FM1003-3 Matemáticas III: Límites y Derivadas
Profesor: Leonrdo Sánchez.
Auxiliar: Sebastián López T. Patricio Yañez.

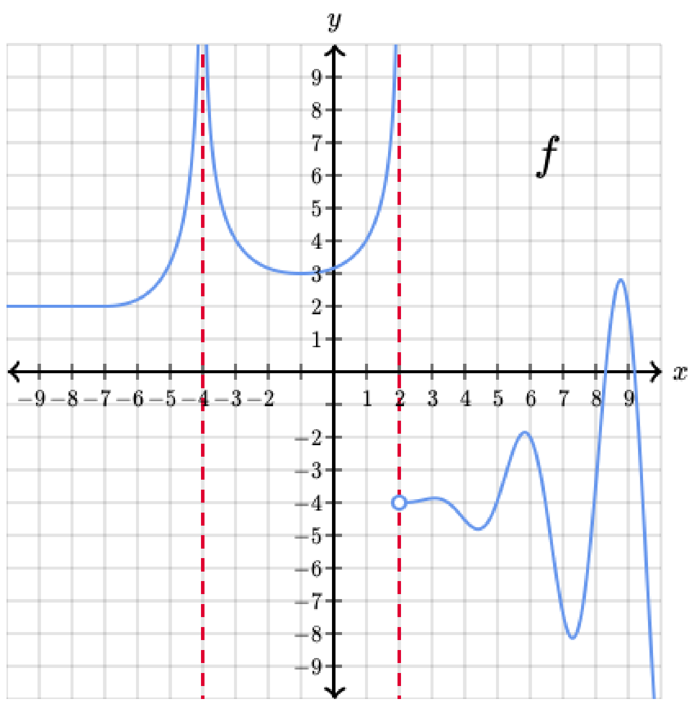
Auxiliar 10: Repaso Control 2

18 de enero de 2019

Resumen Clase

- Inyectividad: Sea $f : A \to B$. f es inyectiva cuando
$$(\forall x, y \in A) x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$
- Sobreyectividad: Sea $f : A \to B$. f es sobreyectiva cuando
$$(\forall y \in B)(\exists x \in A) y = f(x)$$
- Biyectividad: Sea $f : A \to B$. f es biyectiva cuando es inyectiva y sobreyectiva a la vez.
- Ceros: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Los ceros son el conjunto
$$Z(f) = \{x \in Dom(f) | f(x) = 0\}$$
- Paridad: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  - f es par $\Leftrightarrow (\forall x \in A) f(-x) = f(x)$
  - f es impar $\Leftrightarrow (\forall x \in A) f(-x) = -f(x)$
- Función Periódica: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f es periódica $\Leftrightarrow$ $p > 0$ tal que $(\forall x \in A)(x + p) \in A$ y $(\forall x \in A) f(x + p) = f(x)$
- Asíntota Horizontal: Si existe $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a$, entonces la recta $y = a$ es una asíntota horizontal
- Asíntota Vertical: Si existe $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ ó $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical.

P1 Según el siguiente gráfico, calcule los límites (si es que existen):



a) $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

P2 Considere la función definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$. Se pide:

a) Encontrar dominio, ceros, signos, paridad y asíntotas.

b) Demostrar que $\forall x_1, x_2 \in Dom(f)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{(x_1 - x_2)(1 + x_2x_1)}{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)}$$

Use este resultado para estudiar crecimiento de f.

P3 Sea la función $f(x) = \dfrac{2x^2+6x+4}{x^2+2x-3}$

a) Determine el dominio de la función

b) Encuentre los ceros de f

c) Encuentre asíntotas horizontales y verticales

d) Determine los signos de f

e) Determine la paridad de f

f) Determine la inyectividad y sobreyectividad de f

P4 Sea la función $f(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{1+x}}$

a) Determine el mayor conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f : A \to \mathbb{R}$, que a x le asocia f sea una función

b) Encuentre los ceros de f y determine sus signos

c) Determine la paridad y periodicidad de f

d) Determine la inyectividad y sobreyectividad de f

e) Asíntotas horizontales y verticales

f) Encuentre los intervalos donde f crece y decrece

g) Grafique f

P5 Sea $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x| - \sqrt{1-x^2}$

a) Determine $A = Dom(f)$, recorrido y paridad

b) Encuentre los ceros y signos de f

c) Determine las zonas de crecimiento y decrecimiento de f

d) Muetre que f no es sobreyectiva ni inyectiva

e) Determine el mayor conjunto $B \subseteq A$, tal que $f : B \to f(B)$ sea biyectiva y calcule $f^{-1}(x)$

f) Bosqueje el gráfico de f y $|f|$

P6 Consideremos la función:

$$f(x) = |1 - 2cos(x + \pi)| - 1$$

a) Calcule dominio, ceros, estudie paridad y periodicidad

b) Haga el gráfico de f

P7 El objetivo de este problema es probar que una función defínida por partes mediante funciones biyectivas, no necesariamente es biyectiva. Para ello proceda como sigue:

a) Pruebe que las funciones

$$f(x) = 3x - 2\ ,\quad g(x) = \frac{x}{2} - 2$$

son ambas biyectivas

b) Defina ahora la función

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \leq 2 \\ \\ g(x) & si \quad x > 2 \end{cases}$$

¿Qué ocurre con la biyectividad de esta nueva función? Justifique claramente su respuesta.