FM1003-3 Matemáticas III: Límites y Derivadas
Profesor: Matías Godoy Campbell.
Auxiliar: Daniel Águila S. Javiera Terán A.

Para estudiantes de Educación Básica y Media.
UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 9: Límites

17 de enero de 2019

- Límites al infinito: sea $f : A \subseteq R \to B \subseteq \mathbb{R}$ diremos que $f(x) \to l$ cuando $x \to \infty$ si se cumple que
$$\lim_{x\to\infty}(x) = l :=$$
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in A, x \geq m)(|f(x) - l| \leq \epsilon)$$
- Límites infinitos: sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diremos que $f \to \infty$ cuando $x \to \infty$ si:
$$\forall M > 0)(\exists m \in A)(x \geq m) \Rightarrow f(x) \geq M$$
- Límite en un punto: Sea $f : A \subseteq R \to B \subseteq \mathbb{R}$, sea $x_0 \in A$, $\forall x \in A$, se define el límite según la caracterización $\epsilon - \delta$ como sigue:
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l :=$$
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - l| < \epsilon)$$
- Álgebra de límites: sean f y g funciones tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = l_1$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = l_2$
  1. $\lim_{x\to\infty} f(x) + g(x) = l_1 + l_2$
  2. $\lim_{x\to\infty} f(x) - g(x) = l_1 - l_2$
  3. $\lim_{x\to\infty} f(x) \cdot g(x) = l_1 \cdot l_2$
  4. $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$ (siempre que $g(x)$ y $l_2 \neq 0$)
  5. (*con* $\lim_{x\to\infty} \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot l_1$ (con $\lambda \in \mathbb{R}$)
- Teorema del Sándwich: Sean $f, g, h : \mathbb{A} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones. Si $g(x)$ y $h(x)$ tienden a l cuando x tiene a ∞, y además $\exists m \in \mathbb{R}$ tal que:
$(\forall x \geq m) g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
entonces se cumple que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$

P1. Demuestre los siguientes límites por definición:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x-1} = 1$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$

c) $\displaystyle\lim_{x\to infty} \frac{1}{x} = 0$

d) $\lim_{x\to 5} x^2 + 1 = 26$

e) $\lim_{x\to 1} 2x + 3 = 5$

P2. Demuestre que:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x-1} = 1$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{7x-2}{5x-3} = \frac{12}{7}$

c) $\lim_{x\to 0} ln(x^2) = -\infty$

d) $\lim_{x\to 0} \sqrt{x + 1001\pi^2} = 0$

e) $\lim_{x\to 1} e^{\pi x} = e^{\pi}$

P3. Encuentre el valor de los siguientes límites (si es que existen).

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{sen(x)}{x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \left(\frac{x^2-9}{x-3}\right)^3$

d) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{sin(x) - sin(a)}{x-a}$

e) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}) \frac{x^2+x+1}{x^2-1}$

P4. Usando que $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = 1$ para todo $a > 0$ y el Teorema del Sandwich, calcule:ñ

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{7^x + 5^x + 3^x}$$

P5. Para

$$f(x) = e^{1/x} \cdot \frac{(1-x)^2}{(x-2)}$$

Determinar:

a) Dominio, ceros y signos.

b) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

c) Estudie los puntos importantes y de discordia para finalmente bosquejar el gráfico.

La tontuna del día (By MongeDraws)

Figura 1: (meme)