

FM1003-3 Matemáticas III: Límites y Derivadas

Profesor: Felipe Matus D.

Auxiliar: Daniel Neira O. Matías Romero Y.



Auxiliar 6: Funciones II

14 de enero de 2019

Resumen Clase

- Inyectividad: Sea  $f : A \rightarrow B$ .  $f$  es inyectiva cuando  $(\forall x, y \in A) x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
- Sobreyectividad: Sea  $f : A \rightarrow B$ .  $f$  es sobreyectiva cuando  $(\forall y \in B)(\exists x \in A) y = f(x)$
- Biyectividad: Sea  $f : A \rightarrow B$ .  $f$  es biyectiva cuando es inyectiva y sobreyectiva a la vez.
- Ceros: Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Los ceros son el conjunto  $Z(f) = \{x \in \text{Dom}(f) | f(x) = 0\}$
- Crecimiento: Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $B \subseteq A$ . Diremos que en  $B$ 
  - $f$  es creciente  $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
  - $f$  es decreciente  $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
  - $f$  es estrictamente creciente  $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
  - $f$  es estrictamente decreciente  $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
  - Además, si  $A = B$  diremos que  $f$  es monótona creciente o decreciente según corresponda
- Paridad: Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 
  - $f$  es par  $\Leftrightarrow (\forall x \in A) f(-x) = x$
  - $f$  es impar  $\Leftrightarrow (\forall x \in A) f(-x) = -x$
- Función Periódica: Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  es periódica  $\Leftrightarrow p > 0$  tal que  $(\forall x \in A)(x + p) \in A$  y  $(\forall x \in A) f(x + p) = f(x)$

P1. Considere los siguientes ocho diagramas, que representan relaciones entre los conjuntos  $A = \{a, b, c, d, e\}$  y  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

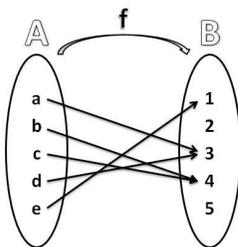


Figura 1: (a)

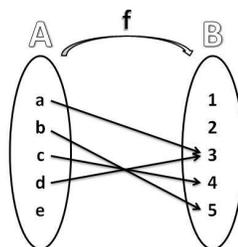


Figura 2: (b)

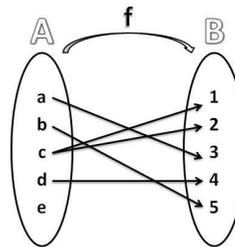


Figura 3: (c)

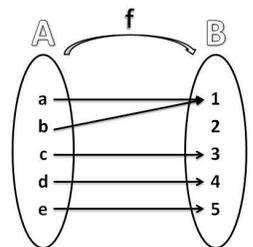


Figura 4: (d)

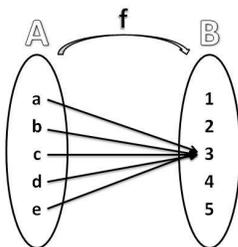


Figura 5: (e)

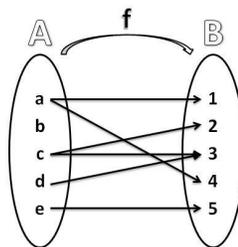


Figura 6: (f)

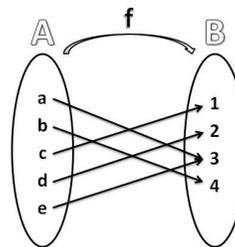


Figura 7: (g)

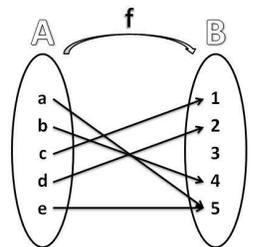


Figura 8: (h)

- ¿Cuáles de ellos no representan una función?
- Para los diagramas que sí representan funciones, indique el recorrido de cada función representada.
- Para los diagramas (a) y (h):
  - ¿Existen elementos del dominio que compartan una misma imagen?
  - ¿Cuál es la preimagen de 4 en cada caso?
  - ¿Todos los elementos de  $B$  poseen preimagen?
- Para los diagramas que representen funciones, clasifíquelos en inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

**P2.** Estudie inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de las siguientes funciones:

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$
- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
- $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{2x^2 - 5x + 4}$
- $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t(x) = x^3 + 1$

**P3.** Considere  $f(x) = x + \frac{1}{x}$

- Estudie el dominio, ceros y paridad de  $f$ .
- Demuestre que  $f$  es decreciente en  $(0, 1)$  y creciente en  $]1, +\infty[$ .
- Pruebe que  $f : ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  es inyectiva.
- Muestre que  $f : [1, \infty[ \rightarrow [2, \infty[$  es biyectiva y calcule  $f^{-1}$ .

**P4.** Para  $a, b \in \mathbb{R}$  se defina la función  $f_{a,b}(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por la fórmula:

$$f_{a,b}(x) = ax + b, x \in \mathbb{R}$$

- Demuestre que  $f_{1,b} \circ f_{a,0} = f_{a,b}$
- Si  $a \neq 0$ , demuestre que  $f_{a,b}$  es biyectiva y determine  $f_{a,b}^{-1}$
- Si  $a \neq 0$ , determine  $p, q \in \mathbb{R}$  tales que  $f_{a,b} \circ f_{p,q} = f_{b,a}$

**P5.** Considere la función  $\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$ . Determine cotas inferiores y superiores.

**P6.** Sea  $f(x) = \frac{|x| + 1}{|x| - 1}$

- Determine dominio, ceros, paridad y periodicidad de  $f$
- Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f$
- Bosqueje el gráfico de  $f$  y determine su recorrido

**P7.** Sea  $f(x) = 6x^2 - x - 5$ . Determine paridad, ceros, crecimiento, inyectividad, sobreyectividad y cuando corresponda, la inversa de las siguientes funciones:

- $g(x) = f(f(x))$
- $g(x) = f(x + 1)$
- $g(x) = f(|x|)$
- $g(x) = |f(x - 1)|$
- $g(x) = f(f(x + 1) - f(|x|))$