulo cerrado que se muestra en la Figura 1 puede calcularse a partir de la longitud $l$, el ancho $w$ y la altura $h$ de acuerdo con la fórmula

$$A = 2lw + 2wh + 2lh$$

Despeje $w$ en términos de las otras variables de esta ecuación.

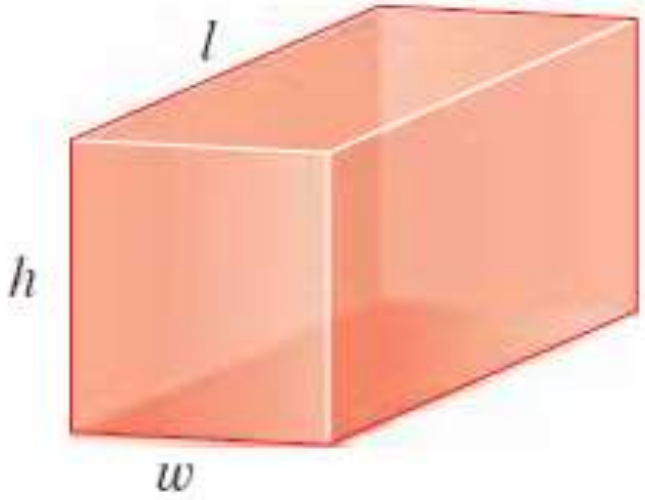



**FIGURA 1** Una caja rectangular cerrada

**SOLUCIÓN** Aun cuando esta ecuación contiene más de una variable, la resolvemos como es usual al aislar $w$ en un lado, tratando las otras variables como si fueran números.

$$A = (2lw + 2wh) + 2lh$$ Reúna términos que contengan $w$

$$A - 2lh = 2lw + 2wh$$ Reste $2lh$

$$A - 2lh = (2l + 2h)w$$ Factorice $w$ del lado derecho

$$\frac{A - 2lh}{2l + 2h} = w$$ Divida entre $2l + 2h$

La solución es $w = \dfrac{A - 2lh}{2l + 2h}$.

## ECUACIONES CUADRÁTICAS

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde $a$, $b$ y $c$ son números reales con $a \neq 0$.

## PROPIEDAD DE PRODUCTO CERO

$$AB = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad A = 0 \quad \text{o} \quad B = 0$$

## EJEMPLO 4 | Solución de una ecuación cuadrática por factorización

Resuelva la ecuación $x^2 + 5x = 24$.

**SOLUCIÓN** Primero debemos reescribir la ecuación de modo que el lado derecho sea 0.

$$x^2 + 5x = 24$$

$$x^2 + 5x - 24 = 0 \qquad \text{Reste 24}$$

$$(x - 3)(x + 8) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 8 = 0 \qquad \text{Propiedad de Producto Cero}$$

$$x = 3 \qquad\qquad x = -8 \qquad \text{Resuelva}$$

Las soluciones son $x = 3$ y $x = -8$.

## SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA SENCILLA

Las soluciones de la ecuación $x^2 = c$ son $x = \sqrt{c}$ y $x = -\sqrt{c}$.

## EJEMPLO 5 | Solución de ecuaciones cuadráticas sencillas

Resuelva las siguientes ecuaciones.

**(a)** $x^2 = 5$ **(b)** $(x - 4)^2 = 5$

**(a)** Del principio contenido en el cuadro precedente, obtenemos $x = \pm\sqrt{5}$.

**(b)** También podemos tomar la raíz cuadrada de cada lado de esta ecuación.

$$(x - 4)^2 = 5$$

$$x - 4 = \pm\sqrt{5} \qquad \text{Tome la raíz cuadrada}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{5} \qquad \text{Sume 4}$$

Las soluciones son $x = 4 + \sqrt{5}$ y $x = 4 - \sqrt{5}$.

## COMPLETAR EL CUADRADO

Para hacer que $x^2 + bx$ sea un cuadrado perfecto, sume $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, que es el cuadrado de la mitad del coeficiente de $x$. Esto da el cuadrado perfecto.

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

## EJEMPLO 6 | Resolver ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado

Resuelva lo siguiente.

**(a)** $x^2 - 8x + 13 = 0$ **(b)** $3x^2 - 12x + 6 = 0$

## SOLUCIÓN

(a) $x^2 - 8x + 13 = 0$ Ecuación dada

$x^2 - 8x = -13$ Reste 13

$x^2 - 8x + 16 = -13 + 16$ Complete el cuadrado: sume $\left(\frac{-8}{2}\right)^2 = 16$

$(x - 4)^2 = 3$ Cuadrado perfecto

$x - 4 = \pm\sqrt{3}$ Tome la raíz cuadrada

$x = 4 \pm \sqrt{3}$ Sume 4

**(b)** Después de restar 6 de cada lado de la ecuación, debemos factorizar el coeficiente de $x^2$ (el 3) del lado izquierdo para poner la ecuación en la forma correcta para completar el cuadrado.

