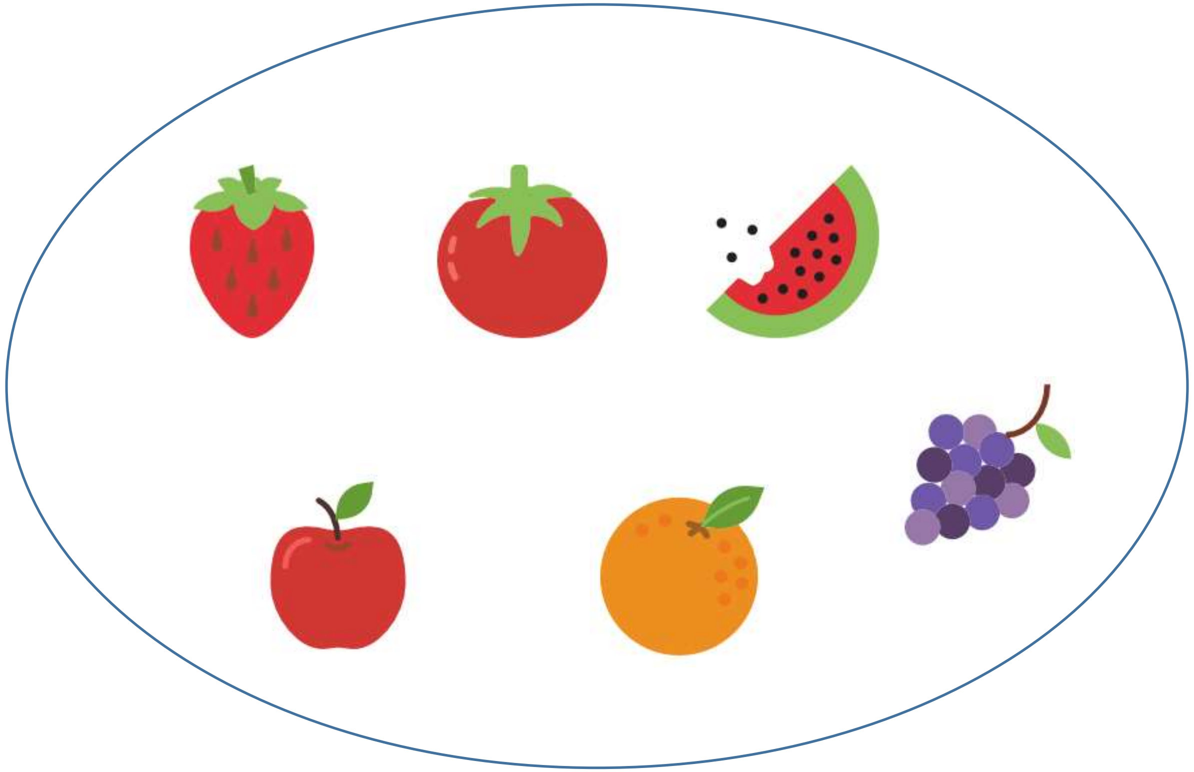
Los Números

Conjuntos

Un conjunto es una colección de objetos bien definidos.

Ejemplo: conjunto de frutas



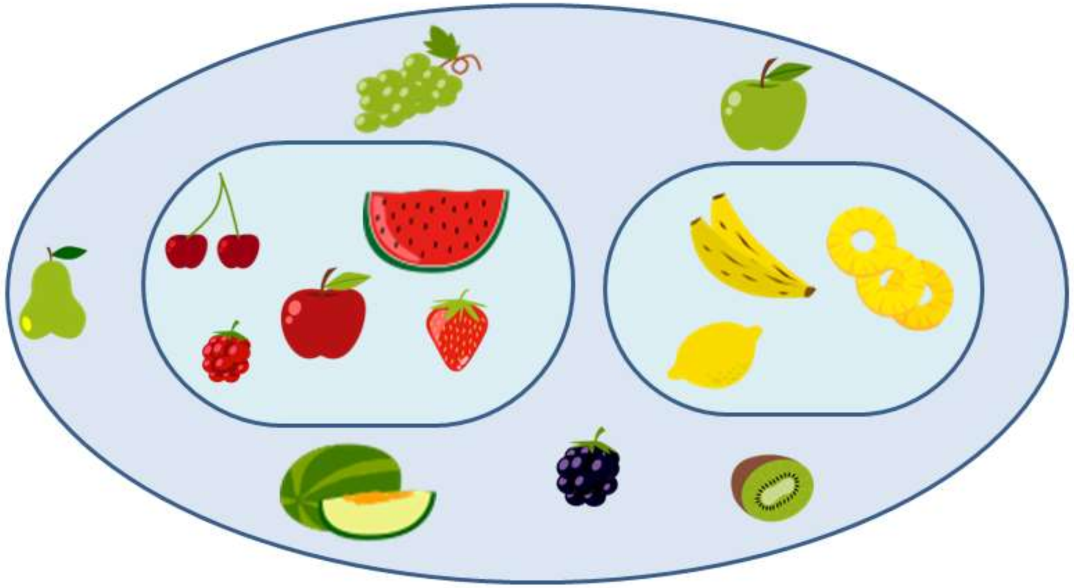
$$F = \{ x \mid x \text{ es una fruta} \}$$

$\in$	Pertenece
$\notin$	No pertenece

? F

? F

SUBCONJUNTOS:



$$A \subseteq B$$

¿Cuántos subconjuntos tiene?

Sea A el conjunto A= $\{a, b, c\}$.

0 elementos	**1 elementos**	**2 elementos**	**3 elementos**
$\varnothing$	$\{a\}, \{b\}, \{c\}$	$\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}$	$\{a, b, c\}$

Cardinalidad de un conjunto

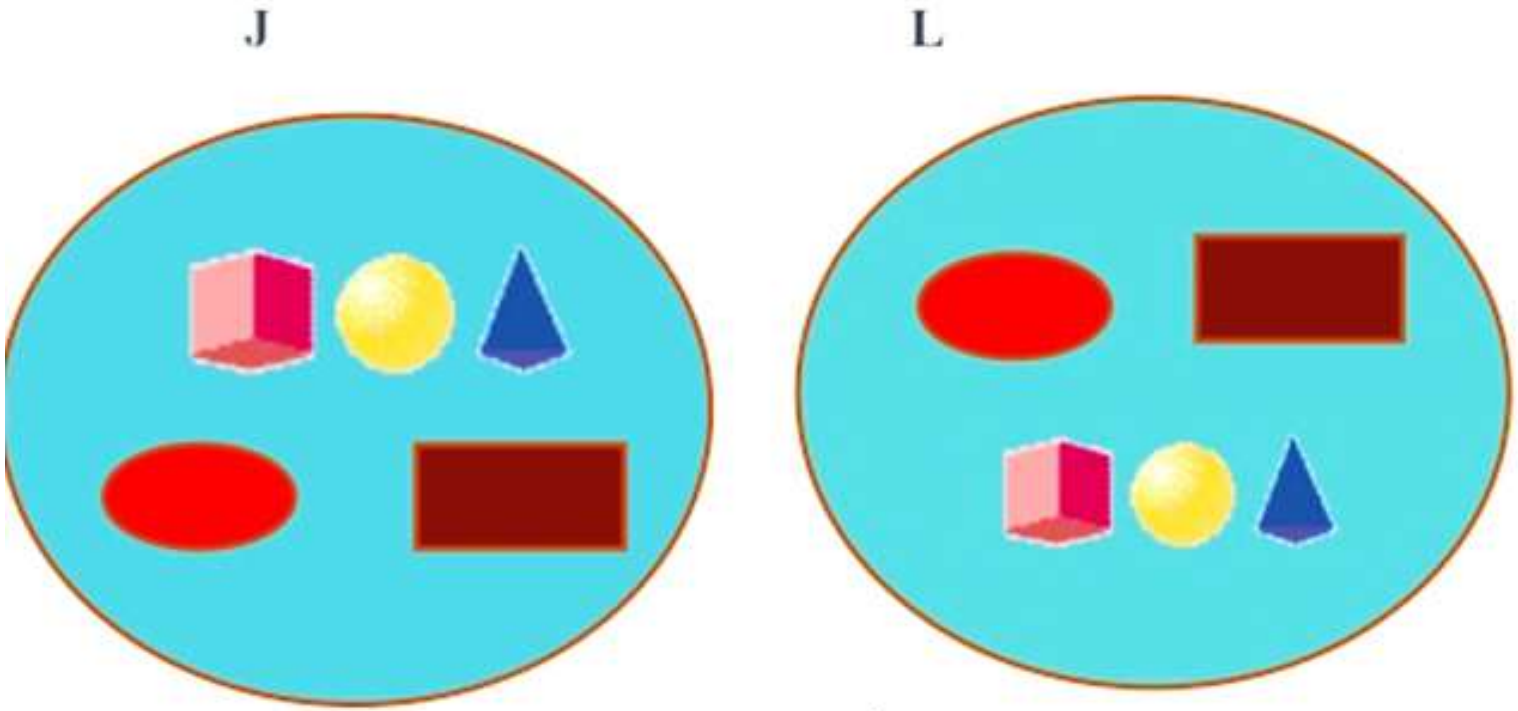
Sea **B**= {1,2,3,...25}

$$n(\mathrm{B}) = 25 \qquad n(\varnothing) = 0$$

Si A es un conjunto de n elementos , A tiene 2^n subconjuntos

Por ejemplo, el conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ tiene $2^5 = 32$ subconjuntos

