

FM1003-3 Matemáticas III: Límites y Derivadas

Profesor: Felipe Matus.

Auxiliar: Daniel Neira, Matias Romero.



Auxiliar 9: Límites

17 de enero de 2019

- Límites al infinito: sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ diremos que $f(x) \rightarrow l$ cuando $x \rightarrow \infty$ si se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l :=$$

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in A, x \geq m)(|f(x) - l| \leq \epsilon)$$

- Límite en un punto: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$, sea $x_0 \in A$, $\forall x \in A$, se define el límite según la caracterización $\epsilon - \delta$ como sigue:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l :=$$

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - l| < \epsilon)$$

- Álgebra de límites: sean f y g funciones tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l_1$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = l_2$

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + g(x) = l_1 + l_2$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - g(x) = l_1 - l_2$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot g(x) = l_1 \cdot l_2$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2} \text{ (siempre que } g(x) \text{ y } l_2 \neq 0)$$

$$5. (\text{con } \lim_{x \rightarrow \infty} \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot l_1 \text{ (con } \lambda \in \mathbb{R}))$$

- Teorema del Sándwich: Sean $f, g, h : \mathbb{A} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones. Si $g(x)$ y $h(x)$ tienden a l cuando x tiene a ∞ , y además $\exists m \in \mathbb{R}$ tal que:
 $(\forall x \geq m) g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
 entonces se cumple que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

P1. Demuestre los siguientes límites por definición:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x-1} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^2) = -\infty$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} 2x + 3 = 5$$

P2. Calcule usando álgebra de límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 9}{x - 3} \right)^3$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{x} = 2$$

P3. Encuentre el valor de los siguientes límites (si es que existen).

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$$

$$c) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a}$$

P4. Usando el Teorema del Sandwich calcule:

Hint: Para la b) asuma conocido que $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ para todo $a > 0$.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{7x + 5x + 3x}$$

P5. Para

$$f(x) = e^{1/x} \cdot \frac{(1-x)^2}{(x-2)}$$

Determinar:

- a)* Dominio, ceros y signos.
- b)* Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
- c)* Estudie los puntos importantes y de discordia para finalmente bosquejar el gráfico.