$$3x^2 - 12x + 6 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$3x^2 - 12x = -6 \qquad \text{Reste 6}$$

$$3(x^2 - 4x) = -6 \qquad \text{Factorice 3 del lado izquierdo}$$

Ahora completamos el cuadrado al sumar $(-2)^2 = 4$ *dentro* de los paréntesis. Como todo dentro de los paréntesis está multiplicado por 3, esto significa que en realidad estamos sumando $3 \cdot 4 = 12$ al lado izquierdo de la ecuación. Entonces, también debemos sumar 12 al lado derecho.

$$3(x^2 - 4x + 4) = -6 + 3 \cdot 4 \qquad \text{Complete el cuadrado: sume 4}$$

$$3(x - 2)^2 = 6 \qquad \text{Cuadrado perfecto}$$

$$(x - 2)^2 = 2 \qquad \text{Divida entre 3}$$

$$x - 2 = \pm\sqrt{2} \qquad \text{Tome la raíz cuadrada}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{2} \qquad \text{Sume 2}$$

## LA FÓRMULA CUADRÁTICA

Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**DEMOSTRACIÓN** Primero, dividimos entre $a$ cada lado de la ecuación y pasamos la constante al lado derecho, obteniendo

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \qquad \text{Divida entre } a$$

A continuación completamos el cuadrado al sumar $(b/2a)^2$ a cada lado de la ecuación:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \qquad \text{Complete el cuadrado: sume } \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2} \qquad \text{Cuadrado perfecto}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{Tome la raíz cuadrada}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{Reste } \frac{b}{2a}$$

■

## EJEMPLO 7 | Uso de la fórmula cuadrática

Encuentre todas las soluciones de las ecuaciones siguientes.

(a) $3x^2 - 5x - 1 = 0$ (b) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ (c) $x^2 + 2x + 2 = 0$

**SOLUCIÓN**

(a) En esta ecuación cuadrática $a = 3$, $b = -5$ y $c = -1$.

$$3x^2 - 5x - 1 = 0$$

($b = -5$; $a = 3$; $c = -1$)

Por la fórmula cuadrática,

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{6}$$

Si se desean aproximaciones, podemos usar una calculadora para obtener

$$x = \frac{5 + \sqrt{37}}{6} \approx 1.8471 \quad \text{y} \quad x = \frac{5 - \sqrt{37}}{6} \approx -0.1805$$

**(b)** Usando la fórmula cuadrática con $a = 4$, $b = 12$ y $c = 9$ dará

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm 0}{8} = -\frac{3}{2}$$

Esta ecuación tiene sólo una solución, $x = -\frac{3}{2}$.

**(c)** Usando la fórmula cuadrática, con $a = 1$, $b = 2$ y $c = 2$ resulta

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1}$$

Como el cuadrado de cualquier número real es no negativo, $\sqrt{-1}$ no está definido en el sistema de números reales. La ecuación no tiene solución real.

## EL DISCRIMINANTE

El **discriminante** de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$ es $D = b^2 - 4ac$.

1. Si $D > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
2. Si $D = 0$, entonces la ecuación tiene exactamente una solución real.
3. Si $D < 0$, entonces la ecuación no tiene solución real.

## EJEMPLO 8 | Uso del discriminante

Use el discriminante para determinar cuántas soluciones reales tiene cada ecuación.

**(a)** $x^2 + 4x - 1 = 0$ **(b)** $4x^2 - 12x + 9 = 0$ **(c)** $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4 = 0$

## SOLUCIÓN

**(a)** El discriminante es $D = 4^2 - 4(1)(-1) = 20 > 0$, por lo cual la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

**(b)** El discriminante es $D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$, por lo cual la ecuación tiene una solución real.

**(c)** El discriminante es $D = (-2)^2 - 4(\frac{1}{3})4 = -\frac{4}{3} < 0$, por lo cual la ecuación no tiene solución real.

## EJEMPLO 9 | Trayectoria de un proyectil

Un objeto lanzado o disparado verticalmente hacia arriba a una velocidad inicial $v_0$ m/s alcanzará una altura de $h$ metros después de $t$ segundos, donde $h$ y $t$ están relacionadas por la fórmula

$$h = -5t^2 + v_0 t$$

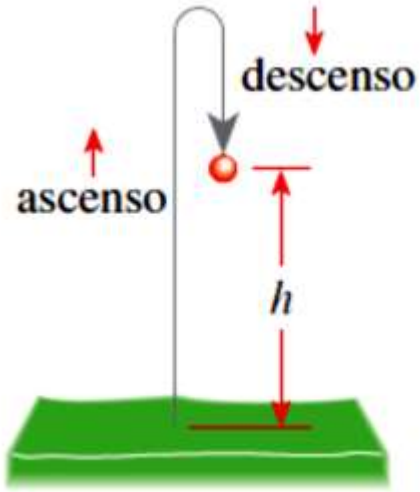
Suponga que se dispara una bala verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 240 m/s. Su trayectoria se ilustra en la Figura 2.