Dos conjuntos A y B son iguales, $A = B.$, si y solo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$

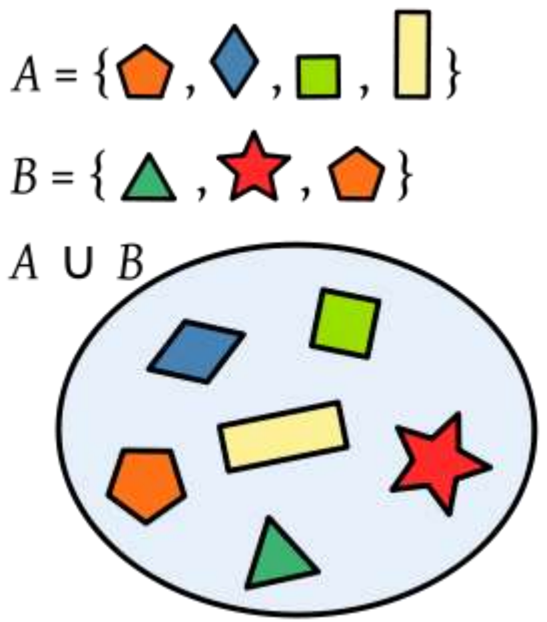


J = {cuadrado, elipse, triángulo, círculo, rectángulo}

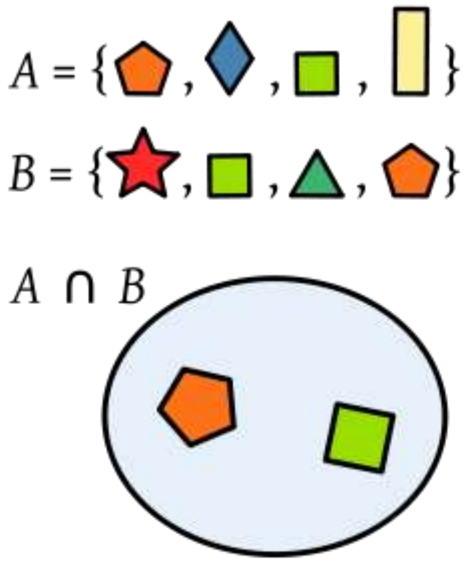
L = {rectángulo, triángulo, círculo, elipse , cuadrado, }

J = L

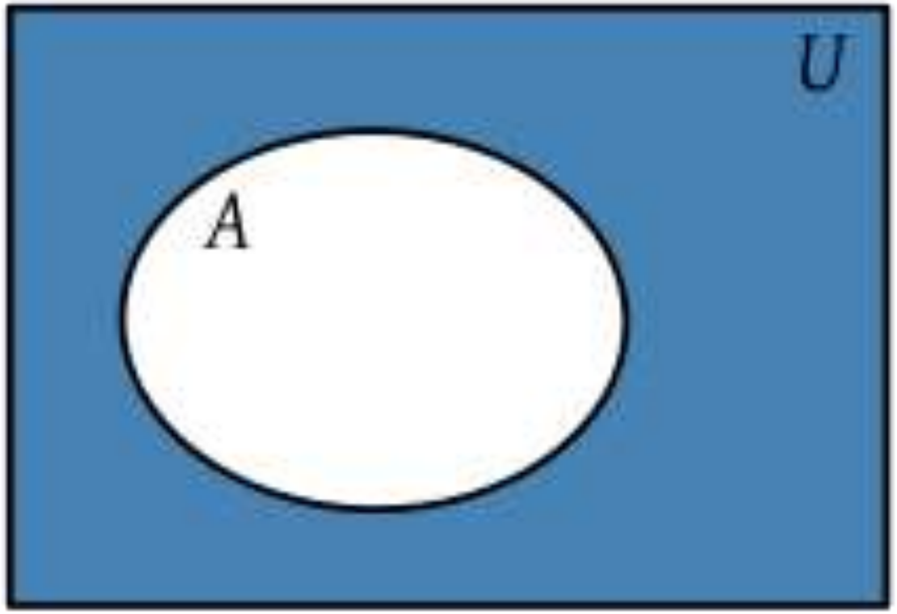
Unión de conjunto



Intersección de conjunto

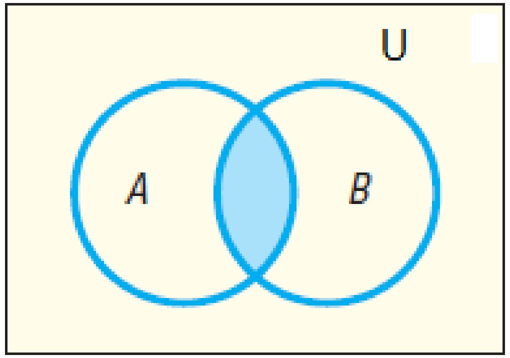


Conjunto universo



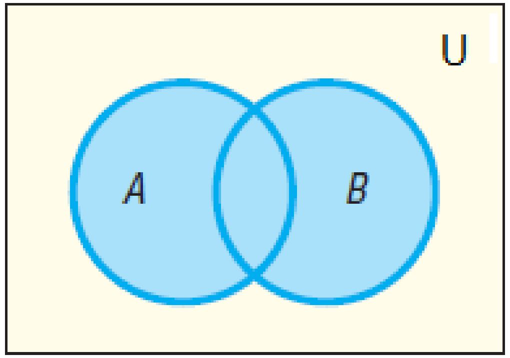
Conjunto vacío

$\emptyset$



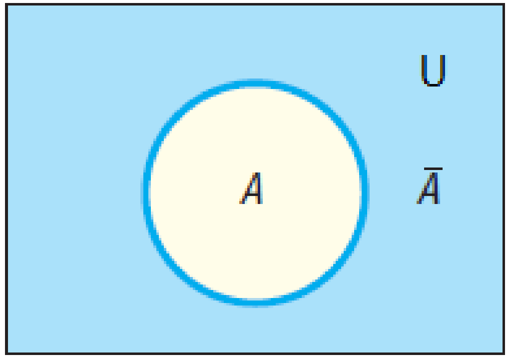
(a) $A \cap B$

Intersección



(b) $A \cup B$

Unión



(c) $\bar{A}$

Complemento

Ejemplo:

Sea $A = \{1, 3, 5, 8\}, B = \{3, 5, 7\}, \quad C = \{2, 4, 6, 8\}.$ determine :

(a) $A \cap B$ (b) $A \cup B$ (c) $B \cap (A \cup C)$

Ejemplo 2

Si $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y si $A = \{1, 3, 5, 7, 9\},$

determine $\overline{A}$

Si A y B son conjuntos finitos,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \qquad \textbf{(1)}$$

Análisis de datos de encuestas

En una encuesta de 100 estudiantes universitarios, 35 estaban tomando Álgebra universitaria, 52 estaban tomando Ciencias de la computación I y 18 estaban tomando ambos cursos.

(a) ¿Cuántos estudiantes estaban tomando Álgebra universitaria o Ciencias de la computación I?

