

FM1003-3 Matemáticas III: Límites y Derivadas

Profesor: Leonardo Sanchez C.

Auxiliar: Sebastián López T. Patricio Yañez A.



Auxiliar 4: Sumatorias

10 de enero de 2019

Resumen Clase

- El producto cartesiano entre dos conjuntos A y B, se define como:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

Así

$$z \in A \times B \Leftrightarrow (a \in A)(b \in B)(z = (a, b))$$

- Propiedades de las sumatorias

$$\sum_{i=p}^q 1 = q - p + 1$$

$$\sum_{i=p}^q \lambda a_i = \lambda \sum_{i=p}^q a_i$$

$$\sum_{i=p}^q a_i + b_i = \sum_{i=p}^q a_i + \sum_{i=p}^q b_i$$

$$\sum_{i=p}^q a_i = \sum_{i=p+k}^{q+k} a_{i-k}$$

$$\sum_{i=p}^q a_i = \sum_{i=p}^k a_i + \sum_{i=k+1}^q a_i$$

$$\sum_{i=p}^q a_i - a_{i+1} = a_p - a_{q+1}$$

- Progresiones

1. Aritmética, de la forma

$$S_n = \sum_{k=0}^n (a + kd)$$

Cuya suma se calcula como

$$S_n = a(n+1) + d \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Geométrica, de la forma

$$S_n = \sum_{k=0}^n ar^k$$

Cuya suma se calcula como

$$S_n = a \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

- Sumas importantes

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

P1. [Problema Coordinado] Calcule las siguientes sumatorias:

$$\sum_{k=0}^5 k^{5-k}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k(k+nk)(k-n)$$

$$\sum_{k=0}^{17} (k+3)^3$$

P2. [Problema Coordinado] Calcule las siguientes sumatorias usando propiedad telescópica

$$\sum_{i=4}^{100} \sqrt{i} - \sqrt{i-1} + 2$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{k+2}{k(k+1)} \frac{1}{2^k}$$

P3. [Problema Coordinado] Calcule las siguientes sumatorias usando progresiones:

$$\sum_{k=1}^n 5^{k+3} + 2n$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} y^k$$

$$\sum_{k=1}^n 3(4^k + 2k^2)$$

P4. La finalidad del ejercicio es calcular el valor de la suma

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$$

Para esto:

- Escriba la suma de los términos pares
- Escriba la suma de los términos impares y concluya

P5. Calcule la siguiente sumatoria (*Hint: Use traslación de índices*)

$$\sum_{i=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}} 2i - 1$$

Con $m \geq 1$

P6. Un granjero desea vender su parcela para lo cual puso un anuncio y se presentaron 7 compradores. Al primero le vendió la mitad de su parcela más media hectárea, al segundo comprador le vendió la mitad de lo que quedaba más media hectárea. Así sucesivamente hasta que el séptimo comprador, que adquirió la mitad de lo que quedaba más media hectárea, con lo cual el granjero vendió el total del terreno disponible.

- Si x es el número total de hectáreas de la parcela, encuentre una expresión para la cantidad de terreno adquirido por cada comprador.
- Determine el valor de x .

P7. Sea $n \geq 0$, demuestre que:

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

P8. Se definen los conjuntos $A = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge 4 \leq x < 7\}$ y $B = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge 1 \leq x \leq 3\}$. Grafique en el plano cartesiano los productos $A \times B$ y $B \times A$. ¿Son iguales estos productos? ¿Tienen elementos comunes?