FM1003-3 Matemáticas III: Límites y Derivadas
Profesor: Leonardo Sanchez.
Auxiliar: Sebastián López. Patricio Yañez.

Auxiliar 12: Derivadas

22 de enero de 2019

Resumen Clase

- Función derivable en x_o: Diremos que $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es derivable en el punto $x_o\in(a,b)$ si existe el límite:

$$f'(x_o)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

O equivalentemente:

$$f'(x_o)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

- Función derivable: Diremos que una función $f:(a,b)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es derivable, si es derivable para todo $x_o\in(a,b)$
- Derivadas conocidas: Algunos resultados típicos son:
  - $(x)'=1$
  - $(x^n)'=nx^{n-1}$
  - $(sin(x))'=cos(x)$
  - $(cos(x))'=-sin(x)$
  - $(ln(x))'=\frac{1}{x}$
  - $(e^x)'=e^x$
  - $(cte)'=0$
- Reglas de derivación: Se obtienen a partir de las propiedades de los límites:
  - $(f+g)'(x_o)=f'(x_o)+g'(x_o)$
  - $(f\cdot g)'(x_o=f'(x_o)g(x_o)+f(x_o)g'(x_o))$
  - $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o)=\frac{f'(x_o)g(x_o)-f(x_o)g'(x_o)}{(g(x_o)^2}$

P1. Considere las funciones

$$cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$tanh(x)=\frac{sinh(x)}{cosh(x)}$$

a) Derive $cosh(x)$.

b) Derive $sinh(x)$.

c) Use lo anterior para obtener la derivada de $tanh(x)$. (use reglas de derivadas para fracciones)

P2. Considere la función:

$$f(x)=\frac{x}{ln(x^2)}$$

a) Analice continuidad, reparando donde corresponda.

b) Calcule $f'(x)$ para $x\neq 0$ y, si es posible $f'(0)$, analice crecimientos. Encuentre máximos y mínimos.

Indicación: puede serle de ayuda la siguiente desigualdad conocida

$$1-\frac{1}{x}\leq ln(x)\leq x-1,\forall x\geq 0$$

P3. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes propiedades:

a) $\forall\ a,b\in\mathbb{R},\ f(a+b)=f(a)+f(b)+a^2b+ab^2$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$

Haga lo siguiente:

i) Demuestre que $f(0)=0$ y deduzca que f es impar

ii) Calcule $f'(0)$

iii) Calcule $f'(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$

P4. Considere la función $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $h(x)=x^7+4x^3-3$, demuestre que existe un único real $x_o\in[0,1]$ tal que $h(x_o)=0$

P5. Sea f la siguiente función:

$$f(x)=x^3+2x^2-15x$$

Encuentre intervalos de crecimiento, máximos y mínimos locales y trafique.

P6. Deduzca la ecuación de la recta tangente

a) a la parábola $y=x^2-8x+9$ en el punto $(3,-6)$.

b) al gráfico de la función $f(x)=\ln x+x^3$ en el punto (x_0,y_0).

P7. Sea

$$g(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & \text{si } x\leq 0\\ -x^2+ax+b & \text{si } x>0\end{cases}$$

Encuentre a y b para que g sea derivable en todo $\mathbb{R}$ y calcule su derivada. ¿Es $g'(x)$ continua en $\mathbb{R}$? ¿Es derivable? $g'(x)$?