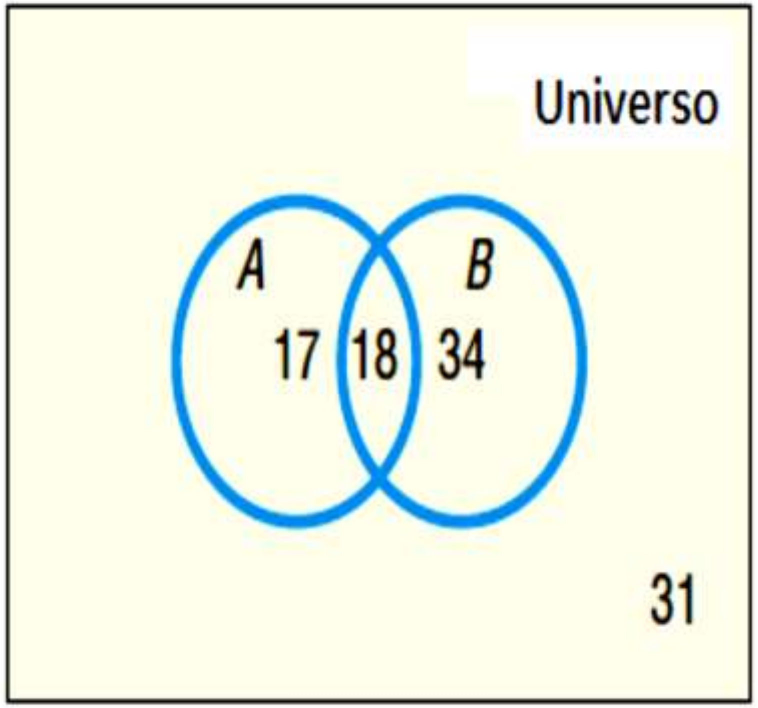
(b) ¿Cuántos no estaban registrados en ningún curso?

Sea

A = conjunto de estudiantes en Álgebra universitaria

B = conjunto de estudiantcs en Ciencias de la computación I

$n(A) = 35 \quad n(B) = 52 \quad n(A \cap B) = 18$



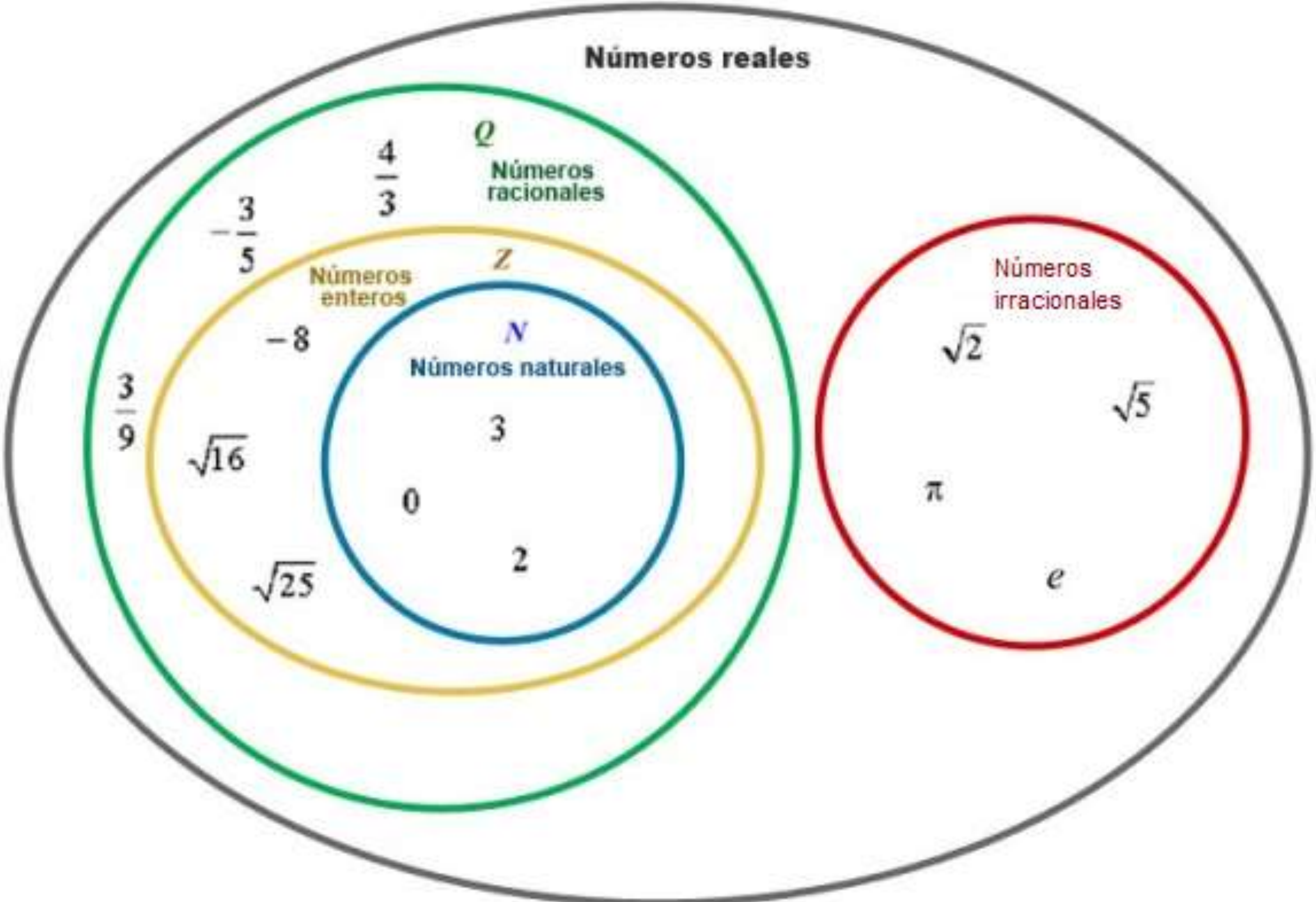
Principio de adición del conteo

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset, \text{ entonces } n(A \cup B) = n(A) + n(B) \qquad \textbf{(2)}$$

Principio Multiplicativo de Conteo

Si una tarea consiste en una sucesión de opciones en donde existen *p* opciones para la primera elección, *q* opciones para la segunda elección, *r* opciones para la tercera elección y así sucesivamente, la tarea de tomar estas elecciones se puede hacer en

$$\boxed{p \cdot q \cdot r \cdot \cdots}$$



Números reales
Q
Números racionales
$\frac{4}{3}$
$-\frac{3}{5}$
Z
Números enteros
-8
$\frac{3}{9}$
$\sqrt{16}$
$\sqrt{25}$
N
Números naturales
3
0
2
Números irracionales
$\sqrt{2}$
$\sqrt{5}$
π
e

