

## FM1003-1 Matemáticas III: Límites y Derivadas

Profesor: Leonardo Sánchez.

Auxiliar: Patricio Yañez. Sebastián Lòpez.

Auxiliar 11:  $\epsilon - \delta$  y continuidad

21 de enero de 2019

Resumen Clase

- Límite en un punto: Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ , sea  $x_0 \in A$ ,  $\forall x \in A$ , se define el límite según la caracterización  $\epsilon - \delta$  como sigue:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l :=$$

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - l| < \epsilon)$$

- Límites laterales: Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ , sea  $x_0 \in A$ ,  $\forall x \in A$ , se definen los límites laterales de una función como sigue:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) :=$$

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(x - x_0 < \delta) \Rightarrow (f(x) - f(x_0) < \epsilon)$$

y

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) :=$$

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(x_0 - x < \delta) \Rightarrow (f(x_0) - f(x) < \epsilon)$$

- Nota: si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

- Continuidad en un punto: Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ , sea  $x_0 \in A$ ,  $\forall x \in A$ , se define la continuidad en un punto como sigue:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$$

- Continuidad de funciones: Si  $\forall x \in A$  se cumple la continuidad en un punto, entonces  $f(x)$  es continua.

**P1.** Considere la función  $f(x) = x(1 + e^{-\frac{1}{x}})$  Calcule, si es que existen los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

**P2.** Usando sólo la definición de derivada, hallar las derivadas de las siguientes funciones.

a)  $f(x) = \sqrt{x}$

c)  $f(x) = \ln(x)$

b)  $f(x) = \frac{1}{x}$

d)  $f(x) = 5(x + a)^3, a \in \mathbb{R}$

**P3.** Utilizando las reglas de derivación calcule las derivadas de las siguientes funciones,

a)  $y = 5x^3 - 2x$

c)  $y = (a + x)\sqrt{a - x}$

b)  $y = \frac{x^p}{x^m - a^m}$

d)  $y = e^x \ln x$

**P4.** sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función tal que:

a)  $\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x + y) = f(x) + f(y)$

b)  $f$  es continua en 0

Demuestre que:

i)  $f$  es continua

ii)  $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = xf(1)$

**P5.** Estudie la continuidad de  $f(x) = \frac{5}{x^4-16}$  mediante límites laterales.

**P6.** Estudie la continuidad de

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

**P7.** estudie la continuidad de  $f(x) = \frac{x+1}{|x|}$ .