

**FM1003-3 Matemáticas III: Límites y Derivadas****Profesor:** Matías Godoy Campbell.**Auxiliar:** Daniel Águila S. Javiera Terán A.**Auxiliar 8: Funciones IV**

16 de enero de 2019

- Seno: Asocia a cada ángulo la ordenada del punto correspondiente en el círculo unitario. Sus propiedades son:

1. Es  $2\pi$  periódica
2. Es impar
3. Sus ceros son de la forma  $x = k\pi$ , con  $k \in (\mathbb{Z})$

- Coseno: Asocia a cada ángulo la abscisa del punto correspondiente en el círculo unitario.

1. Es  $2\pi$  periódica
2. Es par

3. Sus ceros son de la forma  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , con  $k \in (\mathbb{Z})$

- Tangente: Se define como

$$\tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}$$

- Identidades básicas:

$$\text{sen}^2(x) + \text{cos}^2(x) = 1$$

$$\text{cos}(\alpha \pm \beta) = \text{cos}(\alpha)\text{cos}(\beta) \mp \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)$$

$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}(\alpha)\text{cos}(\beta) \pm \text{cos}(\alpha)\text{sen}(\beta)$$

**P1.** Considere la función trigonométrica  $f(x) = A \cos(nx + h) + k$ . Determine dominio, recorrido, periodo, intervalo de biyectividad y el gráfico correspondiente en los siguientes casos:

- a)  $A = 1, n = 1, k = 0, h = -\frac{\pi}{2}$
- b)  $A = 2, n = 2, k = -2, h = -\frac{\pi}{4}$
- c)  $A = -3, n = \frac{1}{2}, k = 1, h = \frac{\pi}{2}$

**P2.** Grafique las siguientes funciones:

- a)  $f(x) = \cos^2(x)$
- b)  $g(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$
- c) Concluya

**P3.** Considere la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \frac{1 + \text{sen}(x)}{1 - \text{cos}(x)}$$

Encuentre dominio, ceros, paridad, signos, periodicidad e inyectividad.

**P4.** Consideremos la función:

$$f(x) = |1 - 2\cos(x + \pi)| - 1$$

- a) Calcule dominio, ceros, estudie paridad y periodicidad
- b) Haga el gráfico de  $f$

**P5.** Sean  $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , demuestre que:

$$\tan(\alpha) - \tan(\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$$

Utilice este resultado para demostrar que  $\tan(x)$  es creciente en el intervalo  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**P6.** Para las constantes  $A, B, C \in \mathbb{R}$ , con  $A > B$ , se definen las funciones reales  $f, g, h$  en todo  $x \in \mathbb{R}$  como se detalla a continuación:

$$\begin{aligned}f(x) &= A\cos^2(x) + B\operatorname{sen}^2(x) - 2C\operatorname{sen}(x)\cos(x) \\g(x) &= A\operatorname{sen}^2(x) + B\cos^2(x) - 2C\operatorname{sen}(x)\cos(x) \\h(x) &= (A - B)\operatorname{sen}(x)\cos(x) + C(\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x))\end{aligned}$$

Se pide lo siguiente:

- Pruebe que si  $C = 0$ ,  $h$  alcanza su valor máximo para  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$  con  $k \in \mathbb{R}$
- Demuestre que el conjunto de los ceros de  $h$  es  $C_{\text{eros}}(h) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \tan(2x) = \frac{2C}{B - A}\right\}$ .