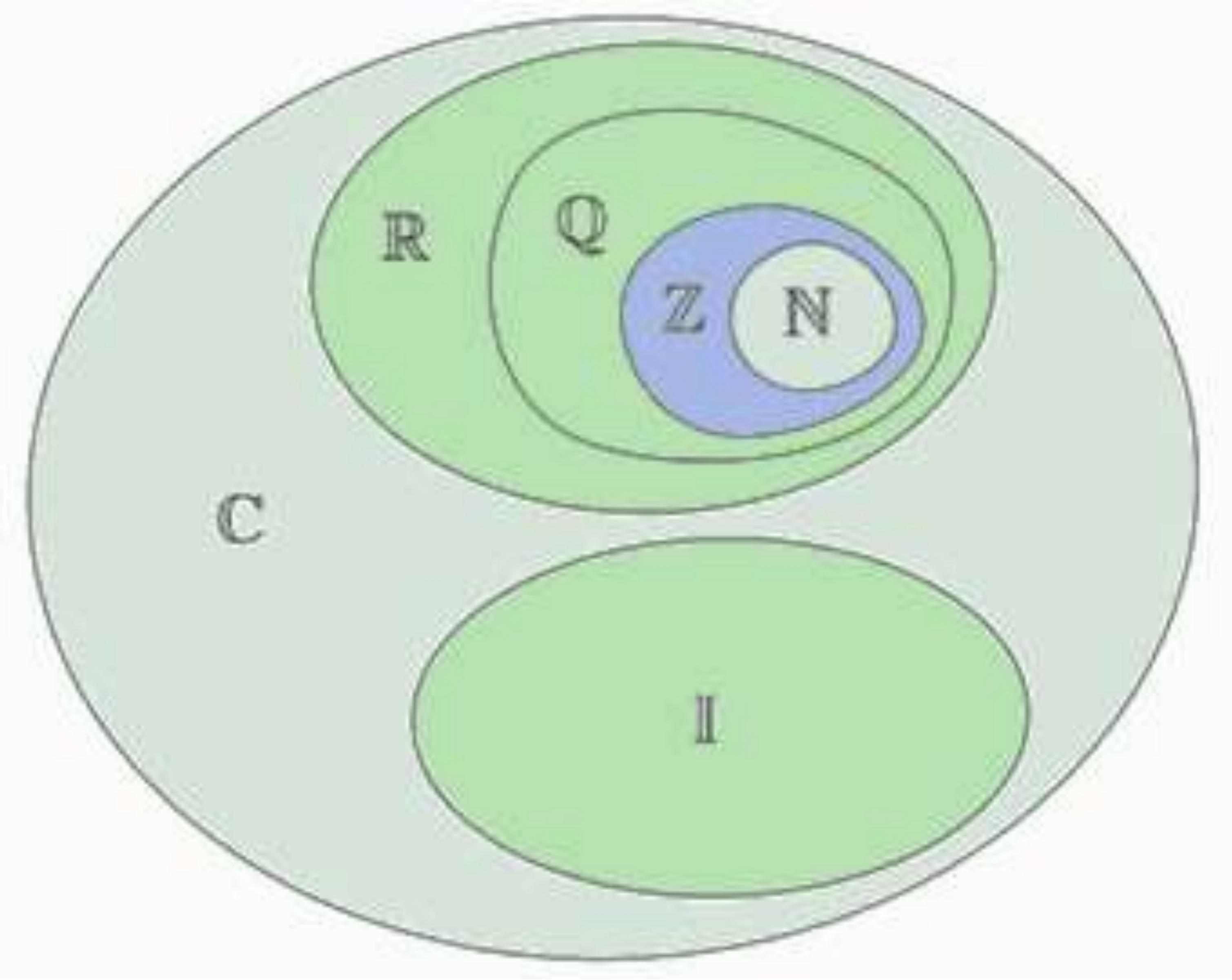
Números naturales

- Definición sin el cero:
  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$
- Definición con el cero:
  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$

Números enteros $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Números racionales $\left\{x \middle| x = \frac{a}{b}, \text{ donde } a, b \text{ son enteros y } b \neq 0\right\}$.

Conjunto	Símbolo	Imagen	Comentarios
Naturales	IN	$\{1,2,3,4,\ldots,\infty\}$	Numeros que usamos "naturalmente" para contar.
Cardinales	INo	$\{0,1,2,3,4,\ldots,\infty\}$	$IN_0 = IN \cup \{0\}$
Enteros	Z	$\{-\infty,\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots,+\infty\}$	$Z^- \cup \{0\} \cup Z^+$
Racionales	Q	$\left\{-\infty,\ldots,\frac{-5}{2},-2,-1,0,1,\frac{3}{2},2,3,\ldots,+\infty\right\}$	$Q = \left\{\frac{a}{b} \; tales\ que\ a, b \epsilon Z, b \neq 0\right\}$
Irracionales	Q*	Los que NO pueden expresarse como fracciones.	Raíces inexactas, π, e, φ
Reales	IR	$IR = Q \cup Q^*$	El contínuo
Imaginarios	II	Emergen de las respuestas a la ecuación: $x^2+1=0$	Números de la forma $ki, i = \sqrt{-1}$
Complejos	C	$C = IR \cup II$	Números de la forma: $a \pm bi$



ℝ
ℚ
ℤ
ℕ
ℂ
𝕀

Propiedades de los números reales

1.- **Propiedad reflexiva:** Todo número siempre es igual a si mismo $a = a.$

2.- **Propiedad simetrica:** Si $a = b$ entonces $b = a$

3.- **Propiedad transitiva:** Si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c.$

4.- **Principio de sustitución:** Si $a = b$ entonces podemos sustituir b por a en cualquier expresión que contenga $a.$

Propiedad Conmutativa

$$a + b = b + a \tag{1a}$$

$$a \cdot b = b \cdot a \tag{1b}$$

Propiedad asociativa

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c \tag{2a}$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c \tag{2b}$$

Propiedad distributiva

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \tag{3a}$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \tag{3b}$$

Propiedad de identidad

$$0 + a = a + 0 = a \tag{4a}$$

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \tag{4b}$$

Inverso aditivo

$$a + (-a) = -a + a = 0 \tag{5a}$$

Inverso multiplicativo (reciproco)

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1 \qquad \text{if } a \neq 0 \tag{5b}$$

Definiciones:

La diferencia $a - b$

$$a - b = a + (-b) \tag{6}$$

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \qquad \text{if } b \neq 0 \tag{7}$$

$$a \cdot 0 = 0 \tag{8}$$

$$\frac{0}{a} = 0 \qquad \frac{a}{a} = 1 \quad \text{if } a \neq 0 \tag{9}$$

Regla de los signos

$$a(-b) = -(ab) \qquad (-a)b = -(ab) \qquad (-a)(-b) = ab$$

$$-(-a) = a \qquad \frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} \qquad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} \tag{10}$$

propiedades de cancelación

$$ac = bc \quad \text{implies} \quad a = b \quad \text{if } c \neq 0$$

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \qquad \text{if } b \neq 0, c \neq 0 \tag{11}$$

Propiedad del producto cero

$$\text{Si} \quad ab = 0, \quad \text{entonces} \quad a = 0, \quad \text{o} \quad b = 0, \quad \text{o ambos} \tag{12}$$

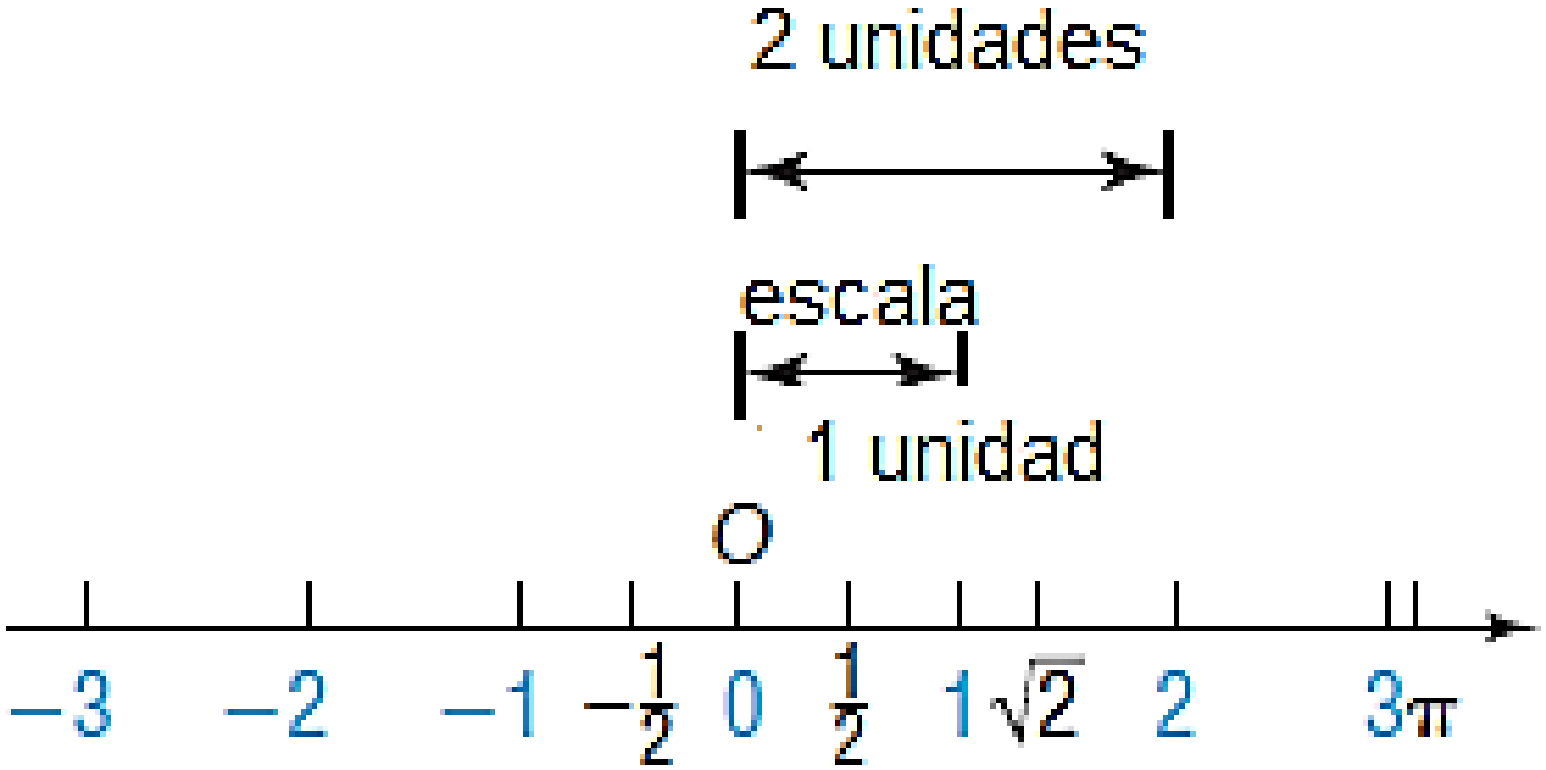
Aritmetica de los cuocientes

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd} \quad \text{si } b \neq 0, d \neq 0 \qquad \textbf{(13)}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \text{si } b \neq 0, d \neq 0 \qquad \textbf{(14)}$$

