FM1003-3 Matemáticas III: Límites y Derivadas
Profesor: Felipe Matus D.
Auxiliar: Daniel Neira O. Matías Romero Y.

Auxiliar 3: Conjuntos

9 de enero de 2019

Recuerdo

- **Definiciones**
- Pertenencia: $x \in A$, si x es un elemento dentro del conjunto A.
- Conjunto Vacío (ϕ): Conjunto sin elementos definido lógicamente por $(\forall x)(x \notin \phi)$.
- Conjunto Universo ($\mathcal{U}$): Conjunto que tiene todos los elementos que estamos considerando, definido lógicamente por $(\forall x)(x \in \mathcal{U})$.
- Subconjunto ($\subseteq$): $A \subseteq B$ si $(\forall x \in \mathcal{U})[x \in A \Rightarrow x \in B]$.
- Diferencia Simétrica ($\triangle$): $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
- Producto Cartesiano ($\times$): $A \times B = \{(x, y) \,|\, x \in A \wedge y \in B\}$
- **Propiedades Básicas**
- $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.
- $A \setminus B = A \cap B^c$.
- $A \triangle B \Leftrightarrow (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

P1. [Problema Coordinado]
Verdadero o Falso. Corrija las falsas.

(1) Una definición formal del conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ es $(\forall x \in \mathcal{U})[x \ \in A \Leftrightarrow (x = 1 \wedge x = 2 \wedge x = 3)]$

(2) Sea $A = \{\phi\}$.
  (i) $(\exists x)(x \in A)$
  (ii) $\phi \in A$
  (iii) $\{\phi\} \in A$
  (iv) $\{\phi\} \subseteq A$

(3) Sea $B = \{\{\phi\}\}$. $(\phi \subseteq B) \ \wedge (\phi \in B)$

(4) Sea C distinto de vació, la proposición $(\exists x \in \mathcal{U})(x \in \phi \Rightarrow x \in C)$ es verdadera.

(5) El conjunto $A = \{a, \{1, 2, 3\}\}$ tiene 2 elementos.

P2. *a*) Sean $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$. Demuestre que

$$(A \cap B) \subseteq (C \cap D)$$

b) Sean X, C, D conjuntos. Demuestre que

$$X \subseteq C \wedge X \subseteq D \Leftrightarrow X \subseteq (C \cap D)$$

P3. [Problema Coordinado] Probar que

$$(A \cap X = A \cap Y) \wedge (A \cup X = A \cup Y) \Rightarrow X = Y$$

P4. Sean $A, B \subseteq E$, $C, D \subseteq F$. Demuestre que

a) $A \times F \subseteq E \times F$.

b) $(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$. Muestre con un ejemplo que la inclusión en el otro sentido no es siempre verdadera.

P5. [**Problema Coordinado**] Demuestre las siguientes propiedades:

a) $A \triangle B = B \triangle A$

b) $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$

c) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B^c = \phi$

d) $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$

e) $(A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c) = A^c \cup B$

f) $(A \cap C = \phi) \Rightarrow (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

g) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$

P6. Sean A, B subconjuntos de un mismo universo $\mathcal{U}$ y $C = (A \cup B)^c$. Probar que:

$$(A \triangle B) \triangle C = A \cup B \cup C \Leftrightarrow A \cap B = \phi.$$

P7. Sean A, B, C subconjuntos de U (conjunto universo). Demuestre que:

(i) $A \Delta A = \phi$

(ii) $A \Delta \phi = A$

(iii) Utilizando lo anterior, demuestre que:

$$A \Delta B = C \Rightarrow A \Delta C = B$$

Indicación: Recuerde que Δ cumple las propiedades de conmutatividad y asociatividad.

P8. a) Sean A, B dos conjuntos no-vacios demuestre que:

$$A \cap B = \phi \Leftrightarrow (A \cup B) \setminus B = A$$

b) Sean A, B dos conjuntos no-vacíos, encuentre un conjunto X que verifique las siguientes ecuaciones:

$$A \cup X = A \cup B \quad \wedge \quad A \cap X = \phi$$

P9. Sea B un subconjunto del universo $\mathcal{U}$, demuestre que:

$$[(\forall A \subseteq U)(A \cup B = A)] \Rightarrow (B = \phi)$$

P10. Sea A un conjunto no vacío. Para $B \subseteq A \times A$ y $a \in A$ fijo se define

$$B(a) := \{x \in A \,|\, (x, a) \in B\} \subseteq A.$$

Pruebe que

a) $(B^c)(a) = (B(a))^c$.

b) $(B \cup C)(a) = B(a) \cup C(a)$.