FM1003-1 Matemáticas III: Límites y Derivadas
Profesor: Leonardo Sanchéz C.
Auxiliar: Sebastián López. Patricio Yáñez A.

Auxiliar 3:Conjuntos

9 de enero de 2019

Recuerdo

- **Definiciones**
- Pertenencia: $x \in A$, si x es un elemento dentro del conjunto A.
- Conjunto Vacío (ϕ): Conjunto sin elementos definido lógicamente por $(\forall x)(x \notin \phi)$.
- Conjunto Universo ($\mathcal{U}$): Conjunto que tiene todos los elementos que estamos considerando, definido lógicamente por $(\forall x)(x \in \mathcal{U})$.
- Subconjunto ($\subseteq$): $A \subseteq B$ si $(\forall x)[x \in A \Rightarrow x \in B]$.
- Diferencia Simétrica ($\triangle$): $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
- Producto Cartesiano ($\times$): $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$
- **Propiedades Básicas**
- $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.
- $A \setminus B = A \cap B^c$.
- $A \triangle B \Leftrightarrow (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

P1. [Problema Coordinado]

1. Verdadero o Falso. Corrija las falsas

   (1) Una definición formal del conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ es $(\forall x)[x \in A \Leftrightarrow (x = 1 \wedge x = 2 \wedge x = 3)]$

   (2) Sea $A = \{\phi\}$.

      (i) $(\exists x)(x \in A)$

      (ii) $\phi \in A$

      (iii) $\{\phi\} \in A$

      (iv) $\{\phi\} \subseteq A$

   (3) Sea $B = \{\{\phi\}\}$. $(\phi \subseteq B) \ \wedge (\phi \in B)$

   (4) Sea C distinto de vació, la proposición $(\exists x)(x \in \phi \Rightarrow x \in C)$ es verdadera.

   (5) El conjunto $A = \{a, \{1, 2, 3\}\}$ la cantidad de elementos es 2.

P2. [Problema Coordinado]

2. Demuestre las siguientes propiedades:

   a) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$

   b) $(A \cap C = \phi) \Rightarrow (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

   c) $A \triangle B = B \triangle A$

   d) $A \subset A^c \Leftrightarrow A = \emptyset$.

   e) $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$

   f) $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$

   g) $(A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c) = A^c \cup B$

P3. [Problema Coordinado]

3. Probar que si

$$(A \cap X = A \cap Y) \wedge (A \cup X = A \cup Y) \Rightarrow X = Y$$

P4.

4. Sean A, B subconjuntos de un mismo universo U y $C = (A \cup B)^c$. Probar que:

$$(A \triangle B) \triangle C = A \cup B \cup C \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset.$$

P5.

5. Sean A, B, C subconjuntos de U (conjunto universo). Demuestre que:

   (i) $A \Delta A = \varnothing$

   (ii) $A \Delta \varnothing = A$

   (iii) Utilizando lo anterior, demuestre que:

$$A \Delta B = C \Rightarrow A \Delta C = B$$

Indicación: Recuerde que Δ cumple las propiedades de conmutatividad y asociatividad.

P6. a) Sean A, B dos conjuntos no-vacios demuestre que:

$$A \cap B = \phi \Leftrightarrow (A \cup B) \setminus B = A$$

b) Sean A, B dos conjuntos no-vacíos, encuentre un conjunto X que verifique las siguientes ecuaciones:

$$A \cup X = A \cup B \quad \wedge \quad A \cap X = \phi$$

P7. Sea B un subconjunto del universo U, demuestre que:

$$[(\forall A \subseteq U)(A \cup B = A)] \Rightarrow (B = \phi)$$

P8. Sean $A, B \subseteq E$, $C, D \subseteq F$. Demuestre que

a) $A \times F \subseteq E \times F$.

b) $(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$. Muestre con un ejemplo que la inclusión en el otro sentido no es siempre verdadera.

P9. Sea A un conjunto no vacío. Para $B \subseteq A \times A$ y $a \in A$ fijo se define

$$B(a) := \{x \in A \,|\, (x, a) \in B\} \subseteq A.$$

Pruebe que

a) $(B^c)(a) = (B(a))^c$.

b) $(B \cup C)(a) = B(a) \cup C(a)$.

P10. *a)* Sean $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$. Demuestre que

$$(A \cap B) \subseteq (C \cap D)$$

b) Sean X, C, D conjuntos. Demuestre que

$$X \subseteq C \wedge X \subseteq D \Leftrightarrow X \subseteq (C \cap D)$$