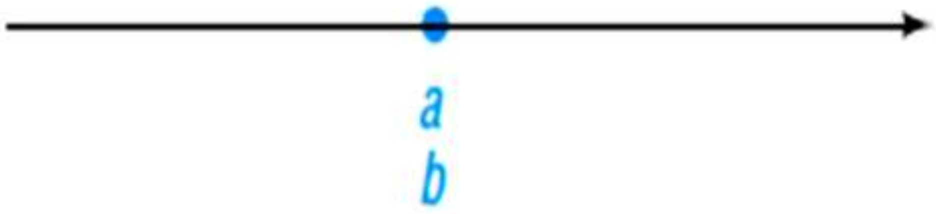
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad \text{si } b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0 \qquad \textbf{(15)}$$

La recta numérica

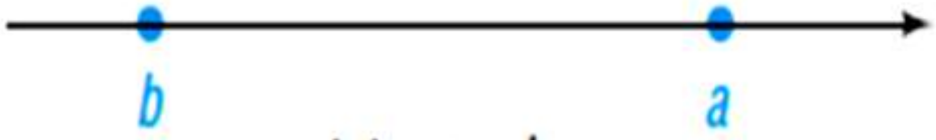


Desigualdades

(a) $a < b$



(b) $a = b$

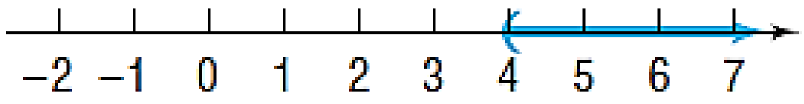


(c) $a > b$

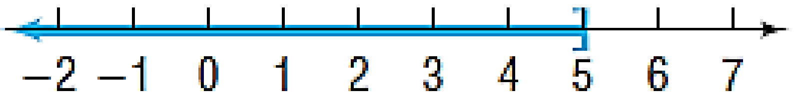
$a > 0$ es equivalente a a positivo

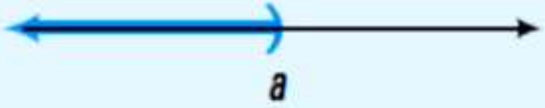
$a < 0$ es equivalente a a negativo

$x > 4.$



$x \leq 5.$



Intervalo	Desigualdad	Gráfica
Intervalo abierto (a, b)	$a < x < b$	
Intervalo cerrado $[a, b]$	$a \le x \le b$	
Intervalo semi abierto $[a, b)$	$a \le x < b$	
Intervalo semi abierto $(a, b]$	$a < x \le b$	
Intervalo $[a, \infty)$	$x \ge a$	
Intervalo (a, ∞)	$x > a$	
Intervalo $(-\infty, a]$	$x \le a$	
Intervalo $(-\infty, a)$	$x < a$	
Intervalo $(-\infty, \infty)$	todos los reales	

Valor absoluto

$$|a| = a \text{ si } a \geq 0 \quad \text{y} \quad |a| = -a \text{ si } a < 0$$

Si *P* y *Q* son dos puntos sobre la recta numérica con coordenadas a y b, respectivamente,entoces la distancia entre *P* y *Q* se denota $d(P, Q)$,

$$d(P, Q) = |b - a|$$

Si a es un número real positivo y si u es cualquier expresión algebraica

$$\boxed{|u| = a \quad \text{es equivalente} \quad u = a \quad \text{or} \quad u = -a \qquad \textbf{(1)}}$$

Resuelva

(a) $|x + 4| = 13$

(b) $|2x - 3| + 2 = 7$

Si a es un número real positivo y si u es cualquier expresión algebraica , entonces

$$|u| < a \quad \text{es equivalente} \quad -a < u < a \qquad \textbf{(2)}$$

$$|u| \leq a \quad \text{es equivalente} \quad -a \leq u \leq a \qquad \textbf{(3)}$$

a) $|2x + 4| \leq 3$

b) $|1 - 4x| < 5$

Si a es un número real positivo y si u es cualquier expresión algebraica , entonces

$$|u| > a \quad \text{es equivalente} \quad u < -a \quad \text{o} \quad u > a \qquad \textbf{(4)}$$

$$|u| \geq a \quad \text{es equivalente} \quad u \leq -a \quad \text{o} \quad u \geq a \qquad \textbf{(5)}$$

Resuelva

$$|2x - 5| > 3$$

Evaluando expresiones algebraicas

$$x + 3 \qquad \frac{3}{1 - t} \qquad 7x - 2y$$

Evaluar cada expresión si $x = 3$ y $y = -1$.

(a) $x + 3y$ (b) $5xy$ (c) $\dfrac{3y}{2 - 2x}$ (d) $|-4x + y|$

Determinando el dominio de una variable

El conjunto de todos los valores que puede asumir una variable de denominia
dominio de la variable

Ejemplo: determine el dominio de la siguiente expresión

$$\frac{5}{x-2}$$

Ejemplo: ¿Cuál es el dominio de la fórmula para la circunferencia de un círculo?

Circunferencia de un círculo. $C = 2\pi r$

Leyes de los exponentes

Si a es un número real y n un entero positivo, entonces el simbolo a^n representa el producto de n factores de a. Esto es :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factors}} \qquad \textbf{(1)}$$

$$a^1 = a.$$

Si $a \neq 0$, definimos

$$a^0 = 1 \quad \text{si } a \neq 0$$

Si $a \neq 0$ y si n es un entero positivo, entonces definimos

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{si } a \neq 0$$

Evaluar las siguientes expresiones

(a) $2^{-3} =$

(b) $x^{-4} =$

(c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} =$

leyes de los exponentes

$$a^m a^n = a^{m+n} \qquad (a^m)^n = a^{mn} \qquad (ab)^n = a^n b^n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}} \text{ si } a \neq 0 \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \text{ si } b \neq 0$$

Usando las leyes de los exponentes

(a) $x^{-3} \cdot x^{5} =$

(b) $(x^{-3})^{2} =$

(c) $(2x)^{3} =$

(d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{4} =$

(e) $\frac{x^{-2}}{x^{-5}} =$

Escriba cada expresión sólo con exponentes positivos

(a) $\dfrac{x^5y^{-2}}{x^3y}$ $\quad x \neq 0, \quad y \neq 0$

(b) $\left(\dfrac{x^{-3}}{3y^{-1}}\right)^{-2}$ $\quad x \neq 0, \quad y \neq 0$

Raíces

$\sqrt[n]{a} = b$ significa $a = b^n$

Si $n \geq 2$ es un entero y a es un número real, tenemos

$\sqrt[n]{a^n} = a$ si $n \geq 3$ es impar

$\sqrt[n]{a^n} = |a|$ si $n \geq 2$ es par

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

(a) $\sqrt[3]{8} =$

(b) $\sqrt[3]{-64} =$

(c) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} =$

(d) $\sqrt[6]{(-2)^6} =$

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

(a) $\sqrt{32} =$

(b) $\sqrt[3]{16} =$

(c) $\sqrt[3]{-16x^4} =$

(d) $\sqrt[4]{\frac{16x^5}{81}} =$

$$\sqrt{x^{2n}} = x^n$$

$\sqrt{x^5} =$

$\sqrt{12y^7} =$ $(y \geq 0)$

$\sqrt{50a^3b^5} =$ $(a \geq 0 \text{ and } b \geq 0)$

$$\sqrt{\frac{a}{c}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}$$

$$\sqrt{\frac{5}{7}} =$$

$$\sqrt{\frac{a}{c}} =$$

racionalizando denominadores

(a) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ (b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ (c) $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}, \quad x \geq 0$

Si a es un número real $n \geq 2$ es un número entero , entonces

$$\boxed{a^{1/n} = \sqrt[n]{a}}$$

si $\sqrt[n]{a}$ existe

(a) $4^{1/2} =$

(b) $8^{1/2} =$

(c) $(-27)^{1/3} =$

(d) $16^{1/3} =$

POLINOMIOS

Un polinomio en la variable x es una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales, y n es un entero no negativo. Si $a_n \neq 0$, entonces el polinomio tiene **grado** n. Los monomios $a_k x^k$ que conforman el polinomio reciben el nombre de **términos** del polinomio.

