FM1003-1 Matemáticas III: Límites y Derivadas
Profesor: Leonardo Sánchez.
Auxiliar: Patricio Yáñez. Sebastián López.

Para estudiantes de Educación Básica y Media.
UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 14: ESTE ES EL BYE BYE :(

24 de enero de 2019

Resumen Clase

- Crecimiento: Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivable
  - f es creciente en (a,b) si y solo si
  $$\forall x \in (a,b), f'(x) \geq 0$$
  - f es decreciente en (a,b) si y solo si
  $$\forall x \in (a,b), f'(x) \leq 0$$
- Punto crítico: Sea f derivable en (a,b), decimos que $x_0 \in (a,b)$ es un punto crítico de f si $f'(x_0) = 0$.
- Máx/Mín: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in [a,b]$
  - x_0 es máximo local de f si
  $(\exists \varepsilon > 0) : (\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)), f(x_0) \geq f(x)$
  - x_0 es mínimo local de f si
  $(\exists \varepsilon > 0) : (\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)), f(x_0) \leq f(x)$
  - x_0 es máximo global de f si
  $$\forall x \in [a,b], f'(x_0) \geq f(x)$$
  - x_0 es mínimo global de f si
  $$\forall x \in [a,b], f'(x_0) \leq f(x)$$

  Obs: Un máximo/mínimo global es un máximo/mínimo local, pero no necesariamente al revés.
- Sea f derivable en (a,b), si x_0 es mínimo o máximo local de f, entonces es un punto crítico.

P1. Sea $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

a) Determine dominio, recorrido, ceros, signos y paridad de f

b) Encuentre, si existen, asíntotas verticales y horizontales

c) Estudie el crecimiento de f y determine máximos y mínimos de f

d) Esboce el gráfico de f

e) Estudie la inyectividad y sobreyectividad de la función $f : A \to \mathbb{R}$. ¿Bajo qué condiciones f sería biyectiva?

P2. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + x & \text{si } x \geq 0 \\ e^x + 7x + 3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Encuentre $a \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $\mathbb{R}$.

P3. Derive las siguientes funciones

a) $f(x) = 3\ln(x+3) + \sqrt[4]{x^2 - x} + \cos\left(\frac{3x}{2}\right)$

b) $f(x) = e^{tg(x^3)}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 3x^2 + 4x - 10}{5x^2 - 1}$

P4. Estudie completamente la función $f(x) = 1 + xe^{\frac{1}{x}}$. Se pide:

P5. Dominio, continuidad y estudiar, si existen, puntos de discontinuidad reparable.

P6. Asintotas horizontales, verticales y oblicuas, si las hay.

P7. Calcule $f'(x)$ y determine intervalos de crecimiento, máximos y mínimos.

P8. Bosqueje el gráfico de f e indique recorrido.

Considere la función $f(x) = \frac{x^2}{(1+e^x)(x-1)}$. Calcule los siguientes límites, e interprete el significado geométrico de cada uno de ellos:

1. $\lim_{x \to 1^+} f(x)$
2. $\lim_{x \to \infty} f(x)$
3. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

Considere la función:

$$f(x) = \frac{x}{ln(x^2)}$$

1. Analice continuidad, reparando donde corresponda.
2. Calcule $f'(x)$ para $x \neq 0$ y, si es posible $f'(0)$, analice crecimientos. Encuentre máximos y mínimos.

Considere

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(x-ax)}{x} & \text{si } x < 0 \\ b(x-a) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{sen(ax-a)}{ln(x)} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. ¿Para qué valores de x esta función es continua independiente de los valores de a, b? ¿Por qué?
2. Encuentre los valores de a, b para los cuales la función es continua en $\mathbb{R}$

   Indicación: $\lim_{x \to 0} \frac{sen(ax)}{ax} = 1$