FM1003-1 Matemáticas III: Límites y Derivadas
Profesor: Felipe Matus D.
Auxiliar: Daniel Neira O. Matias Romero Y.

Auxiliar 13: Aplicaciones de la Derivadas

23 de enero de 2019

Resumen Clase

- Crecimiento: Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivable
  - f es creciente en (a,b) si y solo si
  $$\forall x\in(a,b), f'(x)\geq 0$$
  - f es decreciente en (a,b) si y solo si
  $$\forall x\in(a,b), f'(x)\leq 0$$
- Punto crítico: Sea f derivable en (a,b), decimos que $x_0\in(a,b)$ es un punto crítico de f si $f'(x_0)=0$.
- Máx/Mín: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ y $x_0\in[a,b]$
  - x_0 es máximo local de f si
  $(\exists\varepsilon>0):(\forall x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)), f(x_0)\geq f(x)$
  - x_0 es mínimo local de f si
  $(\exists\varepsilon>0):(\forall x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)), f(x_0)\leq f(x)$
  - x_0 es máximo global de f si
  $$\forall x\in[a,b], f'(x_0)\geq f(x)$$
  - x_0 es mínimo global de f si
  $$\forall x\in[a,b], f'(x_0)\leq f(x)$$

  Obs: Un máximo/mínimo global es un máximo/mínimo local, pero no necesariamente al revés.
- Sea f derivable en (a,b), si x_0 es mínimo o máximo local de f, entonces es un punto crítico.

P1. Estudie el crecimiento de las siguientes funciones y encuentre máximos o mínimos si es que existen.

a) $f(x)=e^{-x^2}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

c) $f(x)=\dfrac{x}{\ln(x^2)}$

d) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

P2. Supongamos que disponemos de un trozo de cartón cuadrado de lado 10 para la confección de una caja, de manera que para construirla debemos recortar las esquinas en cuadrados de lado x (como en la figura). El problema es encontrar el valor de x tal que el volumen de la caja sea máximo.

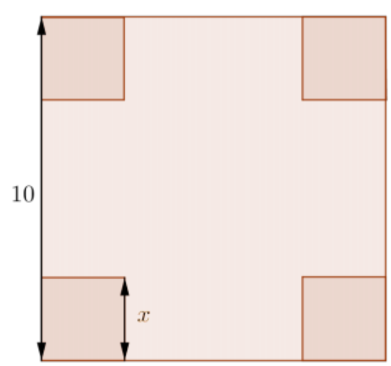

Figura 1: Ejemplo de la caja

P3. Un agricultor tiene 2400 metros de material y quiere construir una cerca para tener un campo rectangular que bordea un río recto, de modo que no necesita cercar el lado hacia el río. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener el campo para encerrar la mayor área?

P4. Encuentre la superficie máxima que puede tener una ventana rectangular coronada por una semicircunferencia tal que el perímetro de la figura sea 12 metros.

P5. El beneficio neto mensual, en millones de euros, de una empresa que fabrica autobuses viene dado por la función:

$$B(x) = 1{,}2x - (0{,}1x)^3$$

donde x es el número de autobuses fabricados en un mes. Calcule la producción mensual que hacen máximo el beneficio.

P6. Derive:

a) $f(x) = 10^{\sqrt{x}}$

b) $g(x) = e^{3-x^2}$

c) $h(x) = 3^{2x^2} \cdot \sqrt{x}$

d) $x(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2}$

e) $j(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2}$

f) $k(x) = \ln(2x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x)$

g) $m(x) = \ln(\sqrt[3]{\dfrac{3x}{x+2}})$

h) $n(x) = \sqrt[4]{x^5 - x^3 - 2}$