Polinomio	Tipo	Términos	Grado
$2x^2 - 3x + 4$	trinomio	$2x^2, -3x, 4$	2
$x^8 + 5x$	binomio	$x^8, 5x$	8
$3 - x + x^2 - \frac{1}{2}x^3$	cuatro términos	$-\frac{1}{2}x^3, x^2, -x, 3$	3
$5x + 1$	binomio	$5x, 1$	1
$9x^5$	monomial	$9x^5$	5
6	monomial	6	0

▼ Suma y resta de polinomios

Sumamos y **restamos** polinomios usando las propiedades de números reales que vimos en la Sección 1.1. La idea es combinar **términos semejantes** (esto es, términos con las mismas variables elevados a las mismas potencias) usando la Propiedad Distributiva. Por ejemplo,

$$5x^7 + 3x^7 = (5 + 3)x^7 = 8x^7$$

EJEMPLO 1 | Suma y resta de polinomios

(a) Encuentre la suma $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x)$.

(b) Encuentre la diferencia $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x)$.

▼ Multiplicación de expresiones algebraicas

Para hallar el **producto** de polinomios o de otras expresiones algebraicas, es necesario usar repetidamente la Propiedad Distributiva. En particular, usándola tres veces en el producto de dos binomios, obtenemos

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Esto dice que multiplicamos los dos factores al multiplicar cada término de un factor por cada término del otro factor y sumamos estos productos. Esquemáticamente, tenemos

$$(a + b)(c + d) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{F}}}{ac} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{O}}}{ad} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{I}}}{bc} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L}}}{bd}$$

EJEMPLO 2 | Multiplicación de binomios usando FOIL

$$(2x + 1)(3x - 5) = \underset{\text{F}}{6x^2} - \underset{\text{O}}{10x} + \underset{\text{I}}{3x} - \underset{\text{L}}{5}$$ Propiedad Distributiva

$$= 6x^2 - 7x - 5$$ Combine términos semejantes

Ejemplos

a) $(2x^3)\cdot(5x^4) =$

b) $(2x+5)(x^2-x+2) =$

c) $(2x+1)(3x+4) =$

Productos Notables

$$(x - a)(x + a) = x^2 - a^2 \qquad \textbf{(2)}$$

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \qquad \textbf{(3a)}$$

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2 \qquad \textbf{(3b)}$$

$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 \qquad \textbf{(4a)}$$

$$(x - a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 \qquad \textbf{(4b)}$$

$$(x - a)(x^2 + ax + a^2) = x^3 - a^3 \qquad \textbf{(5)}$$

$$(x + a)(x^2 - ax + a^2) = x^3 + a^3 \qquad \textbf{(6)}$$

dividendo divisor

$842 : 15 =$ $\left(\frac{842}{15} \right)$

cuociente

$$\begin{array}{l} 842 : 15 = 56 \\ \underline{75} \\ 09 \\ \ \ 92 \\ \ \ \underline{90} \\ \ \ \ 2 \end{array}$$

resto

Dividendo= divisor · cuociente + resto

$842 = 15 \times 56 + 2$

$$\frac{842}{15} = 56 + \frac{2}{15}.$$

División de polinomios

dividendo

divisor

$3x^3 + 4x^2 + x + 7$ dividido por $x^2 + 1$

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 3x^3 + 4x^2 + x + 7 & x^2 + 1 \quad = 3x + 4 \\
\hline
\text{restamos} & 3x^3 \qquad\quad 3x & \\
\hline
 & 4x^2 - 2x + 7 & \\
\text{restamos} & 4x^2 \qquad\quad + 4 & \\
\hline
 & -2x + 3 &
\end{array}
$$

$$\frac{3x^3 + 4x^2 + x + 7}{x^2 + 1} = 3x + 4 + \frac{-2x + 3}{x^2 + 1}$$

Otro ejemplo:

$x^4 - 3x^3 + 2x - 5$ dividido por $x^2 - x + 1$

cuociente

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^4 - 3x^3 + 2x - 5 & x^2 - x + 1 \quad = \boxed{\boxed{x^2} - 2x - 3} \\
\hline
\text{restar} & x^4 - x^3 + x^2 & \\
\cline{2-2}
 & \boxed{-2x^3 - x^2 + 2x - 5} & \\
\text{restar} & -2x^3 + 2x^2 - 2x & \\
\cline{2-2}
 & -3x^2 + 4x - 5 & \\
\text{restar} & -3x^2 + 3x - 3 & \\
\cline{2-2}
 & \boxed{x - 2} & \\
 & \text{resto} &
\end{array}
$$

resultado

$$\boxed{\frac{x^4 - 3x^3 + 2x - 5}{x^2 - x + 1} = x^2 - 2x - 3 + \frac{x - 2}{x^2 - x + 1}}$$

Polinomios en dos variables

$$2xy^3, \quad x^2y^2, \quad \text{y} \quad x^3y$$

$3x^2 + 2x^3y + 5$

grado 4

$\pi x^3 - y^2$

grado 3

$x^4 + 4x^3y - xy^3 + y^4$

grado 4

Factorizando Polinomios

$$(2x + 3)(x - 4) = 2x^2 - 5x - 12$$

Polinomio	Factor común	Facror remanente	Forma factorizada
$2x + 4$	2	$x + 2$	$2x + 4 = 2(x + 2)$
$3x - 6$	3	$x - 2$	$3x - 6 = 3(x - 2)$
$2x^2 - 4x + 8$	2	$x^2 - 2x + 4$	$2x^2 - 4x + 8 = 2(x^2 - 2x + 4)$
$8x - 12$	4	$2x - 3$	$8x - 12 = 4(2x - 3)$
$x^2 + x$	x	$x + 1$	$x^2 + x = x(x + 1)$
$x^3 - 3x^2$	x^2	$x - 3$	$x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3)$
$6x^2 + 9x$	$3x$	$2x + 3$	$6x^2 + 9x = 3x(2x + 3)$

FÓRMULAS ESPECIALES DE FACTORIZACIÓN

Fórmula	Nombre
1. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$	Diferencia de cuadrados
2. $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$	Cuadrado perfecto
3. $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$	Cuadrado perfecto
4. $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$	Diferencia de cubos
5. $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$	Suma de cubos

Ejemplos

1) $x^2 - 4$

2) $x^3 - 1$

3) $x^3 + 8$

4) $x^4 - 16$

5) $x^2 + 6x + 9$

6) $9x^2 - 6x + 1$

7) $25x^2 + 30x + 9$

Factorizar un polinomio de segundo grado $: x^2 + Bx + C$

$(x + 3)(x + 4) =$

En general:

$$\boxed{x^2 + Bx + C = (x + a)(x + b)}$$

$ab = C$ $\quad$ $a + b = B.$

Ejemplos:

1) $x^2 + 7x + 10$

2) $x^2 - 6x + 8$

3) $x^2 - x - 12$

Factorizando en grupos

1) $(x^2 + 2)x + (x^2 + 2)\cdot 3 \quad =$

2) $3(x - 1)^2(x + 2)^4 + 4(x - 1)^3(x + 2)^3 \quad =$

3) $x^3 - 4x^2 + 2x - 8 \quad =$

Factorizando un polinomio de segundo grado de la forma:

$$Ax^2 + Bx + C, A \neq 1$$

Paso 1: encontrar AC

Paso 2: encontrar un par de enteros cuyo producto es AC y su suma es B.
Esto es $ab = AC$ y $a + b = B$

Paso 3: escribir: $Ax^2 + Bx + C = Ax^2 + ax + bx + C.$

Paso 4: Factorizar en grupo la última expresión

Ejemplos:

Factorice las sigiuentes expresiones

$$2x^2 + 5x + 3$$

$$2x^2 - x - 6$$

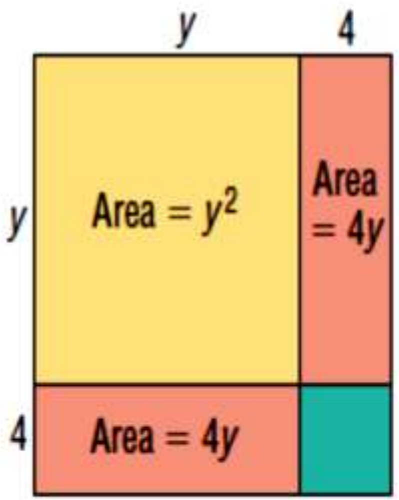
Completando el cuadrado

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2 \qquad \text{o} \qquad x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 \quad \text{o} \quad x^2 - bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2$$

