



FM1003-3 Matemáticas III: Límites y Derivadas

Profesor: Felipe Matus D.

Auxiliar: Daniel Neira O. Matías Romero Y.

Auxiliar 7: Funciones III

15 de enero de 2019

Resumen Clase

- Inyectividad: Sea $f : A \rightarrow B$. f es inyectiva cuando $(\forall x, y \in A) x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
- Sobreyectividad: Sea $f : A \rightarrow B$. f es sobreyectiva cuando $(\forall y \in B)(\exists x \in A) y = f(x)$
- Biyectividad: Sea $f : A \rightarrow B$. f es biyectiva cuando es inyectiva y sobreyectiva a la vez.
- Ceros: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Los ceros son el conjunto $Z(f) = \{x \in \text{Dom}(f) | f(x) = 0\}$
- Crecimiento: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $B \subseteq A$. Diremos que en B
 - f es creciente $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
 - f es decreciente $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
 - f es estrictamente creciente $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
 - f es estrictamente decreciente $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
 - Además, si $A = B$ diremos que f es monótona creciente o decreciente según corresponda
- Paridad: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 - f es par $\Leftrightarrow (\forall x \in A) f(-x) = x$
 - f es impar $\Leftrightarrow (\forall x \in A) f(-x) = -x$
- Función Periódica: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. f es periódica $\Leftrightarrow p > 0$ tal que $(\forall x \in A)(x + p) \in A$ y $(\forall x \in A) f(x + p) = f(x)$

P1. Analice el crecimiento de la función cúbica $f(x) = x^3$.

Hint: Recuerde la descomposición de la diferencia de cubos $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

P2. Considere la función f definida por

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - |x|}$$

- a) Encuentre dominio, ceros, paridad, signos de f .
- b) Estudie el crecimiento de la función f , indicando, si corresponde, en qué intervalos la función es creciente y en cuáles es decreciente.

P3. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por partes como:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 9 & \text{si } x < -2 \\ x^2 - 3 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- a) Grafique la función.
- b) Identifique sus ceros.
- c) Analice si la función es inyectiva y epiyectiva (sobreyectiva).

P4. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ una función dada por:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

- a) Determine el dominio de f .
- b) Demuestre que f es par.
- c) A partir de lo anterior, determine el máximo conjunto A donde f es función y el conjunto B de modo que f sea biyectiva
- d) Determine la función inversa
- e) Grafique.

P5. Dada la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 - 4x - 5$$

Determine los ceros, mínimos y máximos en caso de existir, intersección con el eje Y , dominio e imagen. Bosqueje la función y determine crecimiento, paridad, sobreyectividad, inyectividad.

P6. Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = (x - 4)(x + 2)$. Esboce el gráfico de:

- | | | |
|----------------|------------------------|---------------------|
| a) $f(x)$ | d) $f(x)$ | g) $ f(x) $ |
| b) $f(x - 2)$ | e) $ f(x) $ | h) $f(x - 2)$ |
| c) $5f(x - 2)$ | f) $\frac{1}{2} f(x) $ | i) $f(x - 2) + 5$ |

P7. Un proyectil se lanza desde un acantilado, que se encuentra a 90 metros sobre el nivel del mar. Si la altura del proyectil está dada por:

$$h(x) = -10x^2 + 80x + 90$$

donde x es la distancia horizontal, medida desde el borde del acantilado.

- a) Calcule la altura máxima que alcanza el proyectil.
- b) ¿A qué distancia del acantilado el proyectil toca el agua?
- c) Grafique la trayectoria del proyectil, indicando los puntos más relevantes.

P8. Grafique para $a < 0$ y para $a \geq 0$:

a) $f(x) = (x - a)^2 + a$

b) $f(x) = \sqrt{x - a}$

c) $f(x) = e^{x+a} - a$

d) $f(x) = \ln(x + a)$

e) $f(x) = |x + a| - |a|$

f) $f(x) = [x - a] - a$

P9. Un jardinero quiere construir y cercar un prado que tenga forma de un sector circular (forma de pizza). Si para cercarlo tiene 20m de alambre, ¿qué radio debería tener el sector para que el prado sea lo más grande posible

P10. El número de manzanas producidas por cada árbol en una plantación de manzanos depende de la densidad de los árboles plantados. Si n árboles son plantados en una hectárea de tierra, entonces cada árbol produce $900 - 9n$ manzanas. ¿Cuántos árboles deben ser plantados por hectárea para obtener el máximo rendimiento de manzanas?

P11. Dados α y $\beta \in \mathbb{R}$, sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha & \text{si } x \geq 0 \\ x + \beta & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

a) Demuestre que f es sobreyectiva si y sólo si $\alpha \leq \beta$

b) Demuestre que f es inyectiva si y sólo si $\alpha \geq \beta$

P12. Considere la función

$$f(x) = e^x + e^{-x}$$

Pruebe que esta función satisface la identidad:

$$f(x + y) \cdot f(x - y) = f(2x) + f(2y)$$