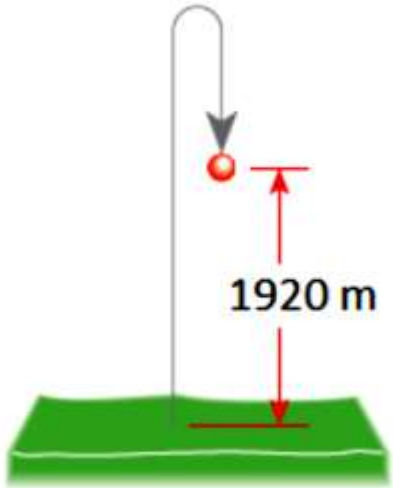
**(a)** ¿Cuándo caerá la bala al nivel del suelo?

**(b)** ¿Cuándo alcanza una altura de 1920 m ?

**(c)** ¿Cuándo alcanza una altura de 3200 m ?

**(d)** ¿Cuál es la altura del punto más alto al que llega la bala?



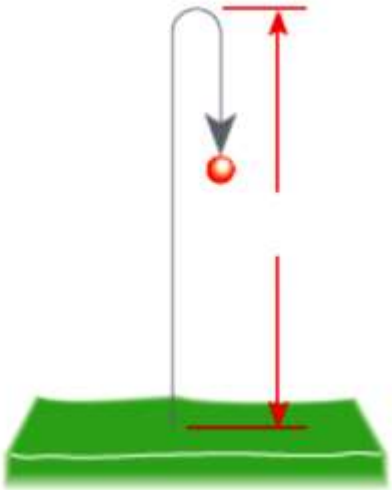
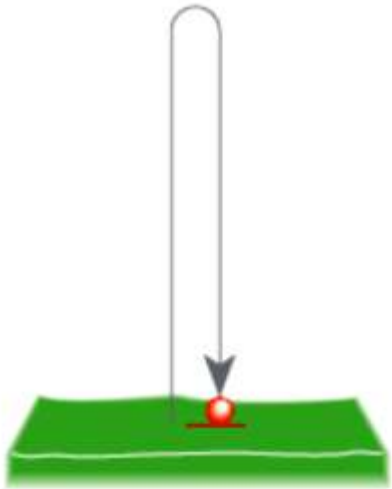
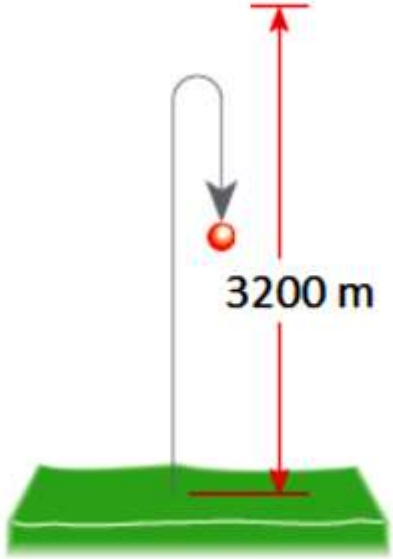



FIGURA 2





**SOLUCIÓN** Como la velocidad inicial en este caso es $v_0 = 240$ m/s , la fórmula es

$$h = -5t^2 + 240t$$

(a) El nivel del suelo corresponde a $h = 0$, de modo que debemos resolver la ecuación

$$0 = -5t^2 + 240t \qquad \text{Haga } h = 0$$

$$0 = -5t(t - 48) \qquad \text{Factorice}$$

Por lo tanto, $t = 0$ o $t = 48$. Esto significa que la bala arranca ($t = 0$) al nivel del suelo y regresa a éste después de 48 segundos.

(b) Haciendo $h = 1920$ da la ecuación

$$1920 = -5t^2 + 240t$$ Haga $h = 1920$

$$5t^2 - 240t + 1920 = 0$$ Todos los términos al lado izquierdo

$$t^2 - 48t + 384 = 0$$ Divida entre 16

Factorice

$$t \approx 10 \quad \text{or} \quad t \approx 48$$ Resuelva

**(c)**

$$3200 = -5t^2 + 240t$$

$$5t^2 - 240t + 3200 = 0$$

$$t^2 - 48t + 640 = 0$$

no hay solución real

**(d)** Cada altura a la que llega la bala es alcanzada dos veces, una vez en su ascenso y una vez en su descenso. La única excepción es el punto más alto de su trayectoria, que se alcanza una sola vez. Esto significa que para el valor más alto de $h$, la siguiente ecuación tiene sólo una solución para $t$:

$$h = -5t^2 + 240t$$

$$5t^2 - 240t + h = 0 \qquad \text{Alterne al lado izquierdo}$$

Esto a su vez significa que el discriminante $D$ de la ecuación es 0, de modo que

$$D = (-240)^2 - 4(5)h = 0$$

$$57600 - 20h = 0$$

$$h = 2880$$

La máxima altura alcanzada es 2880 metros