Ejemplo:

$$y^2 + 8y + 16 =$$



Expresiones racionales

(a) $\dfrac{x^3 + 1}{x}$ (b) $\dfrac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 5}$ (c) $\dfrac{x}{x^2 - 1}$ (d) $\dfrac{xy^2}{(x - y)^2}$

Reducir una expresión racional

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 2} =$$

(a) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 + x} \cdot \dfrac{4x^2 + 4}{x^2 + x - 2}$

(b) $\dfrac{\dfrac{x + 3}{x^2 - 4}}{\dfrac{x^2 - x - 12}{x^3 - 8}} =$

(c) $\dfrac{2x^2 - 4}{2x + 5} + \dfrac{x + 3}{2x + 5}$

(d) $\dfrac{x}{x - 3} - \dfrac{3x + 2}{x - 3}$

(e) $\dfrac{x - 3}{x + 4} + \dfrac{x}{x - 2}$

(f) $\dfrac{x^2}{x^2 - 4} - \dfrac{1}{x}$

Método del mínimo común múltiplo (MCM)

a) $$\frac{x}{x^2 + 3x + 2} + \frac{2x - 3}{x^2 - 1}$$

b) $$\frac{3}{x^2 + x} - \frac{x + 4}{x^2 + 2x + 1}$$

Simplificar expresiones racionales

a) $$\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$$

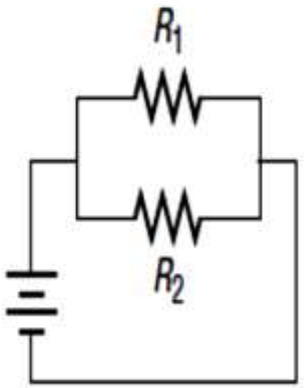
b) $$\frac{\frac{x^2}{x^2-4}-3}{\frac{x-3}{x+2}-1}$$

c) $$\frac{\frac{x^2}{x-4}+2}{\frac{2x-2}{x}-1}$$

d) $$\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{x}}{\frac{x+3}{4}}=$$

Aplicación:

Resistencias en paralelo



$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1}$$

Si $R_1 = 6$ y $R_2 = 10$, entonces

$$R = \frac{6 \cdot 10}{10 + 6} = \frac{60}{16} = \frac{15}{4} \quad \text{ohms}$$

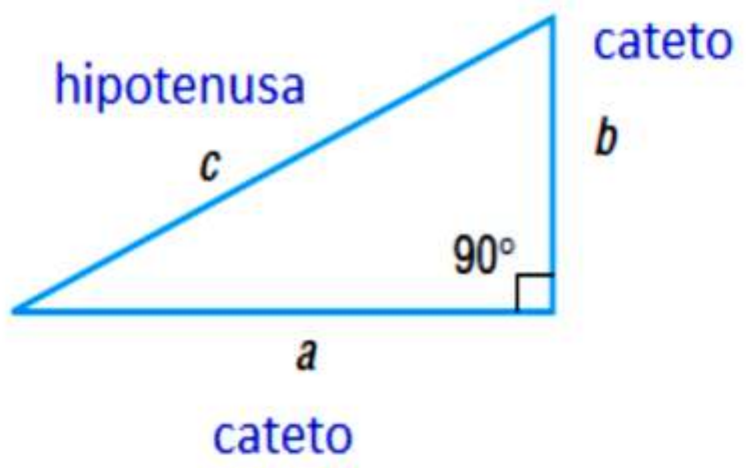
Simplificando expresiones que contienen exponentes racionales.

(a) $(x^{2/3}y)(x^{-2}y)^{1/2}$

(b) $\left(\dfrac{2x^{1/3}}{y^{2/3}}\right)^{-3}$

(c) $\left(\dfrac{9x^{2}y^{1/3}}{x^{1/3}y}\right)^{1/2}$

Teorema de Pitágoras



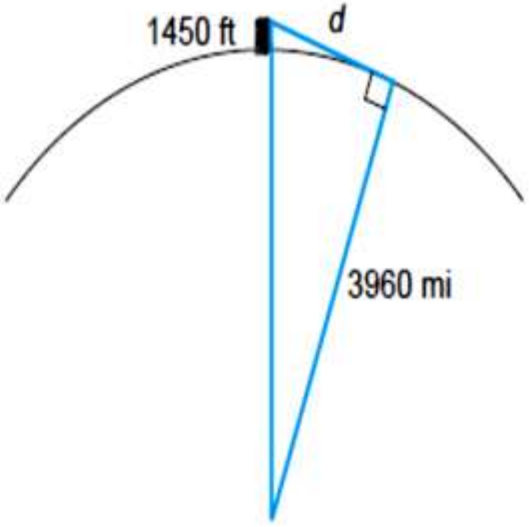
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

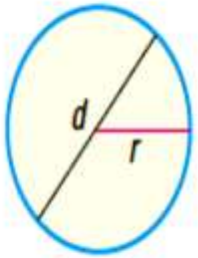
1) En un triángulo rectángulo, un cateto tiene una longitud de 4 y el otro de 3. ¿Cuál es la longitud de la hipotenusa?

2) Demuestra que un triángulo cuyos lados miden 5, 12 y 13 de longitud es un triángulo rectángulo. Identifica la hipotenusa.

El edificio más alto del mundo es el Burj Khalifa en Dubái, Emiratos Árabes Unidos mide 2717 pies y tiene 160 pisos. La torre de observación está a 1450 pies sobre e nivel del suelo. ¿Qué tan lejos puede ver una persona (con ayuda de un telescopio desde la torre de observación? Para el radio de la Tierra usa 3690 millas.

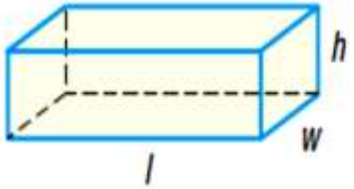
Fuente Wikipedia 2010





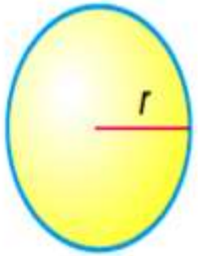
Para un círculo de radio r (diámetro $d = 2r$),

Area $= \pi r^2$ circunferencia $= 2\pi r = \pi d$



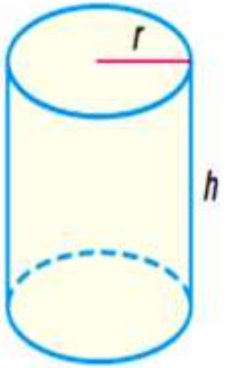
Para una caja rectángular de largo l, ancho w, y altura h,

