FM1003-3 Matemáticas III: Límites y Derivadas
Profesor: Felipe Matus D.
Auxiliar: Daniel Neira O. Matias Romero Y.

Para estudiantes de Educación Básica y Media.
UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 11: Continuidad y Teoremas

21 de enero de 2019

Resumen Clase

- Límite en un punto: Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$, sea $x_0 \in A$, $\forall x \in A$, se define el límite según la caracterización $\epsilon - \delta$ como sigue:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l :=$$
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - l| < \epsilon)$$
- Límites laterales: Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$, sea $x_0 \in A$, $\forall x \in A$, se definen los límites laterales de una función como sigue:
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) :=$$
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(x - x_0 < \delta) \Rightarrow (f(x) - f(x_0) < \epsilon)$$
y
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) :=$$
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(x_0 - x < \delta) \Rightarrow (f(x_0 - f(x)) < \epsilon)$$
- Nota: si
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x)$$
- Continuidad en un punto: Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$, sea $x_0 \in A$, $\forall x \in A$, se define la continuidad en un punto como sigue:
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$$
- Continuidad de funciones: Si $\forall x \in A$ se cumple la continuidad en un punto, entonces $f(x)$ es continua.

P1. Estudie la continuidad de las siguientes funciones y determine si se puede reparar en caso de no ser continua.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{3x} & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

P2. Considere la función $f(x) = x(1 + e^{-\frac{1}{x}})$ Calcule, si es que existen los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ *b)* $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ *c)* $\lim_{x \to 0} f(x)$

P3. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $(\exists L \in \mathbb{R}^+)(\forall x_1.x_2 \in \mathbb{R})|f(x_1) - f(x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2|$ demuestre que f es continua.

P4. Demuestre que la ecuación
$$e^x \cos(x) + 1 = 0$$
tiene infinitas soluciones reales.
Hint: Considere intervalos de la forma $[k\pi, (k+1)\pi)$, con $k \in \mathbb{N}$

P5. Sean f y g dos funciones continuas en $[a, b]$ tal que $f(x) < g(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$. Probar que existe $\lambda > 0$ tal que $f(x) + \lambda \leq g(x)$.

P6. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que:

a) $\forall x, y \in \mathbb{R}: f(x + y) = f(x) + f(y)$

b) f es continua en 0

Demuestre que:

i) f es continua

ii) $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = xf(1)$

P7. Estudie la continuidad de $f(x) = \frac{5}{x^4-16}$ mediante límites laterales.

P8. estudie la continuidad de $f(x) = \frac{x+1}{|x|}$.