volumen $= lwh$ Area $= 2lh + 2wh + 2lw$



Para una esfera de radio r,

volumen $= \frac{4}{3}\pi r^3$ Area $= 4\pi r^2$

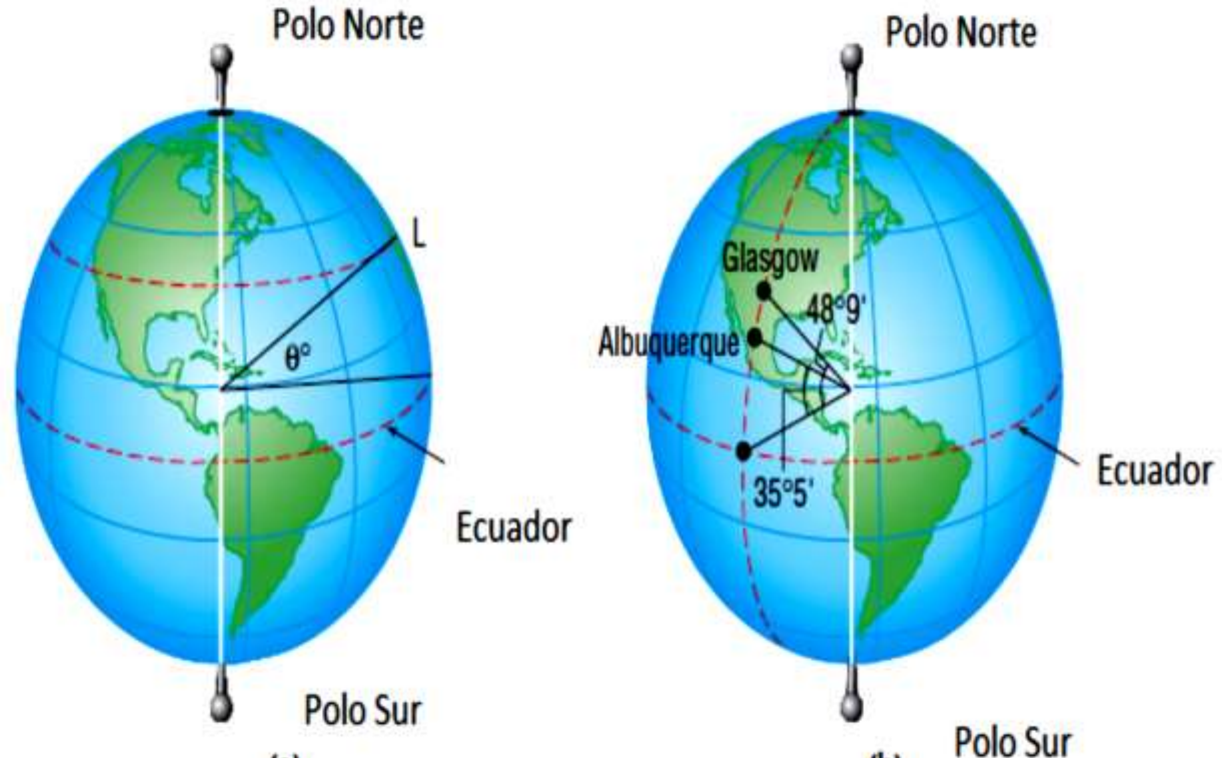


Para un cilindro de altura h y radio r,

volumen $= \pi r^2 h$ Area $= 2\pi r^2 + 2\pi rh$

Determinar la distancia entre dos ciudades

La latitud de un lugar L es la medida del ángulo formado por un rayo que se traza del centro de la Tierra al Ecuador y otro rayo que se traza del centro de la Tierra a L. Ver figura 13(a). Glasgow, Montana, está al norte de Albuquerque, Nuevo México. Determina la distancia entre Glasgow (48°9′ latitud norte) y Albuquerque (35°5′ latitud norte). Ver figura 13(b). Considera que el radio de la Tierra es de 3960 millas.



(a) (b)

$$48°9' - 35°5' = 13°4'.$$

$$s = r\theta.$$

$$\theta = 13°4' \approx 13.0667° = 13.0667 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ radian} \approx 0.228 \text{ radian}$$

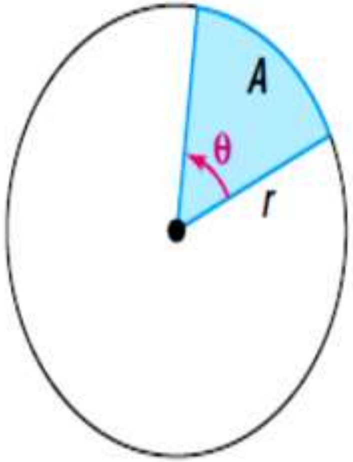
$$4' = 4\left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$$

$\theta = 0.228$ $\quad r = 3960$ miles $\quad s = r\theta = 3960 \cdot 0.228 \approx 903$ miles

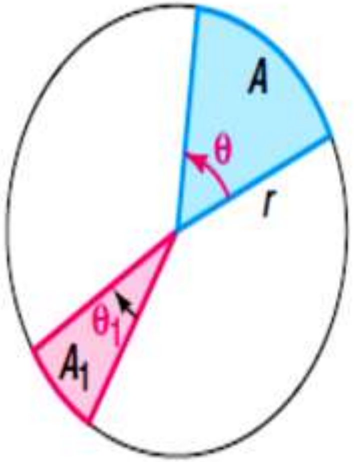
Área de un sector

El área A del sector de un círculo de radio r formado por un ángulo central de θ radianes es

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta \tag{8}$$



$$\frac{\theta}{\theta_1} = \frac{A}{A_1}$$



Considera que un objeto se mueve alrededor de un círculo de radio *r* con una velocidad constante. Si *s* es la distancia recorrida en el tiempo *t* alrededor de este círculo, entonces la **velocidad lineal** *v* del objeto se define como

$$v = \frac{s}{t} \tag{9}$$

La **velocidad angular** ω (la letra griega omega) de este objeto es el ángulo θ (medido en radianes) barrido, dividido entre el tiempo *t* transcurrido, esto es,

$$\omega = \frac{\theta}{t} \tag{10}$$

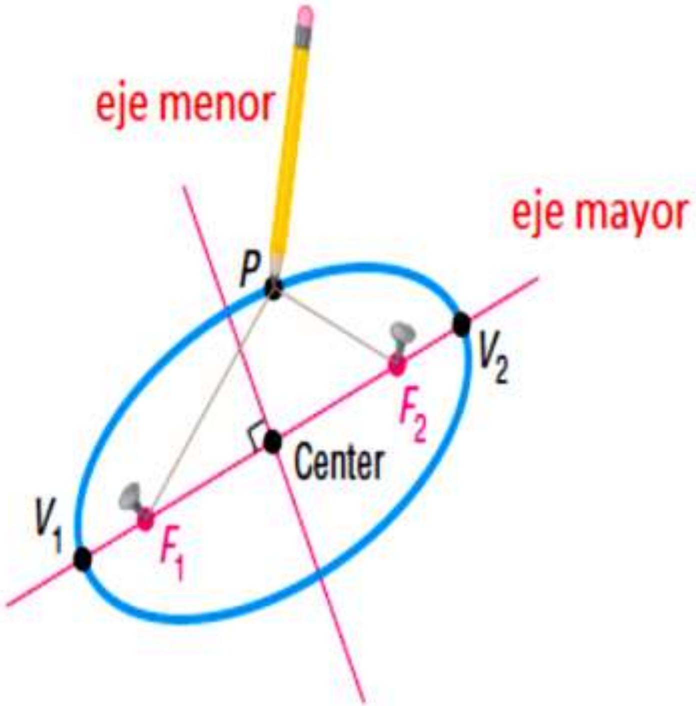
Existe una importante relación entre la velocidad lineal y la velocidad angular:

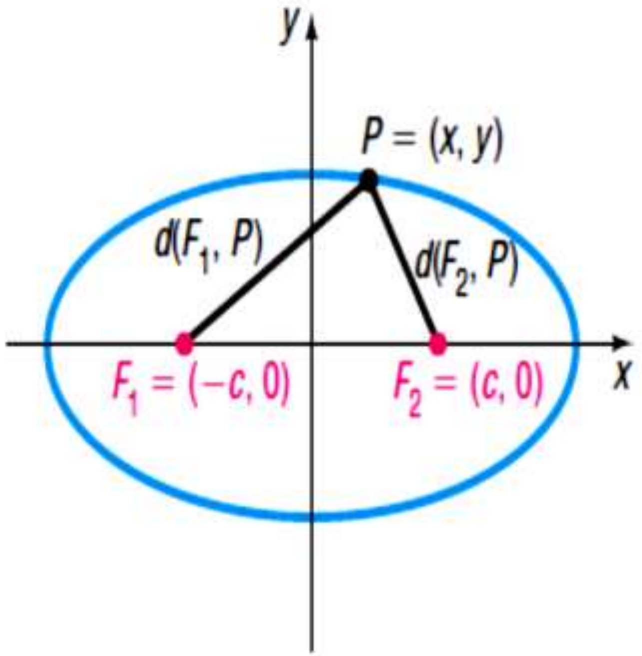
$$v \underset{(9)}{=} \frac{s}{t} \underset{s\,=\,r\theta}{=} \frac{r\theta}{t} = r\left(\frac{\theta}{t}\right) \underset{(10)}{=} r \cdot \omega$$

$$\boxed{v = r\omega \qquad \textbf{(11)}}$$

donde ω se mide en radianes por unidad de tiempo.

Una **elipse** es la colección de todos los puntos en el plano para los cuales, la suma de las distancias a dos puntos fijos, llamados **focos,** es una constante.





$$
\begin{aligned}
d(F_1, P) + d(F_2, P) &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
(x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
&\quad + (x-c)^2 + y^2 \\
x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
&\quad + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\
4cx - 4a^2 &= -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
cx - a^2 &= -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
(cx - a^2)^2 &= a^2[(x-c)^2 + y^2] \\
c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \\
(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2c^2 - a^4 \\
(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2)
\end{aligned}
$$

$$d(F_1, P) + d(F_2, P) > d(F_1, F_2)$$

$$2a > 2c$$

$a > c > 0,$ ⇨ $a^2 > c^2$, so $a^2 - c^2 > 0$. Sea $b^2 = a^2 - c^2, b > 0.$ ⇨ $a > b$

⇩

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$